UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2005

Übungsblatt 6, Ausgabe 25.05.2005, abzugeben bis 30.05. und 1.6.2005
Besprechung in den Übungen in der 8. Semesterwoche (1.-3.06.2005)

25. **Rechteckige Potentialschwelle** (7 Punkte)

An einem Rechteck-Potential $V(x) = V_0[\Theta(x+a) - \Theta(x-a)]$ wird ein von links kommendes Teilchen gestreut.

a) Begründen Sie, dass seine Wellenfunktion wie folgt geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \psi_I(x) &= e^{ikx} + Re^{-ikx} && (x < -a) \\ \psi_{II}(x) &= Ae^{ik'x} + Be^{-ik'x} && (-a < x < a) \\ \psi_{III}(x) &= Te^{ikx} && (x > a) \end{aligned}$$

wobei $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $k' = \sqrt{2m(E-V_0)}/\hbar$ und E die Teilchenenergie ist. (1 Punkt)

b) Bestimmen Sie die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten $|T|^2$ und $|R|^2$ aus den Stetigkeitsbedingungen für die Wellenfunktion. Zeigen Sie, dass $|T|^2$ ausgedrückt werden kann durch

$$|T|^2 = \frac{4k^2k'^2}{4k^2k'^2 + (k^2 - k'^2)^2 \sin^2(2k'a)}.$$

Rechnen Sie explizit nach, dass $|T|^2 + |R|^2 = 1$ gilt. (2 Punkte)

c) Drücken Sie den Transmissionskoeffizienten $|T|^2$ als Funktion von $u = E/V_0$ aus. Sei $u < 1$. Zeigen Sie, dass dann $|T|^2 < 1$. Betrachten Sie nun den Fall $u > 1$. Gegen welchen Grenzwert geht $|T|^2$ für große Energien E? Plotten Sie den Verlauf von $|T(u)|^2$ für einen geeignet gewähltes $\alpha = \sqrt{\frac{8mV_0a^2}{\hbar^2}}$ und vergleichen Sie das Resultat mit dem Verhalten eines klassischen Teilchens. (2 Punkte)

d) Sei nun $E > V_0$ festgehalten. Wie verhält sich $|T|^2$, wenn man die Breite der Potentialschwelle $2a$ verändert? Für welche a wird $|T|^2$ maximal, wie groß ist es? Beantworten Sie dieselben Fragen für $|R|^2$ und interpretieren Sie diese Ergebnisse. Skizzieren Sie den Verlauf von $|T|^2$ als Funktion von a. (2 Punkte)

26. **Zerfall eines instabilen Systems (7 Punkte)**
Wie in Aufgabe 23 betrachten wir das Potential

$$V(x) = \begin{cases} V_0\,\delta(x+L) & x < 0 \\ \infty & x \geq 0 \end{cases}$$

als Modell für ein instabiles System. Zur Zeit $t = 0$ sei ein Teilchen im Bereich $-L < x < 0$ lokalisiert, das für $t > 0$ in den Berich $x < -L$ entweiche (Zerfall des instabilen Zustandes). Im Folgenden studieren wir die Form der auslaufenden Wellenfunktion ψ_{aus}. Aus Aufgabe 23 ist bekannt, dass ψ_{aus} die Form

$$\begin{aligned} \psi_{aus} &= \int dk\, a(k) e^{i(-kx-\omega(k)t)} e^{-2i\theta(k)} && (1) \\ \text{mit} \quad R &= e^{-2ikL} \frac{1 - i\left(\frac{\alpha}{kL} + \cot(kL)\right)}{1 + i\left(\frac{\alpha}{kL} + \cot(kL)\right)} = e^{-2i\theta(k)} && (2) \end{aligned}$$

besitzt, wobei $\alpha = \frac{2mV_0L}{\hbar^2}$. Wir betrachten den Fall grosser V_0 in dem (Aufgabe 23.d) scharfe Resonanzen bei $kL = n\pi$ mit $n \in I\!N$ auftreten. Der grösste Beitrag zu ψ_{aus} komme von der Resonanz mit $n = 1$, weil $|a(k)|$ mit $k = n\pi/L$ für $n = 1$ am grössten sei. Um ψ_{aus} zu berechnen, soll also nur die Resonanz mit $n = 1$ berücksichtigt werden.

a) Zeigen Sie zunächst, dass R in der Nähe der Resonanz bei $k = \pi/L$ als

$$R = \frac{1}{-1 - 2i\frac{\alpha}{\pi}(kL - \pi)^2}$$

genähert werden kann. (2 Punkte)

b) Um ψ_{aus} zu berechnen, nehmen wir an, dass $a(k)$ in (1) durch seinen Wert $a(\frac{\pi}{L})$bei der (scharfen) Resonanz genähert werden kann. Dann kann der Residuensatz benutzt werden. Welcher der beiden Pole des Integranden führt auf eine physikalische Lösung? Begründen Sie Ihre Wahl! (3 Punkte)
Hinweis: Schreiben Sie $e^{i(-kx-\omega(k)t)}$ um als $e^{-ik(x+v_Gt)-i\omega(z')t+iv_Gz't}$, wobei z' der Realteil der Polstelle z und v_G die Gruppengeschwindigkeit bei $k = z'$ ist. ψ_{aus} kann nur von Null verschieden sein, wenn $x + v_Gt > 0$ gilt, und es muss gelten $\psi_{aus} \to 0$ für $t \to \infty$.

c) Zeigen Sie, dass die Breite der Resonanz in k und der Abfall von ψ_{aus} mit x mit der Heisenberg'schen Unschärferelation vereinbar sind. Überlegen Sie sich dies auch für die Breite der Resonanz in der Energie E und dem Abfall von ψ_{aus} mit t. (2 Punkte)

27. **Elektronen in einem periodischen Potential (7 Punkte)**

Um das Verhalten von Leitungselektronen in kristallinen Metallen oder Halbleitern zu beschreiben, geht man von der Vorstellung aus, dass die Elektronen sich in einem durch die Atomrümpfe gebildeten periodischen Potential bewegen.

Hier betrachten wir das einfache Problem von Teilchen in einem eindimensionalen periodischen Potential der Form

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} U_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - na), \quad \text{wobei} \quad U_0 > 0.$$

Diese Art von Potential ist zwar nicht realistisch, dafür läßt sich das Problem exakt lösen und wesentliche Eigenschaften von Teilchen in periodischen Potentialen können daran diskutiert werden.

a) Formulieren Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für das Problem. Für die Wellenfunktion $\psi(x)$ im Intervall $(n-1)a < x < na$ soll der Lösungsansatz

$$\psi(x) = A_n\, e^{ik(x-na)} + B_n\, e^{-ik(x-na)}$$

gemacht werden. Mit Hilfe der in Aufgabe 34 diskutierten Anschlussbedingungen für die ψ-Funktion bei δ-Potentialen berechne man die Transfermatrix M,

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix}$$

welche die Amplituden A_n und B_n in benachbarten Periodizitätsintervallen ineinander überführt. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_\pm$ der Matrix M. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass $\lambda_\pm = e^{\pm iqa}$ gilt und daraus für Eigenfunktionen die Beziehung $|\psi(x)|^2 = |\psi(x+a)|^2$ folgt.
Hinweis: Was geschähe für den Fall $|\lambda_\pm| \neq 1$?
Die Wellenzahl q bezeichnet man als "Blochvektor" (hier im 1-dimensionalen Fall) und die zugehörigen Eigenfunktionen als Blochfunktionen $\psi_q(x)$ mit $\psi_q(x+a) = e^{iqa}\psi_q(x)$.
Leiten Sie dabei die in der Vorlesung angegebene Bestimmungsgleichung für die Bandenergien

$$\cos qa = \cos ka + \alpha \sin ka, \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{U_0}{2k}$$

ab. Dabei sind die Bandenergien gegeben durch $E(q) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (3 Punkte)

28. Potentialtopf (9 Punkte)

a) Zeigen Sie zunächst für ein allgemeines reelles Potential, dass die Lösungen $\psi_n(x)$ stets reell gewählt werden können.
Beweisen Sie ferner für ein symmetrisches Potential mit $V(x) = V(-x)$:
Wenn $\psi_n(x)$ ein nicht-entarteter Eigenzustand zum Eigenwert E_n ist, so ist die Wellenfunktion von $\psi_n(x)$ entweder gerade oder ungerade, d.h. sie hat gerade oder ungerade Parität. (1 Punkt)

b) Der ebene Potentialtopf der Breite $2a$ und Tiefe V_0 ist gegeben durch

$$V(x) = -V_0\, \theta(a - |x|).$$

Geben Sie die allgemeinen Lösungen der zugehörigen Schrödinger-Gleichung für $-V_0 < E < 0$ in reeller Form an. Lösen Sie das Eigenwertproblem graphisch.
(3 Punkte)

c) Sind die Lösungen entartet? Besitzen sie eine definierte Parität? Wieviele Lösungen gibt es mindestens? Diskutieren Sie, wie die Anzahl der Nullstellen der einzelnen Lösungen mit ihrer Lage im Energiespektrum zusammen hängt. (2 Punkte)

d) Betrachten Sie den Limes eines Potentialtopfes mit unendlich hohen Wänden, also $V_0 \to \infty$, wobei $0 < E + V_0 < \infty$ sein soll. Bestimmen Sie nun ebenfalls die Lösungen.
(1 Punkt)

e) Gehen Sie nun zu Energien $E > 0$ im Falle des Potentialtopfes *endlicher* Tiefe über. Zeigen Sie, daß für den über Amplituden definierten Transmissionskoeffizienten folgende Beziehung gilt:

$$T(E) = \frac{\exp(-2ika)}{\cos(2qa) - (i/2)((q/k) + (k/q))\sin(2qa))}$$

Hierbei seien $q = q(E)$ bzw. $k = k(E)$ die Wellenzahlen für $|x| < a$ bzw. $|x| > a$. Für welche Werte q wird die Transmission maximal (Resonanzen)? (2 Punkte)