UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2005

Übungsblatt 7, Ausgabe 01.06.2005, abzugeben bis 06.06. und 08.06.2005
Besprechung in den Übungen in der 9. Semesterwoche (08.-10.06.2005)

29. **Harmonischer Oszillator I (10 Punkte)**
Für den harmonischen Oszillator gegeben durch

$$H = \hbar\omega(a^+ a + \frac{1}{2})$$

mit

$$[a, a^+] = 1$$

und der aus der Vorlesung bekannten orthonormierten Basis von Eigenzuständen $|n>$ zu den Eigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$, zeigen oder berechnen Sie:

a) $a \mid n\rangle$; $a^+ \mid n\rangle$; $\langle n \mid a$; $\langle n \mid a^+$.

$$\mid n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n \mid 0\rangle$$

(2 Punkte)

b) Man finde die allgemeinste Lineare Transformation $a = \alpha x + \beta p$, so dass x und p als Orts- und Impulsoperatoren die kanonische Vertauschungsrelation $[x, p] = i\hbar$ erfüllen. Wie lässt sich weiter erreichen, dass $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$ wird? (2 Punkte)

c) Der harmonische Oszillator befinde sich im Zustand

$$\mid \psi\rangle = N\{\mid 1\rangle + \sqrt{2} \mid 2\rangle + \sqrt{6} \mid 3\rangle\}$$

mit den Eigenzuständen $\mid n\rangle$ zur Energie $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$.

i. Berechnen Sie die Normierungskonstante N. (1 Punkt)

ii. Wie entwickelt sich $|\psi\rangle$ zeitlich? (1 Punkt)

iii. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit $p_n(t)$ im Zustand $|\psi\rangle$ die Energie E_n zu messen? Und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $p(t)$, dass jede Einzelmessung der Energie zu Zeiten $t > 0$ ein Ergebnis liefert, das größer ist als $2\hbar\omega$?(2 Punkte)

d) Wie lautet der Erwartungswert des Ortsoperators x im Zustand $|\psi\rangle$ für $t > 0$?

(2 Punkte)

30. **Gebundene Zustände im doppelten δ-Potential (6 Punkte)**
Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen das Potential

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2\,m} U_0 \big(\delta(x+a) + \delta(x-a)\big) \tag{1}$$

gebundene Zustände hat.

a) Setzen Sie für die Wellenfunktion der Eigenzustände sowohl eine gerade als auch eine ungerade Funktion in x an und leiten Sie aus den Ansetzbedingungen bei $x = \pm a$ die Eigenwertgleichungen

$$\kappa_+ \big(1 + \tanh(\kappa_+ a)\big) = -U_0 \qquad \text{gerade Zustände} \tag{2a}$$

$$\kappa_- \big(1 + \coth(\kappa_- a)\big) = -U_0 \qquad \text{ungerade Zustände} \tag{2b}$$

ab, wobei $\kappa_\pm = \sqrt{-2\,m\,E_\pm}/\hbar$ und $E_\pm < 0$ die Energieeigenwerte der geraden bzw. ungeraden Zustände sind. (1 Punkt)

b) Plotten Sie die linken Seiten der Eigenwertgleichungen als Funktionen von $\kappa_\pm\, a$ und geben Sie die notwendigen Bedingungen an das Potential für die Existenz von Eigenwerten in beiden Fällen an. Wieviele Eigenwerte sind möglich? (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, daß $\kappa_+ > \kappa_-$ und damit $E_+ < E_-$. Wie läßt sich dies mit der Symmetrie der Wellenfunktion begründen? (1 Punkt)

d) Untersuchen Sie den Grenzfall $a \to \infty$, indem Sie hyperbolischen Funktionen nach $\exp(-\kappa_\pm\, a)$ entwickeln und die Eigenwertgleichungen mit der niedrigsten Näherung lösen. Überlegen Sie sich qualitativ die Gestalt der Eigenfunktionen in diesem Grenzfall. (1 Punkt)
Hinweis:
Lösen Sie die Eigenwertgleichungen zunächst ohne Korrekturterme $\exp(-\kappa_\pm\, a)$, dann mit Korrekturtermen, wobei in diesen $\kappa_\pm$ durch die zuvor gefundene Lösung (0. Ordnung) für $\kappa_\pm$ zu ersetzen ist.

e) Was ergibt sich für die Eigenwerte im Grenzfall $a \to 0$? Wie verhalten sich hier die Eigenfunktionen? Diskutieren Sie graphisch die qualitative Veränderung des Energieniveaus des niedrigsten gebundenen Zustandes, wenn ein repulsives Potential $V^{rep}(a) \approx \frac{\hbar^2}{2m}\frac{U_0^2}{4} e^{\frac{u}{2a}} (u > 0)$ zwischen den Delta-Funktionen hinzutritt? (2 Punkte)

31. **Harmonischer Oszillator II (10 Punkte)**
Mit der für den harmonischen Oszillator aus der Vorlesung bekannten orthonormierten Basis der Eigenzustände $\mid n\rangle$, mit $n = 0, 1, 2, \ldots$, des Hamiltonoperators $H = \hbar\omega(a^+ a + \frac{1}{2})$ zu den Eigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, sollen die folgenden Größen berechnet werden:

a) Berechnen Sie die Matrizen:$\langle n' \mid \hat{x} \mid n\rangle$ und $\langle n' \mid \hat{p} \mid n\rangle$ mit den Orts- $\hat{x}$ und Impuls- $\hat{p}$ Operatoren. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie $\langle n' \mid x^2 \mid n\rangle$ und $\langle n' \mid p^2 \mid n\rangle$ und zeigen Sie, dass $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$ diagonal ist. (2 Punkte)

c) Lösen Sie mit Teilaufgabe b) folgendes Paradoxon:

i. Zeigen Sie für 2 beliebige endlich dimensionale Matrizen A und B, dass Spur $[A, B] = 0$ gilt, wobei Spur $A = \sum_i A_{ii}$.

ii. Aus der Spurbildung angewendet auf den Orts-Impuls-Kommutator in Matrixdarstellung

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

müsste nach Punkt (i) also in naiver Betrachtung $\hbar = 0$ folgen. Berechnen Sie $\hat{x}\hat{p}$ und $\hat{p}\hat{x}$ mit den unendlichen dimensionalen Matrizen aus b) um zu erkären, weswegen die Folgerung $\hbar = 0$ nicht gilt. (2 Punkte)

d) (Diese Teilaufgabe ist unabhängig vom ersten Teil lösbar.) Betrachten Sie die sogenannten kohärenten Zustände, die mit einer komplexen Konstanten $\alpha = re^{i\delta}$ gebildet werden können

$$\mid \psi\rangle = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \alpha^n \mid n\rangle$$

i. Zeigen Sie, dass $|\psi\rangle$ Eigenfunktion zum Absteigeoperator a ist. (Vermuten Sie, dass a^+ Eigenfunktionen besitzt?)

ii. Welches C normiert $\mid \psi\rangle$ auf 1? Mit diesem C kann $|\psi\rangle$ geschrieben werden als $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$. Welche bekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt $p_n = |c_n|^2$?

iii. Wie lautet der zeitabhängige Zustand $\mid \psi(t)\rangle$, wenn $\mid \psi(t=0)\rangle = \mid \psi\rangle$ sei? *Hinweis:* Argumentieren Sie mit der zeitabhängigen Schrödingergleichung.

iv. Berechnen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert für den Ort

$$x(t) = \langle \psi(t) \mid x \mid \psi(t)\rangle.$$

v. Berechnen Sie die Unschärfe $\Delta x^2(t) = \langle \psi(t)|(x - x(t))^2|\psi(t)\rangle$ und (das analog definierte) $\Delta p^2(t)$ und zeigen Sie damit, dass $|\psi\rangle$ ein sogenanntes Minimalpaket ist, d.h.

$$\Delta x(t) \Delta p(t) = \frac{\hbar}{2},$$

welches zeitlich nicht auseinander läuft. (5 Punkte)

32. **Orthonormalbasis (8 Punkte)**
Es soll gezeigt werden, dass die Eigenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators $\psi_n(x)$ (für $n = 0, 1, 2, \ldots$ mit $\psi_n(x) = c_n\, H_n(x/\lambda) e^{-x^2/2\lambda^2}$, wobei $\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, c_n = (2^n n! \sqrt{\pi}\lambda)^{-\frac{1}{2}}$ ein vollständiges orthonormiertes Basissystem (kurz ONB) im Raum der quadrat-integrablen Wellenfunktionen $\psi(x)$ (also $\int dx |\psi(x)|^2 < \infty$) bilden, d.h. dass es für jedes ψ Konstanten C_n gibt, so dass die Partialsummen

$$\Psi_N = \sum_{n=0}^{N} C_n \psi_n \tag{3}$$

"im Mittel" gegen ψ konvergieren, also

$$\lim_{N \to \infty} \int dx |\psi(x) - \Psi_N(x)|^2 = 0 \tag{4}$$

(siehe "Mathematics of Classical and Quantum Physics", Byron & Fuller; im Semesterapparat)

a) Zeigen Sie durch Verwendung der Eigenwertgleichungen $N\psi_n = n\psi_n$, dass Eigenfunktionen ψ_n zu unterschiedlichen Eigenwerten n' und n'' orthogonal sind.
Hinweis: Verwenden Sie, dass N hermitesch ist. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass gilt:

i. Der Fehler

$$\delta_N = \int dx |\psi(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \psi_n(x)|^2 \geq 0$$

wird minimal mit der Wahl

$$a_n = C_n = \int dx \psi_n^*(x)\psi = (\psi_n, \psi)$$

ii. Und es gilt dann Bessels Ungleichung

$$(\psi, \psi) \geq \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2$$

iii. Speziell, wenn die $\{\psi_n\}$ eine ONB bilden, gilt:

$$(\psi, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(\psi_n, \psi)|^2 \tag{5}$$

woraus durch Betrachtung von $\psi = \chi + \zeta$ und von χ, ζ einzeln und Differenzenbildung die Parseval-Beziehung folgt

$$(\chi, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\chi, \psi_n)(\psi_n, \zeta) \tag{6}$$

Hinweis: Siehe Aufgabenblatt 0 von IK III und IK IV. (3 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Menge der Funktionen $\{\psi_n\}$ eine ONB sind, dann wenn keine quadratintegrable Funktion ψ existiert, die $\psi \not\equiv 0$ ist und trotzdem "senkrecht" auf allen ψ_n ist, d.h. $(\psi_n, \psi) = 0$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass mit einer ONB die Koeffizienten C_n aus Gleichung (3) $C_n = 0$ erfüllen und Gleichung (4) zu einem Widerspruch der Annahme $\psi \not\equiv 0$ führt. Leiten Sie dann die Annahme, die $\{\psi_n\}$ seien keine ONB, zu einem Widerspruch für den Fall, dass nur die Nullfunktion $(\psi_n, \psi) = 0$ erfüllt. (2 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte von $\psi(x)e^{-x^2/2\lambda^2}$ verschwindet, wenn $(\chi_n, \psi) = 0$ gilt für alle Funktionen $\chi_n = (x/\lambda)^n e^{-x^2/2\lambda^2}$.
Folgern Sie hieraus, dass die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillatorseine ONB im Raum der quadratintegrablen ψ bilden (1 Punkt)