UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: Matthias.Fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2009
Übungsblatt 4, Ausgabe 20.05.2009
Abgabe am 27. Mai 2009
Besprechung in den Übungen am 20. und 22.05.2009

Aufgabe 17 (E): Eindimensionaler, unendlich tiefer Potentialtopf (8 Punkte)

In der Vorlesung wurde ein Teilchen in einem unendlich tiefen Rechteckpotential der Breite L betrachtet. Seine Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ zu den Energie-Eigenwerten $E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}$ wurden bestimmt zu $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen normiert sind, also $\int_0^L |\phi_n(x)|^2 \, dx = 1$.

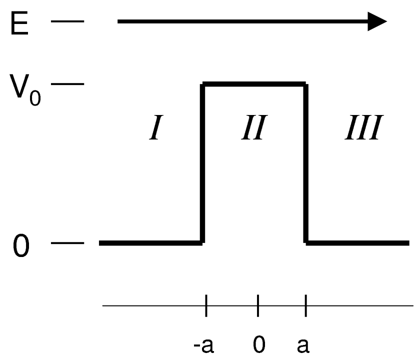
b) (2 Punkte) Berechnen Sie für allgemeines n den Erwartungswert des Ortes $< x >_n = \int_0^L \phi_n^*(x) \; x \; \phi_n(x) \, dx$. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\phi_n(x)|^2$ für $n = 1$ und $n = 2$. Fallen die Erwartungswerte $< x >_n$ mit den wahrscheinlichsten Orten (also den Maxima von $|\phi_n(x)|^2$) zusammen?

c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Ortsunschärfe $\Delta x_n = \sqrt{< (x - < x >_n)^2 >_n}$. Berechnen Sie für $L = 1\mathrm{m}$ für $n = 1, \ldots, 5$ Δx_n in Zahlen und tragen Sie diese Werte in einem kleinen Plot über n auf.

d) (1,5 Punkte) Die Ortsdarstellung des Impulsoperators p lautet $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $< p >_n = \int_0^L dx \; \phi_n^*(x) \; \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \phi_n(x)$ für alle n verschwindet. Könnte man dies auch durch Interpretation der Form von $\phi_n(x)$ gleich sehen?

e) (1,5 Punkte) Berechnen Sie die Impulsunschärfe $\Delta p_n = \sqrt{< (p - < p_n >)^2 >_n}$. $E = p^2/2m$ dürfen Sie verwenden. Berechnen Sie auch $\Delta x_n \Delta p_n$ sowie Zahlenwerte hierfür für $n = 1, \ldots, 5$ und tragen Sie auch diese über n auf.

Aufgabe 18 (E): Streuung an einer Potentialschwelle (6 Punkte)



Betrachten Sie für das Problem einer Potentialschwelle drei Regionen: Nullpotential links und rechts und eine V_0 hohe Barriere auf einer Breite von $2a$ dazwischen. Mit einer von links einfallenden ebenen Welle (die einfallende Teilchen beschreibt bei Energie E zur Wellenzahl $k = \sqrt{2mE}/\hbar$) machen Sie entsprechende Ansätze für die Wellenfunktion Ψ in allen drei Bereichen. E soll größer als die Barrierenhöhe sein.

Leiten Sie aus den Stetigkeitsbedingungen den Transmissionskoeffizienten her und zeigen Sie, dass die transmittierte Intensität durch

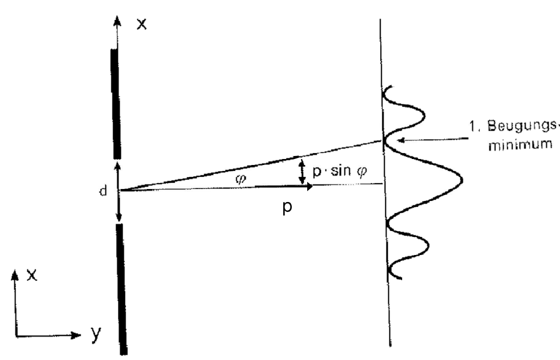
$$T = \frac{1}{\cos^2(2qa) + \frac{1}{4}(\frac{q}{k} + \frac{k}{q})^2 \sin^2(2qa)}$$

mit $q = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$ gegeben ist.

Plotten Sie T als Funktion von E/V_0 im Bereich $E/|V_0| = 1 \ldots 5$ für $2\sqrt{2m|V_0|}a/\hbar = 10$ (entweder mit einem Computerprogramm oder durch Ausrechnen von Funktionswerten in Schritten von $\Delta E/V_0$ höchstens 0,1 und Zeichnen auf Millimeterpapier).

Was hätten Sie klassisch für die Übergangswahrscheinlichkeit der einfallenden Teilchen von Gebiet I nach Gebiet III erwartet?

Aufgabe 19 (E): Impulsunschärfe bei Beugung am Spalt (6 Punkte)



Sie haben gelernt, dass Teilchen wie auch Licht Beugung zeigen und die hinter einem Spalt registrierte Intensitätsverteilung weist das nebenstehend skizzierte bekannte Muster auf. Der Ort (in der Spaltebene) ist nach Durchgang durch den Spalt in x-Richtung auf einen Bereich der Länge d eingeschränkt worden.

a) (2 Punkte) Die Verteilung der Impulse in x-Richtung hinter dem Spalt hat offenbar viele Maxima und Minima. Als grobe Abschätzung eines mittleren Impulses in x-Richtung, also der Impulsunschärfe, nimmt man den Wert, der dem ersten Beugungsminimum entspricht. Geben Sie mithilfe Ihrer Kenntnisse aus der Optik dieses Δp_x an. Rechnen Sie damit $\Delta x \cdot \Delta p_x$ aus.

b) (4 Punkte) Fassen Sie die aus der Optik bekannte Intensitätsverteilung als Wahrscheinlichkeitsdichte $|\phi(p_x)|^2$ auf und rechnen Sie $\Delta p_x = \sqrt{< p_x^2 > - < p_x >^2}$ zahlenmäßig aus für $d = 4 \cdot 10^{-5}$m und $\lambda = 560$nm. Behalten Sie die Kleinwinkelnäherung $p_x = p \sin\varphi$ bei, auch wenn das für große Winkel zu kleine Impulswerte liefert. Benutzen Sie hier Software, die die Integrale numerisch ermitteln kann.

Aufgabe 20 (T): Ehrenfest-Theorem (schriftlich - 6 Punkte)

a) (2 Punkte) Berechnen Sie $\langle x \rangle$ und $\langle p \rangle$ eines Teilchens mit der Masse m indem Sie die Zeitentwicklungen durch Kommutatoren ausdrücken für die folgenden eindimensionalen Potentiale:

i) $V(x) = 0$ (freies Teilchen)

ii) $V(x) = -qEx$ (Teilchen im konstanten elektrischen Feld)

iii) $V(x) = \frac{k}{2}x^2$ (Teilchen im harmonischen Oszillator)

b) (2 Punkte) Vereinfachen Sie den allgemeinen Ausdruck für die Zeitentwicklung von $(\Delta x)^2$ ohne Kenntnis der Wellenfunktion $\psi(x,t)$. Berechnen Sie $(\Delta p)^2$ für die Fälle (i) und (ii). Wie hängen die Impulsunschärfen in diesen Fällen von der Zeit ab? Zeigen Sie für den harmonischen Ozillator in Fall (iii) die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x^2 \rangle = \alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle p^2 \rangle$$

und geben Sie α an.

c) (2 Punkte) Stellen Sie für ein geladenes Teilchen im konstanten homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ die Bewegungsgleichungen (Zeitentwicklung) für $\langle \mathbf{r} \rangle$ und $\langle \mathbf{p} \rangle$ auf und zeigen Sie so, dass diese mit den klassischen Bewegungsgleichungen übereinstimmen.

Aufgabe 21 (T): Stromdichte (schriftlich - 7 Punkte)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ ohne äußeres Feld als Funktion des Ortes und der Zeit für

a) (1 Punkt) eine ebene Welle

b) (2 Punkte) das eindimensionale Wellenpaket (siehe Aufgabe 14)

Die Diskussion der Wahrscheinlichkeitsstromdichte ändert sich, wenn elektromagnetische Felder auf ein geladenes Teilchen (Ladung q) wirken.

c) (2 Punkte) Da der Hamiltonoperator das skalare und das Vektorpotential enthält, muss die Wellenfunktion bei einer Eichtransformation mit verändert werden. Zeigen Sie, dass für eine *Eichtransformation*

$$A \to A' = A + \nabla\chi, \; \phi \to \phi' = \phi - \partial_t \chi$$

mit einer beliebigen skalaren Funktion $\chi(\mathbf{r},t)$ die Wellenfunktion $\psi' = e^{i\chi q/\hbar}\psi$ die Schrödingergleichung mit den neuen Potentialen erfüllt, wenn ψ Lösung der ursprünglichen Schrödingergleichung ist. (Die Wellenfunktion ist also *eichinvariant*, da sie sich nur um einen Phasenfaktor ändert.)

d) (2 Punkte) Leiten Sie aus der Zeitableitung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit den Ausdruck für die Stromdichte j für Teilchen der Masse m und Ladung q im Magnetfeld her. Zeigen Sie zunächst die Hermitizität des zugehörigen Hamiltonoperators.

Aufgabe 22 (T): Operator Gymnastik (schriftlich - 7 Punkte)

a) (2 Punkte) Zeigen Sie folgende Kommutatorrelationen für zwei beliebige Funktionen $f(x)$ und $g(p)$:

i) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ für beliebige Operatoren A, B und C

ii) $[p, f] = -i\hbar \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$

iii) $[x, g] = i\hbar \frac{\mathrm{d}g(p)}{\mathrm{d}p}$

b) (2 Punkte) Nehmen Sie an, A und B seien unabhängig von λ. Beweisen Sie mit Hilfe einer Taylorentwicklung um $\lambda = 0$ das sogenannte *Baker-Hausdorff-Theorem*:

$$e^{\lambda B} A e^{-\lambda B} = A + \lambda[B, A] + \frac{\lambda^2}{2}[B, [B, A]] + \frac{\lambda^3}{3!}[B, [B, [B, A]]] + ...$$

c) (1 Punkt) Sei $A = x$ und $B = -ip/\hbar$. Erläutern Sie, welche Rolle der Operator $T(\lambda) = e^{-i\lambda p/\hbar}$ spielt und zeigen Sie, dass $T(\lambda)$ unitär ist. Welche Wirkung hat dieser Operator auf eine Wellenfunktion $\psi(x)$?

d) (2 Punkte) Betrachten Sie zwei Operatoren A und B, die mit $[A, B]$ vertauschen, d.h.

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0.$$

Zeigen Sie damit die folgende Beziehung:

$$e^{\lambda A} e^{\lambda B} = e^{\lambda(A+B) + \frac{\lambda^2}{2}[A,B]}$$

Hinweis: Stellen Sie eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die linke Seite auf und zeigen Sie, dass die Differentialgleichungen für beide Seiten dasselbe Anfangswertproblem darstellen.