UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2005

Übungsblatt 8, Ausgabe 08.06.2005, abzugeben bis 13.06. und 15.06.2005
Besprechung in den Übungen in der 10. Semesterwoche (15.-17.06.2005)

33. **Zwei–Zustandssystem (8 Punkte)**

Einem quantenmechanischen System sei ein 2-dimensionaler Hilbertraum zugeordnet. Ein solches Modell kann z.B. zur Beschreibung zweier Tunnelzustände eines Moleküls verwendet werden.
Bezüglich zweier orthonormierter Basiszustände $|n\rangle$ mit $n = 1$ oder 2 wird der Hamiltonoperator durch die 2×2-Matrix

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon & \delta \\ \delta^* & \epsilon \end{pmatrix}$$

dargestellt mit dem reellen Parameter ϵ und dem komplexwertigen Parameter δ.

a) Ist H hermitesch? (1 Punkt)

b) Wie lautet die zeitabhängige Schrödingergleichung für einen allgemeinen Zustand

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle$$

und welche Bedingung müssen $c_1(t)$ und $c_2(t)$ erfüllen? (1 Punkt)

c) Man gehe über zur zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung und bestimme die Energieeigenwerte.
Schließen Sie daraus auf die physikalische Bedeutung von $|\delta|$. (2 Punkte)

d) Man bestimme die zugehörigen orthonormierten Eigenvektoren $|I\rangle$ und $|II\rangle$. (1 Punkt)

e) Wie lautet die allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung?

(2 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung des allgemeinen Zustandes $|\psi(t)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = c_I(t)|I\rangle + c_{II}(t)|II\rangle$$

f) Man bestimme die zeitliche Entwicklung des Anfangszustandes

$$|\psi(t = 0)\rangle = |1\rangle \qquad .$$

(1 Punkt)

34. **Neutronen im Gravitationsfeld (8 Punkte)**

a) Als neutrale, massereiche Teilchen, fallen Neutronen im Gravitationsfeld wie schon die klassische Mechanik voraussagt. Argumentieren Sie quantenmechanisch, dass ein horizontal weggeschossenes Neutron einer Parabel folgt. (2 Punkte)

Hinweis: Denken Sie zurück an die Optik und die Behandlung der Brechung in der geometrischen, bzw. der Wellenoptik.

b) Im Folgenden wollen wir behandeln, ob man räumliche Quantensprünge auch direkt beobachten kann. Dazu schätzen Sie zunächst einmal ab, welche Quantensprünge ein klassisches Pendel ausführen würde. Das Pendel habe die Länge $\ell = 10$ cm und eine Masse $m = 1$ g. Wir betrachten dann den Extremfall, dass das Pendel nur einen einzigen Sprung ausführen kann, d.h. dass die Länge des Pendels gleich der Sprunghöhe ist. Wie hängt die mögliche Sprunghöhe dann von der Masse des Teilchens ab und ab welcher Masse ist zu erwarten, dass diese Sprünge zu beobachten sind (sie also in der Grössenordnung von 10 μm sind)? (2 Punkte)

Hinweis: Denken Sie daran, dass die Energiequantelung mit $E = \hbar\omega$ geht.

c) Ein Experiment um solche Quantensprünge zu sehen kann man mit (ultrakalten) Neutronen, die in einer Flasche mit perfekt verspiegelten Wänden gefangen sind. Um das Problem richtig zu behandeln, muss man natürlich die Schrödingergleichung mit dem Gravitationspotential lösen. Wir setzen uns in die vertikale Dimension und behandeln das System eindimensional. Mit einem totalreflektierenden Boden wird das Potential:

$$V(x) = \begin{cases} mgx & x \geq 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

Die Gleichung lässt sich im Impulsraum viel einfacher lösen, beachten Sie dabei die Darstellung des Ortsoperators im Impulsraum, $\hat{x} = i\hbar\partial_p$. (2 Punkte)

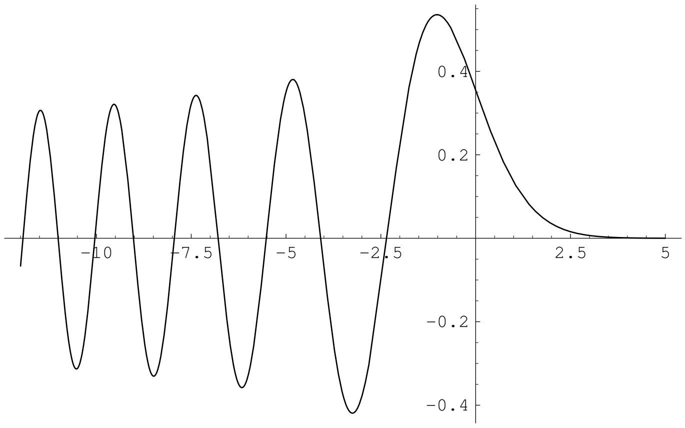
d) Um zurück zur Lösung im Ortsraum zu kommen müssen wir die gefundene Lösung noch Fourier-Transformieren. Mit Hilfe der Airy-Funktion

$$Ai[\omega] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau + \frac{1}{3}\tau^3)$$

(beachten Sie auch die Abbildung), erhält man für die Wellenfunktion schlussendlich:

$$\Psi(x) = \left(\frac{2m^2 g}{\hbar^2}\right)^{1/3} \mathrm{Ai}\left[\left(\frac{2}{\hbar^2 m g^2}\right)^{1/3}(mgx - E)\right].$$

Zeigen Sie die Schritte dieser Fourier-Transformation. (1 Punkt)



e) Wie beim unendlichen Potentialtopf, muss die Wellenfunktion am Boden (bei $x = 0$) verschwinden. Welche Folgen ergeben sich daraus für die Energien des Neutrons? Die erste Nullstelle der Airy-Funktion befindet sich bei ω = -2.338 was ergibt sich daraus für die Energie des Grundzustandes? Aus der Abbildung lässt sich ferner herauslesen, dass das erste Maximum der Wellenfunktion bei ω = -1 liegt. Wo befindet sich das Neutron also mit grösster Wahrscheinlichkeit? Vergleichen Sie beides mit unserer ersten, überaus naiven Abschätzung. (1 Punkt)

35. **Landau–Niveaus (10,5 Punkte)**
Der Hamiltonoperator für ein geladenes Teilchen in einem magnetischen Feld ist $H = (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2/2m$, wobei $\mathbf{A}$ das Vektorpotential ist. Nehmen Sie an, dass das magnetische Feld konstant in Richtung und Stärke ist.

a) Zeigen Sie, dass ein mögliches Vektorpotential für ein solches Feld $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$ ist. Zeigen Sie auch, dass $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. (1 Punkt)

b) Nehmen Sie an, dass das magnetische Feld in z-Richtung zeigt und dass der Teilchenimpuls in diese Richtung Null ist. Zeigen Sie, dass der Hamiltonian in der Form

$$H = \frac{{p_x}^2}{2m} + \frac{{p_y}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 - \omega L_z \tag{1}$$

geschrieben werden kann, wobei $L_z = xp_y - yp_x$ der Operator für die z-Komponente des Drehimpulses und $\omega = qB_z/2m$ ist. (1,5 Punkte)

c) Definieren Sie Vernichtungsoperatoren a_x und a_y analog zu dem des harmonischen Oszillators:

$$a_x = \frac{m\omega x + ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad a_y = \frac{m\omega y + ip_y}{\sqrt{2m\hbar\omega}}. \tag{2}$$

so, dass $[a_x, a_x^\dagger] = [a_y, a_y^\dagger] = 1$ und $[a_x, a_y^\dagger] = [a_x, a_y] = 0$ gilt. Zeigen Sie dass der Hamiltonian

$$H = \hbar\omega[a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1 + i(a_x^\dagger a_y - a_y^\dagger a_x)] \tag{3}$$

ist. (1,5 Punkte)

d) Definieren Sie $b = (a_x + ia_y)/\sqrt{2}$ und zeigen Sie

i. $H = 2\hbar\omega(b^\dagger b + 1/2)$
ii. $[b, b^\dagger] = 1$
iii. $[b, H] = 2\hbar\omega b, \quad [b^\dagger, H] = -2\hbar\omega b^\dagger$

(1,5 Punkte)

e) Lösen Sie jetzt analog zum harmonischen Oszillator das Eigenwertproblem $H|\phi\rangle = E|\phi\rangle$. Nehmen Sie dafür an, dass es einen kleinsten Eigenwert gibt und zeigen Sie, dass er $\hbar\omega$ ist. Zeigen Sie auch, dass der dazugehörige Eigenvektor $b|\phi_0\rangle = 0$ erfüllt. Zeigen Sie, dass die verbleibenden, normierten Eigenvektoren und Eigenwerte durch

$$|\phi_n\rangle = (b^\dagger)^n|\phi_0\rangle/\sqrt{n!} \tag{4}$$
$$E_n = \hbar\omega_L(n + 1/2) \tag{5}$$

gegeben sind, wobei $\omega_L = 2\ \omega$ die Lamorfrequenz ist. (2 Punkte)

f) $|u_0\rangle$ und $|v_0\rangle$ seien die eindeutigen Lösungen von $a_x|u_0\rangle = 0$ beziehungsweise $a_y|v_0\rangle = 0$ (in IK IV wurde im Kapitel des harmonischen Oszillators gezeigt, dass diese in der Ortsdarstellung Gaußfunktionen sind). Zeigen Sie, dass $\phi_0(x, y) = u_0(x)v_0(y)$ ein Grundzustand des Systems ist.

Dieser Grundzustand ist nicht der einzige. Um das einzusehen, definieren Sie den Operator $d = (a_x - ia_y)/\sqrt{2}$ und zeigen Sie, dass $[b, d] = 0$, $[b, d^\dagger] = 0$ und $[d, d^\dagger] = 1$ gilt. Definieren Sie nun

$$\phi_0^{(m)} = (d^\dagger)^m \phi_0/\sqrt{m!} \tag{6}$$

und zeigen Sie, dass auch diese Grundzustände sind. Daraus folgt, dass alle Zustände unendlichfach entartet sind. (2 Punkte)

36. **Zerlegung des Impulsoperators (7 Punkte)**
In der Ortsdarstellung lautet der Impulsoperator (in einer Dimension) $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ und ist definiert auf dem Raum der differenzierbaren Funktionen $\psi(x)$ für $a \leq x \leq b$. Seine Eigenwertgleichung lautet

$$\hat{p}\;\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = p\;\psi(x)$$

a) Zeigen Sie mit dem Skalarprodukt $(\psi,\;\psi)$ aus §3.1.5.2 der Vorlesung, dass
   i. $\hat{p}$ nicht hermitesch ist
   ii. die Eigenwerte $p \in \mathbb{C}$ sind

   falls keine Randbedingungen an die $\psi(x)$ gestellt werden. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass mit den Randbedingungen $a \to -\infty,\; b \to \infty$ und $|\psi(|x| \to \infty)| \to M < \infty$ der Operator $\hat{p}$ hermitesch wird und nur reelle Eigenwerte besitzt.
   Hinweis: Betrachten Sie $(\psi, \hat{p}\psi)$. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass mit den Randbedingungen, $a \to -\infty,\; b \to \infty$, und $\psi(x)$ sei quadratintegrabel, $\hat{p}$ hermitesch wird aber keine normierbaren Eigenfunktionen und Eigenwerte besitzt. (1 Punkt)

d) Zeigen Sie, dass mit den Randbedingungen $a \to 0,\; b \to L$ und $\psi(0) = \psi(L) = 0$ der Operator $\hat{p}$ hermitesch wird aber keine Eigenfunktionen besitzt. (1 Punkt)

e) Zeigen Sie, dass mit den Randbedingungen $a \to 0,\; b \to L$ und $\alpha\psi(0) = \psi(L)$ mit $|\alpha| = 1$ der Operator $\hat{p}$ hermitesch wird und seine Eigenfunktionen eine Orthonormalbasis bilden.
   Hinweis: Zeigen Sie also, dass mit diesen Randbedingungen an ψ folgende Gleichung $(\hat{p}^+\varphi, \psi) = (\varphi, \hat{p}\psi)$ gilt, wenn $\hat{p}^+ = p$ und φ dieselben Randbedingungen wie ψ erfüllt.
   War eine vergleichbare Einschränkung an φ im Fall d) notwendig? (1 Punkt)

f) Betrachten Sie für den Fall c), wo $\hat{p}$ selbstadjungiert ist, aber keine normierbaren Eigenzustände besitzt, den Operator $E(p)$, der im Hilbertraum $\mathcal{H}$ der Quantenzustände definiert ist in Ortsdarstellung durch

$$\varphi(x) = \left(E(p)\,\psi\right)(x) = \int_{-\infty}^{p}\frac{dp'}{2\pi\hbar}\;\langle x|p'\rangle\;\langle p'|\psi\rangle \qquad \text{wobei } \langle p|\psi\rangle = \int dx \langle x|p\rangle^*\;\psi(x)$$

   mit der (beliebigen) Wellenfunktion $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ und den speziellen Wellenfunktionen $\psi_p(x) = \langle x|p\rangle$, die in Teil c) die Eigenwertgleichung erfüllten (und zur Konvention auf $\psi_p(0) = 1$ normiert seien).
   Zeigen Sie, dass für ein quadratintegrables $\psi(x)$ auch $\varphi = E(p)\psi$ normierbar ist und dass $E(p)$ eine Zerlegung der Eins liefert: $1 = E(p \to \infty)$.
   Zeigen Sie analog, dass der Operator $\hat{P}(p)$ definiert in Ortsdarstellung durch

$$\chi(x) = \left(\hat{P}(p)\,\psi\right)(x) = \int_{-\infty}^{p}\frac{dp'}{2\pi\hbar}\,p'\;\langle x|p'\rangle\;\langle p'|\psi\rangle$$

   eine Zerlegung des Impulsoperators liefert: $\hat{p} = \hat{P}(p \to \infty)$
   Wie lauten $E(p)$ und $\hat{P}(p)$ im Fall d)? (2 Punkte)