UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2005

Übungsblatt 5, Ausgabe 18.05.2005, abzugeben bis 23. und 25.05.2005
Besprechung in den Übungen in der 7. Semesterwoche (25.-28.05.2005)

21. **Deltapotential (4 Punkte)**
Betrachten Sie die Lösungen der stationären Schrödingergleichung in einer Dimension

$$(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x))\psi(x) = E\psi(x)$$

in einem deltaförmigen Potential $V(x) = V_0\delta(x)$ mit $V_0 = \frac{\hbar^2}{2m}k_0$.

a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion zwar überall als stetig angenommen werden kann, ihre erste Ableitung an der Stelle $x = 0$ jedoch einen Sprung hat:

$$\psi'(0+) - \psi'(0-) = k_0\psi(0)$$

Hinweis: Integrieren Sie die Schrödingergleichung über x von $-\epsilon$ bis ϵ (mit $\epsilon > 0$) und betrachten Sie den Limes $\epsilon \to 0$. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass es zu jedem $V_0 < 0$ nur einen gebundenen Zustand (mit Energie $E < 0$) gibt und finden Sie die dazugehörige Energie und die normierte Wellenfunktion. Diskutieren Sie die Unschärferelation für Ort und Impuls. (2 Punkte)

22. **Quantenmechanisches Tunneln im Zwei-Zustandssystem ("das Ammoniak-Molekül") (10 Punkte)**
Das Deltapotential von Aufgabe 21 (mit $k_0 > 0$) sitze nun in der Mitte eines unendlich tiefen Potentialtopfs der Breite $2a$. Als Lösung der Schrödingergleichnung ergeben sich Zustände zweierlei Art. Einerseits sind die Wellenfunktion in der rechten und der linken Hälfte entgegengesetzt gleich - dies sind die ungeraden Zustände - andererseits ist die Wellenfunktion rechts und links gleich - dies sind die geraden Zustände.

a) Geben Sie die Energien der ungeraden Zustände an (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Gleichung für die Energien der geraden Zustände (2 Punkte)

c) Lösen Sie diese Gleichung graphisch in den beiden Grenzfällen $k_0 a \ll 1$ und $k_0 a \gg 1$ also einerseits für ein tiefes bzw. ein hohes Potential in der Mitte und diskutieren Sie physikalisch den Unterschied in der zugehörigen Wellenfunktion. (2 Punkte)

Im Fall dass $k_0 a \gg 1$ ergibt sich, dass die Energie der geraden Zustände beinahe gleich ist wie die der ungeraden Zustände. Das System ist also beinahe entartet und hat Paare von energetisch eng benachbarten Zuständen (je ein gerader und ein ungerader), die viel größere Energieabstände zu den anderen Paaren aufweisen. In diesem Grenzfall kann genähert werden, dass die Energieaufspaltung Δ_n eines Paares einen kleinen Wert $\Delta_n \ll E_n$ annimmt und die Wellenfunktion für die geraden Zustände $\psi_+ \sim sin(\frac{n\pi}{a}|x|)$ und für die ungeraden Zustände $\psi_- \sim sin(\frac{n\pi}{a}x)$ wird. Wie groß ist Δ_1, also die Energieaufspaltung der beiden Grundzustandsniveaus für $k_0 a \gg 1$?

d) Geben Sie die normierte Gesamtwellenfunktion des Grundzustandes $\psi(x,t)$ (also für $n = 1$) an für den Fall, dass zur Zeit $t = 0$ das Teilchen ganz in der linken Kastenhälfte ist. (2 Punkte)

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Teilchen in der linken Kastenhälfte für weitere Zeiten $t > 0$? (2 Punkte)

23. **Resonanzen und fast gebundene Zustände eines Teilchens (8 Punkte)**
Das Potential

$$V(x) = \begin{cases} V_0\delta(x+L) & x < 0 \\ \infty & x \geq 0 \end{cases}$$

stellt ein sehr vereinfachtes Modell eines instabilen Systems dar. Berechnen Sie die durch Resonanzen am Potential bedingte Verzögerungszeit τ eines von links einfallenden Teilchens als Funktion des Wellenvektors k und damit auch der Anfangsenergie $E(k)$.

a) Betrachten Sie zunächst eine ebene monochromatische Welle (mit Energie E_0), die von links in das Potential einläuft und drücken Sie die Amplitude der reflektierten Welle in der Form $e^{-2i\theta(k)}$ aus. (2 Punkte)

b) Beschreiben Sie dann das Teilchen in Form eines Wellenpakets mit der Gewichtsfunktion $a(k)$. Die Gesamtwellenfunktion besteht aus einem einfallenden Teil und einem auslaufenden (in diesem Aufgabenteil soll die Betrachtung für ein allgemeines $\theta(k)$ geführt werden). Bestimmen Sie getrennt für die beiden Anteile den Erwartungswert $\langle x\rangle(t)$ für den Ort als Funktion der Zeit t. In Aufgabe 15 auf Blatt 3 haben Sie gelernt, dass der Erwartungswert eines Wellenpakets gegeben ist durch $\langle x\rangle = x_0 + vt$. Bei dem Term für das auslaufende Teilchen ergibt sich, im Vergleich zum einfallenden Teilchen, ein Zusatzterm, der als Verzögerungszeit $\tau(k) = -2\frac{m}{\hbar}\frac{1}{\langle k\rangle}\left\langle\frac{\partial\theta}{\partial k}\right\rangle$ interpretiert werden kann. (2 Punkte)
Hinweis: Wenn Sie als Bedingung fordern, dass sich das Teilchen für $t = 0$ bei $x = 0$ befindet, ergibt sich eine Vereinfachung.

c) Bestimmen Sie jetzt explizit die Verzögerungszeit $\tau(k)$ mit der in Aufgabenteil (a) bestimmten Reflexionsamplitude. Nehmen Sie dafür an, dass das Wellenpaket hinreichend scharf um einen bestimmten k-Wert verteilt ist, damit Sie die Mittelwerte durch die Werte selbst ersetzen dürfen.
Ergebnis:

$$\tau(k) = \frac{2mL^2}{\hbar}\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\alpha^2 + \beta\sin^2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2\sin^2\alpha + 2\alpha\beta\sin\alpha\cos\alpha} - 1\right]$$

mit $\alpha =?$ und $\beta =?$ (2 Punkte)

d) Diskutieren Sie die Verzögerungszeit $\tau(k)$ in Abhängigkeit der Potentialstärke V_0 und der Energie, d.h. des Wellenvektors k. Wann variiert $\tau(k)$ besonders stark ?(2 Punkte)

24. **Eigenschaften der Wronski-Determinante (6 Punkte)**
Zeigen Sie für Differentialgleichungen der Form

$$\psi''(x) + [E + V(x)]\,\psi(x) = 0,$$

dass die zugehörige Wronski-Determinante

$$W(\psi_1, \psi_2) = \psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2$$

zweier Lösungen die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) Die Wronski-Determinante ist eine Konstante, wenn ψ_1 und ψ_2 Lösungen zu demselben E sind. (1 Punkt)

b) Die Wronski-Determinante ist Null für linear abhängige Lösungen ψ_1 und ψ_2.

(1 Punkt)

c) Betrachten Sie ein Potential mit $V(x \to \pm\infty) = V_\pm < \infty$. Beweisen Sie die Reziprozität der Transmission:
„Der über die Ströme definierte Transmissionskoeffizient t_r für eine Welle, die das Potential von rechts nach links durchläuft, ist gleich dem Transmissionskoeffizient t_l für eine von links nach rechts laufende Welle. “ (2 Punkte)
Hinweis: Der Transmissionskoeffizient ist gegeben durch $t = \frac{j_{\text{trans.}}}{j_{\text{ein.}}}$. Um die Ströme zu bestimmen machen Sie sinnvolle Ansätze für jeweils eine von links bzw. rechts einfallende Welle. Eine der oben gezeigten Eigenschaften der Wronski-Determinante ist in diesem Teil hilfreich.

d) Indem Sie die Rechnung von c) schreiben mit der Transfermatrix $\mathcal{M}$, zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ allgemein die Form hat

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} u & v \\ v^\star & u^\star \end{pmatrix}$$

mit $u, v \epsilon \mathbb{C}$ wobei gilt

$$|u|^2 - |v|^2 = \sqrt{\frac{E - V_+}{E - V_-}}.$$

(2 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie die (verallgemeinerte) symplektische Form $\mathcal{M}^\dagger g \mathcal{M} = \sqrt{\frac{E-V_+}{E-V_-}}\, g$ von $\mathcal{M}$, mit $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, die in der Vorlesung aus der Kontinuitätsgleichung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit abgeleitet wurde.