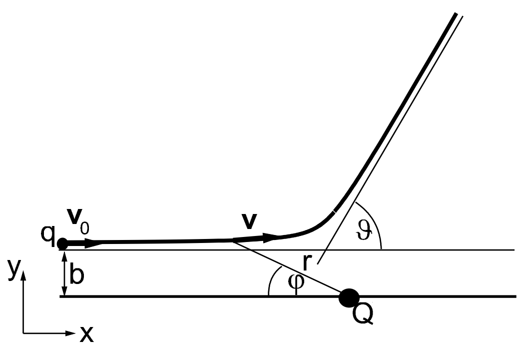
UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: Matthias.Fuchs@uni-konstanz.de
Dr. Ursula Schröter (Experimentalphysik)
Dr. Stefan Gerlach (Theoretische Physik)

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2009
Übungsblatt 1, Ausgabe 29. 04. 2009
Abgabe am 06. Mai 2009
Besprechung in den Übungen am 06. und 08. 05. 2009

Aufgabe 1 (E): Rutherfordstreuung und Kernradien (14 Punkte)

Der Rutherford-Versuch, bei dem α-Teilchen auf bzw. durch dünne Folien geschossen werden, war der erste, der eine Abschätzung der Atomkernradien ermöglichte. Hier soll zunächst die Streuung eines punktförmigen α-Teilchens (bestehend aus 2 Protonen und 2 Neutronen, 2-fach positiv geladen, also $q = 2e$) an einem ebenfalls punktförmigen, Z-fach positiv geladenen ($Q = Ze$) Atomkern betrachtet werden.



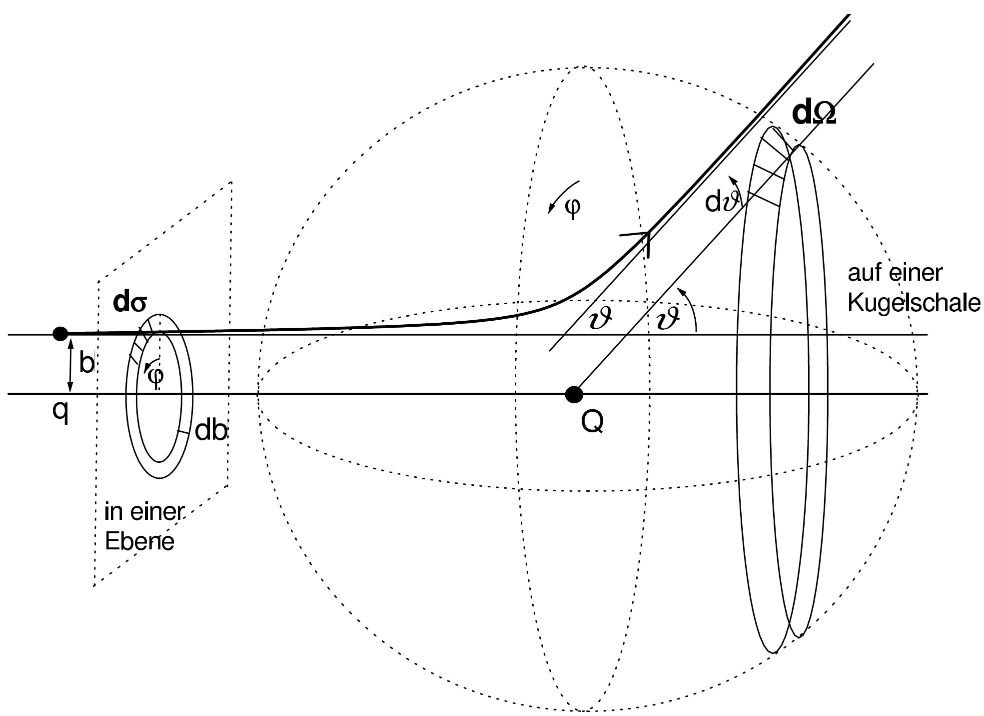
a) Das α-Teilchen fliege im Abstand b auf den Kern zu (b heißt Stoßparameter). In sehr großer (unendlicher) Entfernung hat es die Geschwindigkeit v_0. Diese ist durch seine Energie E_0 gegeben (kinetische Energie, nicht-relativistisch). In endlicher Entfernung wirkt die Coulombabstoßung zwischen den beiden positiven Ladungen. Der Kern sei als ruhend betrachtet. Die Trajektorie des α-Teilchens werde in einem Polarkoordinatensystem (r, φ) mit Q als Ursprung beschrieben.

Nutzen Sie die (Bahn-)Drehimpulserhaltung aus, um eine Beziehung zwischen r und $d\varphi/dt$ zu gewinnen. Drücken Sie die Komponente der Coulombkraft in y-Richtung mit r und φ aus. Der Winkel ändert sich von anfangs $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi - \vartheta$ am Ende. Wenn das α-Teilchen den Kern passiert hat, beträgt der Betrag seiner Bahngeschwindigkeit in unendlicher Entfernung wieder v_0. Die y-Komponente der Geschwindigkeit hat sich von 0 auf $v_0 \sin\vartheta$ geändert. Aus der Rechnung, dass die Impulsänderung in y-Richtung dem Integral der Kraft in y-Richtung über die gesamte Bahn entsprechen muss, beweisen Sie die Beziehung

$$b = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 E_0} \cot\frac{\vartheta}{2} \qquad (1).$$

Hinweis: $\frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} = \tan\frac{\vartheta}{2}$.

b) Als differentiellen Wirkungsquerschnitt bezeichnet man das Verhältnis der Fläche $d\sigma$ eines Kreisrings um die Einfallsachse zur Fläche $d\Omega$ eines Rings auf einer Einheitskugel um das Streuzentrum (Q) so, dass die Teilchen, die in einem parallelen, gleichmäßig dichten Strom (hier von links) im Abstand b bis $b + db$ von der Achse einfallen, um ϑ aus ihrer ursprünglichen Flugrichtung abgelenkt werden (siehe Zeichnung). Wenn wir die Überlegung allgemein ansetzen, so dass die Streuung für nicht rotationssymmetrische Probleme auch noch vom Azimuthwinkel φ abhängen könnte, ist das Verhältnis der Flächenstücke $d\sigma = b\, db\, d\varphi$ und $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ zu bilden. Achtung: Die Bezeichnung φ hier hat nichts mit φ aus a) zu tun. (Schlagen Sie ggf. das Kugelflächenelement $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ nach, falls Ihnen das nicht geläufig ist.) Ignorieren Sie den Versatz b der Bahntangente zur ϑ-Richtung bezüglich des Streuzentrums (das ist wie bei der Beugung am Spalt, wo das Beugungsmuster auf makroskopischer Skala betrachtet wurde und eine Nichtparallelität von in einem Punkt ankommenden Strahlen aufgrund der endlichen Spaltbreite vernachlässigt werden konnte).



Indem Sie $b(\vartheta)$ aus (1) einsetzen, leiten Sie den Streuquerschnitt für Punktladungen her:

$$\left|\frac{d\sigma}{d\Omega}\right| = \frac{1}{4}\left(\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 E_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}} \tag{2}$$

Welche physikalische Tatsache steckt hinter der Notwendigkeit, in (2) Betragsstriche zu setzen?

c) Betrachten Sie jetzt wieder die Zeichnung unter a). Drücken Sie die Energie des α-Teilchens an einem beliebigen Punkt der Bahn, wo sie die Summe aus kinetischer und potentieller (Coulomb) Energie ist, mithilfe der aktuellen Bahngeschwindigkeit v und dem momentanen Kernabstand r aus.

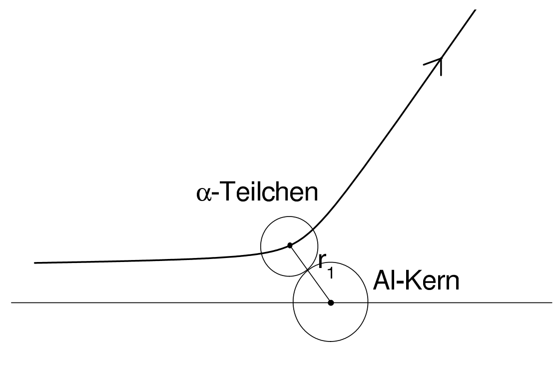
d) Im Scheitelpunkt der Bahn, also wenn r seinen minimalen Wert annimmt, sei dieser Abstand mit r_1 und die Bahngeschwindigkeit mit v_1 bezeichnet. Welches ist dort der Winkel zwischen Radius- und Geschwindigkeitsvektor? Wie ist also der Drehimpuls auszudrücken?

e) Benutzen Sie Drehimpuls- und Energieerhaltung sowie die Beziehung (1), um zu zeigen, dass für eine Bahn, auf der die Ablenkung aus der ursprüglichen Richtung ϑ ist, der minimale Kernabstand im Scheitelpunkt

$$r_1 = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 E_0}\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\right) \tag{3}$$

beträgt. Hilfe: $\sqrt{1+\cot^2\frac{\vartheta}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$, und die negative Wurzel ist hier unphysikalisch.

f) Im Rutherford-Versuch beim Beschuss einer Aluminum(Z=13)-Folie mit α-Teilchen einer Energie von E_0=12,75MeV (**M**ega=10^6, 1eV=1,602·10^{-19}Joule) schließt man aus der Tatsache, dass die Anzahl der Teilchen, die unter Winkeln größer als ϑ=54° herauskommen, eben *nicht mehr* der für Punktteilchen erwarteten $\frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}$-Verteilung (2) entspricht, dass die Atomkerne eine endliche Ausdehnung haben.



Nehmen Sie an, dass für ϑ=54° sich α-Teilchen und Atomkern im Scheitelpunkt der Bahn gerade berühren. Berechnen Sie r_1 für diesen ϑ-Wert und geben Sie den Radius des Al-Atomkerns an, indem Sie noch den Radius des α-Teilchens von r_α=2·10^{-15}m abziehen.
(10^{-15}m = 1 fm = 1 Femtometer)

Aufgabe 2 (E): Avogadrokonstante aus Sedimentationsgleichgewicht

(6 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

In einer Flüssigkeit suspendierte Teilchen verhalten sich wie Gasmoleküle. Ihre Verteilung kann mit der barometrischen Höhenformel

$$n(z) = n_0\ \exp(-m^* gz/k_B T) \tag{1}$$

beschrieben werden. m^*g steht für die Gewichtskraft, die nach Abzug des Auftriebs bleibt. In einem Experiment hatten die in Wasser suspendierten Teilchen einen Radius von a=0,2μm und eine Materialdichte von ρ=1,2·10^3kg/m^3. Die Teilchen wurden in übereinanderliegenden Schichten von je 30μm Dicke gezählt. Man fand von unten nach oben: 210, 130, 74, 49, 18, 16 und 12 Teilchen. Bestimmen Sie daraus die Avogadrokonstante N_A. N_A hängt mit der Boltzmannkonstanten k_B und der Gaskonstanten R=8,31J/(mol·K) über $k_B = R/N_A$ zusammen. Nehmen Sie T=300K an.
Anleitung: Bilden Sie den Logarithmus der Gleichung (1) und gewinnen Sie den Faktor $-\frac{m^*g}{k_BT}$ aus linearer Regression mit den Daten. (Für die lineare Regression dürfen hier vorhandene Taschenrechnerfunktionen bzw. Tools von Plotprogrammen verwendet werden.) Fassen Sie das Experiment eigentlich als Messung von k_B auf und rechnen Sie mit dem als bekannt angenommenen R (ohne Fehler) daraus dann N_A aus.

Zusatz: Geben Sie auch den Fehler des aus diesem Experiment ermittelten N_A an. (Rechnung, d.h. hierfür auch erstmal die lineare Regression OHNE Computerprogramm, nur mit Grundrechenarten.)

Anmerkung: Es wird auch die Bezeichnung *Loschmidt-Zahl* verwendet. (Der feine Unterschied in der Definition von Avogadrokonstante und Loschmidt-Zahl kann z.B. in Wikipedia nachgesehen werden.)

Aufgabe 3 (T): Lineare Algebra (schriftlich - 6 Punkte)

a) Zeigen Sie für zwei beliebige Vektoren ϕ und ψ eines Hilbertraumes die

a) Schwarzsche Ungleichung : $|\langle\phi|\psi\rangle| \leq ||\phi||\,||\psi||$

b) Dreiecksungleichung : $||\phi+\psi|| \leq ||\phi|| + ||\psi||$

Die Norm $||.||$ ist die Standardnorm, definiert über das Skalarprodukt, d.h. $||\phi|| = \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle}$.

(2 Punkte)

b) Der adjungierte Operator $A^\dagger$ eines Operators A ist definiert durch $\langle A^\dagger x|y\rangle := \langle x|Ay\rangle$. Ein Operator A heisst selbstadjungiert oder *hermitesch*, wenn gilt $A = A^\dagger$.
Zeigen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell und die Eigenvektoren orthogonal sind.

(2 Punkte)

c) In Analogie zu den *Poisson-Klammern* in der Mechanik wird in der Quantenmechanik der Kommutator

$$[A, B] := AB - BA$$

zwischen zwei linearen Operatoren eingeführt.
Wenn A und B hermitesch sind, wann ist das Produkt AB auch hermitesch? Folgt aus $[A, B] = 0$ und $[B, C] = 0$ auch $[A, C] = 0$? (2 Punkte)

Aufgabe 4 (T): Diagonalisierung von Matrizen (schriftlich - 7 Punkte)

Wir wollen zeigen, dass sich normale Matrizen A durch eine Transformation $U^{-1}AU$ mit Hilfe einer unitären Matrix U diagonalisieren lassen.
Für eine *normale* Matrix gilt $A^\dagger A = AA^\dagger$, d.h. $[A^\dagger, A] = 0$. Eine *unitäre* Matrix ist definiert durch $A^{-1} = A^\dagger$.

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass eine hermitesche Matrix durch $U^{-1}AU$ mit $U^{-1} = U^\dagger$ diagonalisierbar ist. Gehen Sie wie folgt vor :

- Zeigen Sie, dass eine 2×2-Matrix A, die hermitesch ist, diagonalisierbar ist. Betrachten Sie dabei auch speziell den Fall, dass sie entartete Eigenwerte besitzt. (Sie können dies z.B. durch Aufstellen der unitären Matrix U zeigen.)
- Konstruieren Sie mit Hilfe eines Eigenwertes λ der $n \times n$-Matrix A eine $n \times n$-Matrix V so, dass

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

hermitesch und diagonalisierbar ist. Nehmen Sie dafür an, dass A' als $(n-1) \times (n-1)$-Matrix diagonalisierbar ist (vollständige Induktion).

- Zeigen Sie dann, dass für die Matrix $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V' \end{pmatrix}$ mit der diagonalen $(n-1) \times (n-1)$-Matrix $(V')^{-1}A'V'$ gilt : $(VW)^{-1}A(VM)$ ist diagonal, und dass VM unitär ist.

(5 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass sich jede Matrix A durch

$$A = B + iC$$

in zwei hermitesche Matrizen $B = \frac{1}{2}\left(A + A^\dagger\right)$ und $C = \frac{i}{2}\left(A^\dagger - A\right)$ zerlegen lässt.
Weisen Sie damit, einem Satz aus der Vorlesung und den Ergebnissen aus Teilaufgabe a) nach, dass sich eine normale Matrix unitär diagonalisieren lässt. (2 Punkte)

Aufgabe 5 (T): Parseval Gleichung (schriftlich - 7 Punkte)

Betrachten Sie zwei periodische Funktionen $f(x)$ und $g(x) \in L^2$ mit der Periode L, also $f(x+L) = f(x)$ $(\forall x \in \mathrm{R})$ und analog für $g(x)$.

a) Drücken Sie $f(x)$ und $g(x)$ als komplexe Fourierreihen mit den Koeffizienten α_n und β_n aus. Nutzen Sie diese Darstellungen, um die Gleichung

$$\frac{1}{L}\int_c^{c+L} \mathrm{d}x f(x) g^*(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \beta_n^*$$

nachzuweisen. Leiten Sie daraus die *Parsevalsche Gleichung* für komplexe und reelle Funktionen ab:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L}\int_c^{c+L} \mathrm{d}x |f(x)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 && \text{(für komplexe Funktionen)} \\ &= \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) && \text{(für reele Funktionen).} \end{aligned}$$

a_n und b_n sind die Koeffizienten der reellen Fourierreihe. (3 Punkte)

b) Finden Sie die Koeffizienten der Fourierreihe für die Funktion $f(x) = x^2$ in dem Intervall $-2 < x \leq 2$:

$$a_0 = \frac{8}{3}, a_n = 16\frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2}.$$

Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie der Funktion $f(x)$. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Parseval Gleichung und dem Ergebnis aus Teilaufgabe b), dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(2 Punkte)