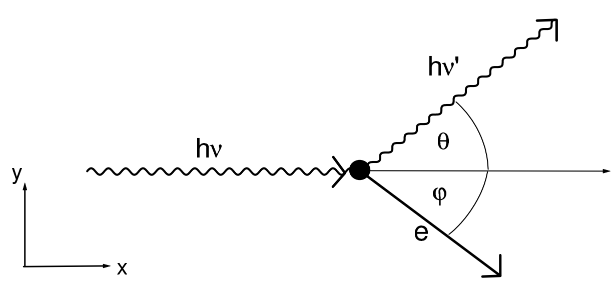
UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: Matthias.Fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2009
Übungsblatt 2, Ausgabe 06. 05. 2009
Abgabe am 13. Mai 2009
Besprechung in den Übungen am 13. und 15. 05. 2009

Aufgabe 6 (E): Compton-Effekt (9 Punkte)



a) (5 Punkte) Der Compton-Effekt beschreibt die Streuung eines Photons an einem Elektron. Vor dem Stoß sei das Elektron in Ruhe. Die Winkel, unter denen Photon und Elektron nach dem Stoß davonfliegen, werden mit θ bzw. φ bezeichnet. Das Photon gibt einen Teil seiner Energie an das Elektron ab, weshalb die Wellenlänge des gestreuten Lichts größer ist als die des einfallenden.

Hier soll der quantitative Zusammenhang

$$\lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos\theta) \qquad (*)$$

hergeleitet werden. λ und ν beziehen sich auf das Photon vor dem Stoß, λ' und ν' auf das Photon nach dem Stoß. $\lambda_C = \frac{h}{m_0 c}$ (mit m_0 der Ruhemasse des Elektrons) heißt Comptonwellenlänge. (Aufpassen, falls man den Zahlenwert nachschlägt, denn mitunter ist $\frac{\hbar}{m_0 c}$ angegeben.) Für das System aus Photon und Elektron sind Energie- und Impulserhaltung anzusetzen. Der Impuls ist vektoriell zu betrachten bzw. seine Erhaltung einzeln für die Komponenten in x- und y-Richtung anzusetzen. Das Elektron ist relativistisch zu behandeln, hat also vorher seine Ruheenergie m_0c^2 und nachher den Impuls $\vec{p}_e$ sowie die Energie $E_e = \sqrt{m_0^2c^4 + p_e^2c^2}$. Ein Photon, das zu Licht der Frequenz ν gehört, hat die Energie $h\nu$ und den Impuls(betrag) $h\nu/c$. Also: Leiten Sie (*) her! Hilfe: Als Zwischenergebnis sei die Compton-Beziehung für die Frequenzen angegeben:

$$\nu - \nu' = \frac{h\nu\nu'}{m_0c^2}(1 - \cos\theta)$$

.

b) (4 Punkte) Ein Photon mit der Energie $1 \cdot 10^4$eV macht einen Stoß mit einem ruhenden Elektron und wird unter einem Winkel von 60° gestreut. Geben Sie die Wellenlängen des einfallenden und des auslaufenden Photons an (berücksichtigen Sie vier Stellen in der Mantisse der Werte). Berechnen Sie auch die kinetische Energie des Elektrons nach dem Stoß und den Winkel, unter dem es davonfliegt.

Aufgabe 7 (E): Photo-Effekt (4 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie auch den Photo-Effekt kennengelernt, bei dem ein Photon vollständig absorbiert wird, um ein Elektron aus einem Material herauszulösen. Da der umgebende Festkörper Impuls aufnehmen kann, ist hier ja nur eine Energiebilanz zu betrachten.

λ [nm]	U [V]
405	0,93
546	0,14

Material	W_A [eV]
Li	2,46
Na	2,28
K	2,25
Rb	2,13
Cs	1,94

Eine Materialoberfläche wird nacheinander mit Licht der beiden in der linken Tabelle aufgeführten Wellenlängen bestrahlt und die kinetische Energie der ausgelösten Elektronen wird in Form der zugehörigen Bremsspannung U gemessen. Gewinnen Sie durch Extrapolation der Daten die Austrittsarbeit W_A des Materials und ermitteln Sie aus den Messwerten außerdem einen Wert für h/e. (Der Wert der Lichtgeschwindigkeit c zur Umrechnung von Wellenlänge in Frequenz ist natürlich als bekannt anzunehmen.)
Die rechte Tabelle gibt Literaturwerte für die Austrittsarbeiten einiger Stoffe. Um welches Material könnte es sich im Versuch gehandelt haben? Was würde man messen, wenn man das Material mit Licht der Wellenlänge 300nm bzw. 700nm bestrahlt?

Aufgabe 8 (E): Rayleigh-Jeans-Gesetz (7 Punkte)

a) (3 Punkte) Betrachten Sie ein würfelförmiges Volumen der Seitenlänge L mit metallisch reflektierenden Innenwänden. Welche Bedingung müssen die Wellenvektoren $\pm\vec{k}$ von stehenden elektromagnetischen Wellen ($\omega = ck$) darin erfüllen? (Für eine stehende Welle als Überlagerung eines in Richtung $+\vec{k}$ und eines in Richtung $-\vec{k}$ laufenden Anteils zählen wir nur ein $\vec{k}$.) Argumentieren Sie, dass die erlaubten Wellenvektoren $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ auf einem Punktgitter des dreidimensionalen k-Raums liegen (in wievielen Quadranten?) und skizzieren Sie dieses. Wie groß ist das einem erlaubten Wellenvektor zuzuordnende Volumen in diesem Raum?

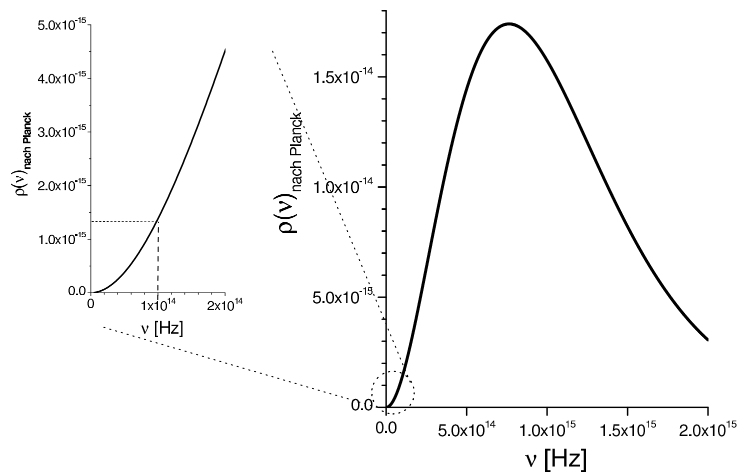
b) (3 Punkte) Für ein hinreichend großes Volumen darf man die Wellenvektoren und auch ihre Anzahl als kontinuierlich ansehen. Zeigen Sie, dass die Anzahl stehender Wellen, deren Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegt,

$$N(\nu) = 2 \cdot 4\pi \frac{L^3}{c^3}\nu^2$$

beträgt. Hinweise und Hilfen: Erweitern Sie die Gleichung auf beiden Seiten um das Differential $d\nu$. Die erste 2 ist der Faktor, um zu berücksichtigen, dass eine Welle festgelegter Ausbreitungsrichtung in zwei Polarisationen auftreten kann. Überlegen Sie, wo in dem in a) betrachteten k-Raum die Endpunkte von Wellenvektoren zwar verschiedener Richtung, aber gleichen Betrags liegen.

Jeder stehenden Welle ist im thermodynamischen Gleichgewicht die Energie $k_B T$ zuzuordnen. Geben Sie die spektrale Energiedichte $\rho(\nu)$ an, also die in einem Einheitsvolumen des realen Raums vorhandene Energie von stehenden Wellen mit Frequenz im Intervall ν bis $\nu + d\nu$ (bei einem festen T natürlich). Sie haben damit das Rayleigh-Jeans'sche Strahlungsgesetz hergeleitet.

c) (1 Punkt) Das Rayleigh-Jeans-Gesetz hat nur Gültigkeit für kleine Frequenzen und stellt dort eine Näherung des umfassenderen Planckschen Strahlungsgesetzes dar.

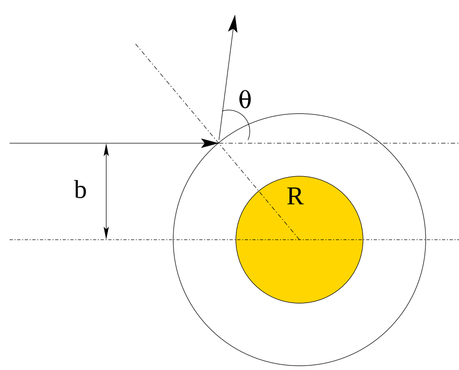


Die Abbildung zeigt ein Spektrum, wie man es an einem schwarzen Strahler von $T = 13000\text{K}$ beobachten würde, z.B das kontinuierliche Spektrum des Sterns Regulus im Löwen. Links ist ein Zoom in den Bereich kleiner Frequenzen gezeigt, der den etwa parabelförmigen Verlauf erkennen lässt. Berechnen Sie das ρ, das man bei $\nu{=}1\cdot 10^{14}\text{Hz}$, also bei $\lambda{=}3\mu\text{m}$ im Infraroten, nach der in b) hergeleiteten Rayleigh-Jeans-Formel erhalten würde. Wie groß ist die prozentuale Abweichung von dem Wert, den Sie aus dem Graphen ablesen?

Aufgabe 9 (T): Elastische Streuung harter Kugeln und Scheiben

(schriftlich - 8 Punkte)

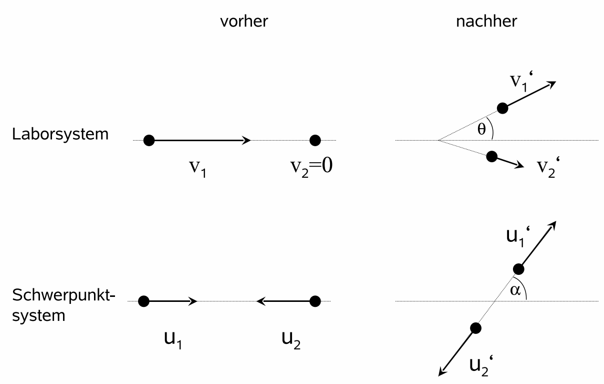
Es soll die elastische Streuung zweier harter Kugeln mit Radius R und mit den Massen m_1 und m_2 betrachtet werden. Nehmen Sie an, die Kugel 2 ruhe vor dem Stoß (im Laborsystem).

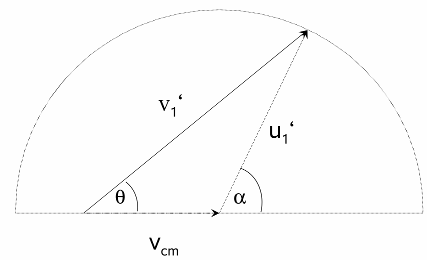


a) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Stoßparameter $b(\theta)$ als Funktion des Streuwinkels θ und damit den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ sowie den totalen Wirkungsquerschnitt σ, wenn Kugel 2 festgehalten wird.

Hinweis: Betrachten Sie die zweite Skizze von Aufgabe 1. Zwischen der Zahl der gestreuten Teilchen pro Zeit $\mathrm{d}N$ und dem differentiellen Wirkungsquerschnitt $\mathrm{d}\sigma$ besteht der Zusammenhang $\mathrm{d}N = I\mathrm{d}\sigma$ mit dem eingehenden Strom I. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen $\mathrm{d}N$ und der Änderung des Stoßparameters $\mathrm{d}b$, um dann auf den differentiellen Wirkungsquerschnitt zu kommen.

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|$$





Umrechnung von Schwerpunkt- auf Laborsystem

b) (3 Punkte) Zeigen Sie unter Ausnutzung der Impuls- und Energieerhaltung, dass zwischen dem Streuwinkel im Laborsystem θ und dem Streuwinkel im Schwerpunktsystem α folgender Zusammenhang gilt :

$$\tan\theta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \frac{m_1}{m_2}}.$$

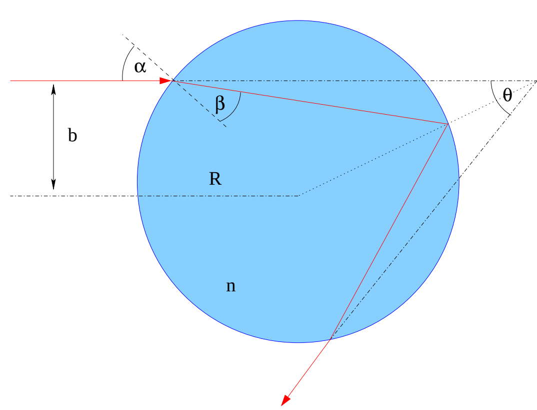
Die Kugeln werden hier natürlich nicht festgehalten.
Was folgt daraus für $m_1 = m_2$? Wann erhalten Sie den in a) betrachteten Fall? Diskutieren Sie den Einfluss der (zur Vereinfachung als ruhend angenommen) Elektronen beim Rutherford Experiment.

c) (2 Punkte) Auch die Streuung von Teilchen, die sich nur in einer Ebene bewegen, kann durch Wirkungsquerschnitte beschrieben werden. Leiten Sie die allgemeine Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ an einem Zentralpotential in zwei Dimensionen, d.h. $V(x,y) = V(\rho)$ mit $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, ab.

d) (1 Punkt) Diskutieren Sie die Streuung einer harten Kreisscheibe mit dem Radius R an einer gleichen Kreisscheibe, die festgehalten wird. Vergleichen Sie die Ergebnisse der harten Scheiben mit denen der harten Kugeln.

Aufgabe 10 (T): Regenbogenstreuung (schriftlich - 5 Punkte)

Paralleles Sonnenlicht trifft auf ein kugelförmiges Wassertröpfchen mit Radius R und Brechungsindex n und wird in diesem einmal reflektiert (siehe Abbildung).



a) (2 Punkte) Berechnen Sie den Austrittswinkel θ in Abhängigkeit des Streuparameters b und tragen Sie θ in Abhängigkeit von b/R auf.

b) (1 Punkt) Für welchen Winkel θ wird für $n = 1,33$ (Wasser) am meisten Licht reflektiert? Wodurch entstehen die Farben im Regenbogen?

Hinweis: Nehmen Sie eine Gleichverteilung der Streuparameter an und überlegen Sie sich die Verteilung der Austrittswinkel.

c) (2 Punkte) Skizzieren Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt (siehe Teilaufgabe 10 a)) indem Sie sich die Grenzfälle $b \to 0$ und $b \to R$ überlegen.
Was passiert bei dem in Teilaufgabe b) berechneten Winkel?

Aufgabe 11 (T): Plancksche Strahlungsformel (schriftlich - 7 Punkte)

Die Herleitung des Rayleigh-Jeans-Gesetzes führte zu einem unphysikalischen Ergebnis für große Frequenzen (*UV-Katastrophe*, siehe Aufgabe 8). Um dieses Problem zu lösen, führte Planck im Jahre 1900 die Quantenhypothese ein. Hierbei nahm er an, dass ein Oszillator der Frequenz ν nur ganzzahlige Vielfache der Energie $h\nu$ aufnehmen kann.

a) (2 Punkte) Durch Anwendung der Quantenhypothese und der Boltzmann-Statistik zeigt die statistische Thermodynamik, dass ein Schwingungszustand der Frequenz ν im Mittel die Energie

$$E(\nu, T) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

trägt. Werten Sie die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n p_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e^{-\beta\epsilon_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\epsilon_n}}$$

sowie das Integral

$$\frac{\int_{n=0}^{\infty} \mathrm{d}n \; \epsilon_n e^{-\beta\epsilon_n}}{\int_{n=0}^{\infty} \mathrm{d}n \; e^{-\beta\epsilon_n}}$$

mit $\beta = (k_B T)^{-1}$ und $\epsilon_n = nh\nu$ aus, um Plancks Rechnung und die klassische Betrachtung nachzuvollziehen.
Damit ergibt sich das *Plancksche Strahlungsgesetz* zu

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}.$$

Diskutieren Sie, wann die klassische Betrachtung ('klassischer Grenzfall') gilt?

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die gesamte Strahlungsleistung S durch Integration der Strahlungsflussdichte

$$P(\nu, T) \, \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\Omega = \frac{c}{4\pi} \rho(\nu, T) \, \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\Omega$$

über das gesamte Frequenzspektrum und den Halbraum (Achtung: Die Abstrahlung ist winkelabhängig!) und bestimmen Sie aus dem *Stefan-Boltzmann-Gesetz* $S = \sigma T^4$ die Stefan-Boltzmann-Konstante σ.

Hinweis:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}.$$

c) (1 Punkt) Berechnen Sie aus dem Planckschen Strahlungsgesetz die spektrale Energiedichte $\tilde{\rho}$ in Abhängigkeit der Wellenlänge λ mittels der Transformation

$$\rho(\nu, T)\ \mathrm{d}\nu = \tilde{\rho}(\lambda, T)\ \mathrm{d}\lambda.$$

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie jeweils das Maximum von $\rho(\nu, T)$ und $\tilde{\rho}(\lambda, T)$ (*Wiensches Verschiebungsgesetz*) und zeigen Sie, dass $\nu_{\mathrm{max}}\lambda_{\mathrm{max}} \neq c$ ist. Was bedeutet das?

Hinweis: Die Maxima lassen sich nur numerisch bestimmen.