UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2005

Übungsblatt 9, Ausgabe 15.06.2005, abzugeben bis 20.06. und 22.06.2005
Besprechung in den Übungen in der 11. Semesterwoche (22.-24.06.2005)

37. **2-Niveausystem II (Spinpolarisation)(6 Punkte)**

   a) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen (reinen) normierten Zustand $|\psi\rangle$ im zwei-dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}_2$ gilt

$$\langle\psi|\boldsymbol{\sigma}|\psi\rangle = \hat{\mathbf{r}}$$

   mit $\hat{\mathbf{r}}$ einem normierten Richtungsvektor $|\hat{\mathbf{r}}|^2 = 1$. $\boldsymbol{\sigma}$ ist der Vektor gebildet mit den Pauli Operatoren. Es gibt also zu jedem $|\psi\rangle$ eine Richtung $\hat{\mathbf{r}}$, so dass der Erwartungswert des Vektors $\boldsymbol{\sigma}$ in Richtung $\hat{\mathbf{r}}$ zeigt. (2 Punkte)

   b) Bei einer Messung an diesem Zustand wird die Wahrscheinlichkeit p bestimmt, den Eigenwert $+1$ von σ_z zu finden. Zeigen Sie, dass $p = \frac{1}{2}(1 + \hat{\mathbf{r}}_z)$ gilt. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, den Eigenwert $+1$ von σ_x zu messen? (2 Punkte)

   c) Ein gemischter Zustand führt zu dem Erwartungswert

$$\bar{\mathbf{r}} = \sum_i p(\vartheta_i, \varphi_i)\langle\psi_{\hat{\mathbf{r}}}|\boldsymbol{\sigma}|\psi_{\hat{\mathbf{r}}}\rangle$$

   wobei $p(\vartheta_i, \varphi_i)$ die Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Richtung $\hat{\mathbf{r}}(\vartheta_i, \varphi_i)$ angibt, und $|\psi_{\hat{\mathbf{r}}}\rangle$ der zugehörige reine Zustand ist. (In Teil a) wurde er ohne Index als $|\psi\rangle$ geschrieben.) Diskutieren Sie $|\bar{\mathbf{r}}|$. (2 Punkte)

38. **Messung und Wahrscheinlichkeiten (8 Punkte)**
An einem Zustand $|\psi >\in \mathcal{H}_2$ eines zwei-Niveau-Systems sollen nacheinander drei Messungen durchgeführt werden. (Hierzu kann z.B. ein Strahl identischer Teilchen, von denen jedes im Zustand $|\psi >$ vorliegt, nacheinander durch drei Messapparaturen, die wie (Polarisations-) Filter wirken, geschickt werden; mögliche Messapparate sind Stern-Gerlach Magneten.)

   a) Zuerst soll σ_z gemessen werden, danach σ_v und zuletzt σ_x. $\sigma_v = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}$ sei eine Linearkombination von σ_x und σ_z (mit $|\mathbf{v}| = 1$); die Richtung $\mathbf{v}$ liege also in der $x-z-$Ebene, und schließe den Winkel ϑ mit der $z-$Achse ein. Welche Werte λ_z, λ_v und λ_x können bei jeder der Messungen festgestellt werden? Betrachten Sie zuerst nur die Vereinfachung einer einzelnen σ_z-Messung. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten $p(\lambda_z)$ werden die verschiedenen Werte λ_z gemessen? (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit p, das Tripel von Werten λ_z, λ_v und λ_x zu messen, gegeben ist durch

$$p(\lambda_z, \lambda_v, \lambda_x) = < \psi | P_z(\lambda_z)\, P_v(\lambda_v)\, P_x(\lambda_x)\, P_v(\lambda_v)\, P_z(\lambda_z) | \psi >$$

wobei die Operatoren P Projektionsoperatoren auf die zugehörigen Eigenzustände sind. Wie erhält man aus diesem Ergebnis wiederum Fall a)? (2 Punkte)

c) Was sind die Wahrscheinlichkeiten, die λ_v zu messen unter der Bedingung, dass die Messung von σ_z den Wert + 1 ergab? (2 Punkte)

d) Wie lauten die Wahrscheinlichkeiten, die möglichen Werte λ_x zu messen unabhängig davon, welche Werte λ_z und λ_v zuvor gemessen wurden? Stimmt dieses Ergebnis überein mit den Wahrscheinlichkeiten, λ_x zu messen, wenn zuvor keine Messungen von λ_z und λ_v stattgefunden hätten? (2 Punkte)

e) Durch die Präparation des Zustandes $|\psi >$ sei nun erreicht worden, dass mit Sicherheit die letzte Messung σ_x den Wert $\lambda_x = 1$ ergibt. Wie lautet die zugehörige konditionelle Wahrscheinlichkeit für die Messungen der Werte λ_x, wenn auch $\lambda_z = +1$ bekannt ist?

(1 Punkt)

39. **Zusammengesetztes System (Spin-Addition)(6 Punkte)**
Ein quantenmechanisches System im Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei zusammengesetzt aus zwei 2-Niveau-Systemen, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2^{(A)} \otimes \mathcal{H}_2^{(B)}$. In den 2-Niveau-Systemen mit Hilberträumen $\mathcal{H}_2^{(A)}$ und $\mathcal{H}_2^{(B)}$ seien die Standard-Orthonormalbasen $\{|0^{(A)}\rangle, |1^{(A)}\rangle\}$ und $\{|0^{(B)}\rangle, |1^{(B)}\rangle\}$ bekannt, die jeweils die Operatoren $1^{(A)}$ und $\sigma_z^{(A)}$, beziehungsweise $1^{(B)}$ und $\sigma_z^{(B)}$ diagonalisieren.

a) Welche Dimension hat $\mathcal{H}$? Stellen Sie eine (einfache) ONB von $\mathcal{H}$ auf und geben Sie die Wirkung der drei Operatoren $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(A)} + \boldsymbol{\sigma}^{(B)}$ auf die Basisvektoren an. Welche der $\boldsymbol{\sigma}$ Operatoren sind diagonal in dieser Basis? Welche Eigenwerte besitzen sie, und welche Entartungsgrade? (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Wirkung der beiden Operatoren $\sigma_+ = \sigma_x + i\sigma_y$ und $\sigma_- = \sigma_x - i\sigma_y$ auf die Basisvektoren von $\mathcal{H}$ und berechnen Sie damit $\boldsymbol{\sigma}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$. Fassen Sie die Eigenzustände, die eine gemeinsame Eigenbasis zweier Operatoren bilden (welcher?) in zwei (unterschiedlich große)Untermengen zusammen. Welche Symmetrieeigenschaften haben die Zustände in den beiden Gruppen? (2 Punkte)

c) Das System im Hilbertraum $\mathcal{H}_2^{(A)}$ werde nun als quantenmechanisches Teilchen mit innerem Freiheitsgrad (Spin) interpretiert, der zwei Werte annehmen kann. Genauso das System $\mathcal{H}_2^{(B)}$. Zwischen beiden Teilchen wirke ein Potential, das von der relativen Spinorientierung abhängt

$$V = V_0 + V_1 \boldsymbol{\sigma}^{(A)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(B)}$$

Stellen Sie die beiden Schrödingergleichungen auf, die sich für die beiden Untergruppen von Eigenzuständen aus Teil b) ergeben. (2 Punkte)

40. **Getriebenes 2-Niveau-System (Spinresonanz)(7 Punkte, 1 Sonderpunkt)**
Ein Spin $\frac{1}{2}$-Teilchen befinde sich in einem zeitabhängigen äußeren Magnetfeld $\mathbf{B}(t) = (B_x(t), B_y(t), B_z)$. Das Magnetfeld bestehe aus einem konstanten Anteil $B_z = B_0$ in z-Richtung und einem rotierenden Feldanteil $\mathbf{B}_1(t)$ in der xy-Ebene, also $\mathbf{B}(t) = (B_1 \cos \omega t, B_1 \sin \omega t, B_0)$. Der Hamiltonoperator lautet $H(t) = -\gamma\, \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}$ mit dem Spinoperator $\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$, wobei die kartesischen Komponenten $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ in der Basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ durch die Pauli-Matrizen dargestellt werden (siehe Vorlesung, wo die Notation $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ verwendet wurde; γ misst die Stärke des magnetischen Moments).

a) Wie lautet der zeitabhängige Hamilton-Operator H in dieser Basis? (1 Punkt)

Hinweis: Das Ergebnis lautet

$$H = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}$$

b) Der zeitabhängige Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ für ein zeitabhängiges 2-Niveau-System läßt sich allgemein bzgl. der Basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ in der Form $|\psi(t)\rangle = c_+(t)|+\rangle + c_-(t)|-\rangle$ schreiben. Formulieren Sie die zeitabhängigen Bewegungsgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten $c_+(t)$ und $c_-(t)$. (1 Punkt)

c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System im Zustand $|\psi(0)\rangle \equiv |+\rangle$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $|c_-(t)|^2 \equiv |\langle -|\psi(t)\rangle|^2$, dass sich das System zum Zeitpunkt $t \geq 0$ im Zustand $|-\rangle$ befindet? Diskutieren Sie das Ergebnis.
Unter welcher Bedingung wird die Übergangswahrscheinlichkeit $|c_-(t)|^2$ groß und für welchen Wert von ω tritt eine sogenannte Resonanz auf? Wie lautet $|c_-(t)|^2$ genau an der Resonanzstelle?
Hinweis: Überführen Sie das Differentialgleichungssystem für $c_-(t)$ und $c_+(t)$ in eine Dgl. 2ter Ordnung für $c_-(t)$ und lösen diese mit dem Ansatz $c_-(t) = Ae^{i\lambda t}$. (3 Punkte)
Das Ergebnis lautet: $|c_-(t)|^2 = \frac{\omega_1^2}{(\omega_0+\omega)^2+\omega_1^2}\sin^2(\frac{t}{2}\sqrt{(\omega+\omega_0)^2+\omega_1^2})$

d) Eine Drehung um die Achse $\mathbf{n}$ (ein Einheitsvektor) mit dem Drehwinkel ϕ kann laut Vorlesung durch den unitären Operator $U \equiv e^{-\frac{i\phi}{2}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}$ dargestellt werden.
Gegeben sei für ein zeitabhängiges 2-Niveau-System der folgende Ansatz für den Zeitentwicklungsoperator

$$U(t) = e^{-\frac{i}{2}\sigma_z\omega t}\,\tilde{U}(t)$$

wobei der Faktor $e^{-\frac{i}{2}\sigma_z\omega t}$ (ein unitärer Operator) eine Drehung um die $\hat{\mathbf{z}}$-Achse beschreibt. (Was bedeutet dieser Ansatz physikalisch?) Formulieren Sie mit dem in Teil a) gefundenen Hamilton-Operator eine einfache Dgl. für $\tilde{U}(t)$ mit (operatorwertigen) konstanten Koeffizienten und lösen Sie diese. Berechnen Sie letztendlich nochmal die Übergangs-Wahrscheinlichkeit $|\langle -|\tilde{U}|+\rangle|^2$. (2 Punkte, 1 Sonderpunkt)
Hinweis: Verwenden Sie, dass $U(t)$ die zeitabhängige Schrödingergleichung erfüllt und bestimmen Sie daraus die Dgl. für $\tilde{U}(t)$, die lautet

$$i\hbar\,\partial_t\tilde{U}(t) = H_{eff}\,\tilde{U}(t)$$

wobei H_{eff} durch ein zeitunabhängiges Magnetfeld bestimmt wird.
Verwenden Sie dann die Zerlegung: $e^{-\frac{i}{2}\sigma_z\omega t} = \cos\frac{\omega t}{2}\,1 - i\sin\frac{\omega t}{2}\,\sigma_z$