UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2005

Übungsblatt 4, Ausgabe 11.05.2005, abzugeben bis 18.05.2005
Besprechung in den Übungen in der 6. Semesterwoche (18.-20.05.2005)

17. **Ehrenfest'sche Theoreme (6 Punkte)**

a) Indem Sie die Zeitentwicklungen der Erwartungswerte durch die Kommutatoren mit dem Hamiltonoperator ausdrücken, berechnen Sie $\langle x\rangle$ und $\langle p\rangle$ eines Teilchens mit Masse m in einer Dimension für die folgenden Potentiale: (2 Punkte)

i.
$$V(x) = 0 \qquad \text{(freies Teilchen)}$$

ii.
$$V(x) = -q\,E\,x \qquad \text{(konstantes elektrisches Feld)}$$

iii.
$$V(x) = \frac{k}{2}\,x^2 \qquad \text{(harmonischer Oszillator)}$$

b) Vereinfachen Sie den allgemeinen Ausdruck für die Zeitentwicklung von $\langle\Delta x^2\rangle$ soweit möglich ohne Kenntnis der Wellenfunktion $\psi(x,t)$. Rechnen Sie $\langle\Delta p^2\rangle$ für die Fälle (i) und (ii) aus; wie hängen die Impulsunschärfen von der Zeit ab?
Für den harmonischen Oszillator zeigen Sie

$$\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = \alpha\frac{d}{dt}\langle p^2\rangle$$

und geben Sie die Proportionalitätskonstante α an. (2 Punkte)

c) Stellen Sie für ein geladenes Teilchen im konstanten homogenen Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = B\hat{\mathbf{z}}$ die Bewegungsgleichungen (Zeitentwicklung) für $\langle\mathbf{r}\rangle$ und $\langle\mathbf{p}\rangle$ auf und zeigen Sie so, dass diese mit den klassischen Bewegungsgleichungen übereinstimmen. Für die Zeitabhängigkeit der Unschärfen $\langle\Delta\mathbf{r}^2\rangle$ und $\langle\Delta\mathbf{p}^2\rangle$ vereinfachen Sie die aus den Kommutatoren mit dem Hamiltonoperator gewonnenen Ausdrücke soweit als möglich; vergleichen Sie insbesondere mit den Ergebnissen aus b). (2 Punkte)

18. **Stromdichte (7 Punkte)**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ als Funktion des Ortes und der Zeit für

a) eine ebene Welle (1 Punkt)

b) das eindimensionale Wellenpaket aus Aufgabe 15 mit Gaußschen $a(k)$ wie in Teil c) dort. (2 Punkte)

c) Die Diskussion der Wahrscheinlichkeitsstromdichte ändert sich, wenn elektromagnetische Felder auf ein geladenes (Ladung q) Teilchen wirken.

i. Da der Hamiltonoperator das skalare und das Vektorpotential enthält, muss die Wellenfunktion bei einer Eichtransformation mitverändert werden. Zeigen Sie, dass für eine Eichtransformation

$$A \to A' = A + \nabla\chi \quad , \phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

mit einer beliebigen skalaren Funktion $\chi(\mathbf{r},t)$ die Wellenfunktion $\psi' = \psi\, e^{i\frac{q}{\hbar}\cdot\chi}$ die Schrödingergleichung mit den neuen Potentialen erfüllt, wenn ψ jene mit den alten löst. (Die Wellenfunktion ist also eichinvariant, da sie sich nur um einen Phasenfaktor verändert.) (2 Punkte)

ii. Leiten Sie in Analogie zum Abschnitt 2.1.7.1 der Vorlesung aus der Zeitableitung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit den Ausdruck für die Stromdichte j für Teilchen der Masse m und Ladung q im Magnetfeld her. Beweisen Sie zunächst auch die Hermitizität des Hamiltonoperators mit Magnetfeld. (2 Punkte)

19. **Operator Gymnastik (7,5 Punkte)**

a) Zeigen Sie folgende Kommutatorgleichungen für zwei beliebige Funktionen $f = f(x)$ und $g = g(p)$: (1 1/2 Punkte)
i)

$$[p, f] = -i\hbar \frac{df(x)}{dx},$$

ii)

$$[x, g] = i\hbar \frac{dg(p)}{dp}.$$

Und für beliebige Operatoren A, B und C:
iv)

$$[AB, C] = A\,[B, C] + [A, C]\,B.$$

b) Nehmen Sie nun an, A und B seien unabhängig von λ. Beweisen Sie mit Hilfe einer Taylorentwicklung um $\lambda = 0$ das sogenannte *Baker-Hausdorff* Theorem: (2 Punkte)

$$e^{\lambda B} A e^{-\lambda B} = A + \lambda\,[B, A] + \frac{\lambda^2}{2}\,[B,[B,A]] + \frac{\lambda^3}{3!}\,[B,[B,[B,A]]] + ...$$

c) Es seien $B = -\frac{i}{\hbar}p$ sowie $A = x$. Kommentieren Sie, welche Rolle dem Operator $T(\lambda) = e^{-i\lambda p/\hbar}$ zukommt und zeigen Sie, dass $T(\lambda)$ unitär (d.h. $TT^\dagger = T^\dagger T = \mathbf{1}$ ist). Welche Wirkung hat dieser Operator auf eine Wellenfunktion $\psi(x)$? (2 Punkte)

d) Wir haben es nun mit speziellen Operatoren zu tun, die die folgende Eigenschaft haben:

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0.$$

Nutzen Sie diese Eigenheit aus, um zu zeigen, dass

$$\exp(\lambda A)\exp(\lambda B) = \exp\left(\lambda A + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2}[A, B]\right)$$

gilt. (2 Punkte)

Hinweis: Stellen Sie als einen möglichen Ansatz eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die linke Seite $F(\lambda) = e^{\lambda A}e^{\lambda B}$ auf. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichungen für die linke und die rechte Seite dasselbe Anfangswertproblem darstellen!

20. **Eindimensionaler, unendlich tiefer Potentialtopf (6,5 Punkte)**
In der Vorlesung wurde ein Teilchen betrachtet, das in einem unendlich tiefen Rechteckpotential der Breite L gefangen ist. Seine Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ zu den Energie-Eigenwerten E_n wurden bestimmt als

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad \text{bzw.} \qquad E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

a) Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ normiert sind, d.h. dass $\int_0^L \mathrm{d}x|\phi_n(x)|^2 = 1$. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie für allgemeines n den Erwartungswert des Ortes

$$\langle x\rangle_n = \int_0^L \mathrm{d}x\phi_n(x)^* x\phi_n(x)$$

zum Zustand $\phi_n(x)$ und skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $|\phi_n(x)|^2$ für den Grundzustand ($n = 1$) und den ersten angeregten Zustand ($n = 2$). Fällt der Erwartungswert $\langle x\rangle_n$ jeweils mit dem wahrscheinlichsten Ort (Maximum von $|\phi_n(x)|^2$) zusammen? (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Ortsunschärfe $\Delta x_n = \sqrt{\langle x^2\rangle_n - \langle x\rangle_n^2}$. Wie verändert sie sich mit n? (2 Punkte)

d) Die Ortsdarstellung des Impulsoperators p lautet $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$. Zeigen Sie, dass sein Erwartungswert

$$\langle p\rangle_n = \int_0^L \mathrm{d}x\, \phi_n(x)^* \,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\,\phi_n(x)$$

für alle n verschwindet. Kann man das bereits aus der Form der $\phi_n(x)$ ablesen?
Hinweis: Die zweite Frage lässt sich mit Hilfe des Superpositionsprinzips beantworten. (1 Punkt)

e) Berechnen Sie die Impulsunschärfe $\Delta p_n = \sqrt{\langle p^2\rangle_n}$. Wie hängt das Produkt $\Delta x_n \Delta p_n$ von n ab?
Hinweis: Verwenden Sie $E = p^2/2m$, dann ist die Integration unnötig. (1/2 Punkt)