UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2005

Übungsblatt 3, Ausgabe 04.05.2005, abzugeben bis 09.05. und 11.05.2005
Besprechung in den Übungen in der 5. Semesterwoche (11.-13.05.2005)

13. **Bragg-Streuung mit Neutronen und Elektronen (7 Punkte)**

a) Elastische Neutronenstreuung an Oberflächen
Wie in Abbildung 1 links gezeigt, kann Ar-Gas auf einer Graphitoberfläche auf verschiedene Arten adsorbiert werden [Phys. Rev. B **16**, 4551 (1977)]. Die beiden in der Abbildung gezeigten Möglichkeiten sind:

- Kommensurabel mit dem hexagonalen (wabenartigen) Gitter der C-Atome auf der Graphitoberfläche. Der Abstand benachbarter C-Atome beträgt in Graphit $a_C = 2.34\,\text{Å}$.
- Inkommensurabel mit dem Graphit-Gitter in der 2-dimensionalen hexagonal dichtesten Packung. Der Abstand benachbarter Ar-Atome berechnet sich in diesem Fall aus dem Lennard-Jones Potential (bestimmt aus der Gasphase) zu $a_{Ar} = 3.82\,\text{Å}$.

Mit Neutronenstreuung wurden zwei Experimente durchgeführt: Eine Messung mit adsorbiertem Ar und eine ohne Ar. Die Differenz dieser beiden Messungen, (Graphit+Ar)-(Graphit), ist in Abbildung 1 rechts gezeigt. Bestimmen Sie anhand der Bragg-Peaks die Struktur des adsorbierten Ar. (3 Punkte)
Hinweis: Zur Erklärung der drei gezeigten Braggpeaks genügt es, Braggstreuung an Gitterlinien mit den Abständen $d = \frac{\sqrt{3}}{2} a_{Ar}$ und $d = a_{Ar}/2$ zu betrachten.

b) Elastische Streuung von Elektronen an Nickel
Berechnen Sie die De Broglie-Wellenlänge eines Elektrons, wenn seine kinetische Energie 1 eV, 100 eV, 1000 eV, 100 keV beträgt. Welche Wellenlängen werden in 1. Ordnung merklich in einem Nickelkristall gebeugt, in dem der Atomabstand 2.15 Åbeträgt? Berechnen Sie die kinetische Energie derjenigen Elektronen, die unter einem Winkel von 30° gestreut werden. (2 Punkte)

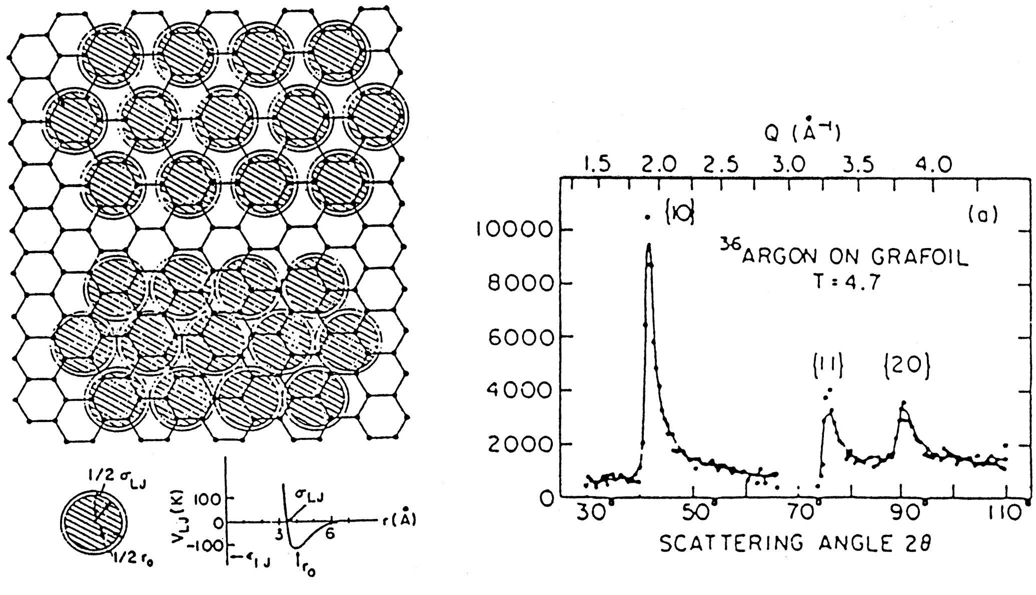

Abbildung 1:

c) Ein Elektron befinde sich anfänglich weit entfernt von einem Proton in Ruhe. Es wird vom Proton angezogen. Berechnen Sie die Grösse der Wellenlänge des Elektrons, wenn es sich dem Proton auf (a) $1\,m$, (b) $0.5 \cdot 10^{-10}\,m$ genähert hat. (Diese Entfernung ist von der Grössenordnung des Bahnradius eines Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms.) (2 Punkte)

14. **Drehimpuls und Masse des Photons (8 Punkte)**
Der Drehimpuls des Photons wurde schon früh in einem makroskopischen Experiment gemessen [R.A. Beth, Phys. Rev. **50**, 115 (1936)]. Die einfachste Variante des Experiments ist in Fig. 2 dargestellt: Ein $\lambda/4$-Plättchen, welches unterschiedliche Brechungsindizes für in $x-$ bzw. in $y-$Richtung linear polarisiertes Licht aufweist ($n_x \neq n_y$), ist an einem Torsionsfaden angehängt.

a) Wie dick muss das Plättchen bemessen sein, damit einfallendes monochromatisches Licht, das unter 45° zur $x-$Achse linear polarisiert ist, das Plättchen als zirkular polarisiertes Licht verlässt? (n_x und n_y seien bekannt für die betreffende Frequenz ω.) (1 Punkt)

b) Berechnen Sie das auf das Plättchen wirkende mechanische Drehmoment M, falls die Intensität (Leistung) des einfallenden Lichts $I_0 = 7\,W$ beträgt (Wellenlänge $\lambda = 1.2\,\mu m$), und das Photon Spin eins hat. (1 Punkt)

c) Das zitierte Experiment wurde mit einem (zweimal dickeren) $\lambda/2$-Plättchen und zirkular polarisiertem einfallendem Licht durchgeführt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall für gleiche Intensität und Wellenlänge das mechanische Drehmoment zweimal grösser ist. (2 Punkte)

In der klassischen Theorie wie auch in der Quantentheorie wird angenommen, dass die Masse des Photons null sei. Behandelt man die Masse m des Photons als freien Parameter, dann folgt aus einer Vermessung des Magnetfeldes von Jupiter eine obere Grenze $m \leq 6 \cdot 10^{-16}\,eV/c^2$ [L. Davis et al., Phys. Rev. Lett. **35**, 1402 (1975)].

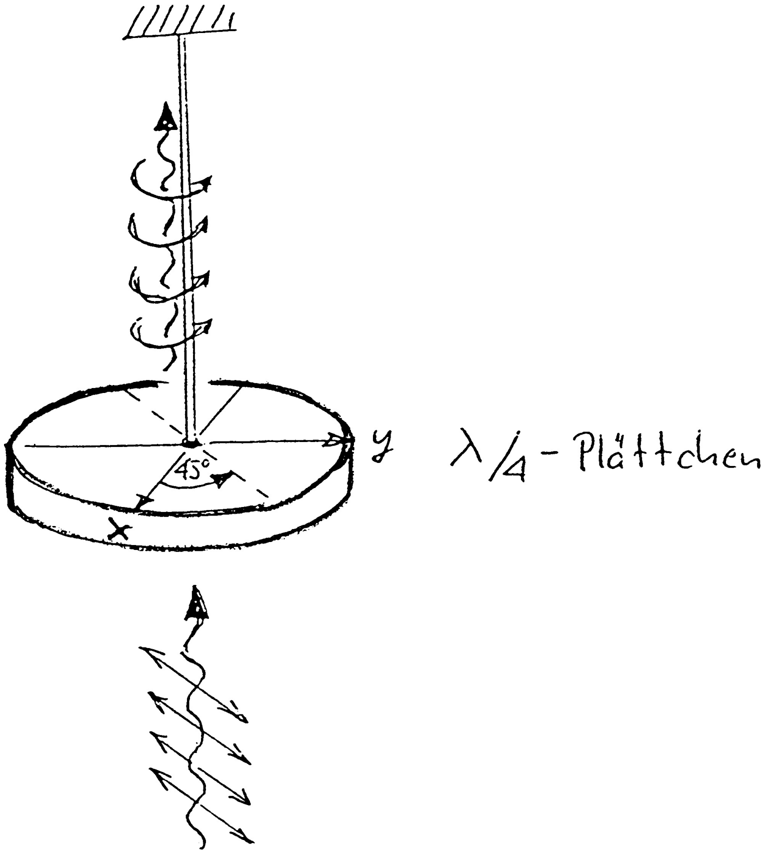

Abbildung 2:

Wir nehmen hypothetisch an, die Photonenmasse sei $m_0 = 6 \cdot 10^{-16}\, eV/c^2$ und studieren einige Konsequenzen dieser Annahme.

d) Berechnen Sie die Gruppengeschwindigkeit des Photons als Funktion der Wellenzahl k. Wie gross wäre die Flugzeitdifferenz δt zwischen blauem Licht ($\lambda_B = 4000\,\text{Å}$) und rotem Licht ($\lambda_R = 8000\,\text{Å}$), das gleichzeitig erzeugt wurde, in einer Distanz von $L = 10^3$ Lichtjahren? (2 Punkte)

e) Ein rotationssymmetrisches System mit Drehimpuls eins (Quantenzahl $j = 1$) hat für jede beliebige ($z-$)Richtung drei Werte der Projektion des Drehimpulses: $j_z = 0, \pm\hbar$. Das Photon hat nur zwei Drehimpulswerte ($j_z = \pm\hbar$) entsprechend den beiden Zuständen der zirkularen Polarisation. (Wir sagen: das Photon ist "transversal".) Zeigen Sie mit Hilfe einer Lorentz-Transformation, dass eine von null verschiedene Photonmasse zusätzlich "longitudinale" Photonen, d.h. Zustände mit $j_z = 0$, verlangt. (2 Punkte)

15. **Wellenpaket (7 Punkte)**
Betrachten Sie das eindimensionale Wellenpaket zu den Frequenzen $\omega = \omega(k)$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(kx-\omega t)}\, a(k)\, dk$$

mit Verteilung $a(k)$.
Hinweis: Verwenden Sie die Gesetzmäßigkeiten der Fourier-Transformation, wie z.B. die Parseval-Relation und $FT[x^n\psi(x)](k) = (\frac{\partial}{\partial -ik})^n\tilde{\psi}(k)$.

a) Wie bestimmt sich $a(k)$ und $a(k)e^{-i\omega(k)t}$ aus $\psi(x,t)$? Wie kann die Normierung $\int dx|\psi(x,t)|^2 = 1$ für alle t gewährleistet werden? (1 Punkt)

b) Zeigen Sie allgemein, dass es Konstanten x_0, t_0, v, A und Δ gibt, so dass

$$< x_t >= \int dx\; x\; |\Psi(x,t)|^2 = x_0 + v\; t$$

und

$$< (x- < x_t >)_t^2 >= \int dx\; (x- < x_t >)^2 \;\; |\Psi(x,t)|^2 = A\; (t-t_0)^2 + \Delta$$

Betrachten Sie die beiden Fälle $\omega_k = \frac{\hbar k^2}{2m}$ (de Broglie-Welle) und $\omega_k = ck$ (elektromagnetische Welle). (4 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Dichte $\rho_t(x) = |\Psi(x,t)|^2$ und die Konstanten aus Teil a) explizit für ein Gauß'sches Wellenpaket

$$a(k) = (4\pi\gamma^2)^{\frac{1}{4}} \exp(-\frac{\gamma^2}{2}(k-k_0)^2)$$

wiederum für die beiden Fälle $\omega_k = \frac{\hbar k^2}{2m}$ und $\omega_k = ck$. (2 Punkte)

16. **Galilei-Invarianz der Schrödingergleichung (6 Punkte)**

Es soll gezeigt werden, dass die Schrödingergleichung eines freien Teilchens

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \tag{1}$$

invariant ist unter Galilei Transformationen, bei denen die Ortskoordinaten sich transformieren gemäß:

$$\begin{aligned} x \to x' &= \quad x - vt \\ y \to y' &= \quad y \\ z \to z' &= z. \end{aligned}$$

Die Schrödingergleichung ist invariant, wenn sie in beiden Bezugssystemen gleich lautet, wenn also im neuen Koordinatensystem wiederum gilt:

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla'^2\psi' \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie, wie $\psi'(\mathbf{r}',t)$ sich aus $\psi(\mathbf{r},t)$ berechnet, damit $\psi'(\mathbf{r}',t)$ die Schrödingergleichung (2) erfüllt wenn $\psi(\mathbf{r},t)$ Gleichung (1) erfüllt. (4 Punkte)
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz

$$\psi(\mathbf{r},t) = e^{-if(\mathbf{x}',t)}\psi'(\mathbf{r}',t)$$

so umgeformt, dass Differentiationen von $\psi'(\mathbf{r}',t)$ bestimmt werden können, durch diejenigen von $\psi(\mathbf{r},t)$. Zeigen Sie dann, dass $f(x',t)$ die folgenden Gleichungen erfüllen muss:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = -\frac{mv}{\hbar}$$

$$\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x'} + v\frac{\partial f}{\partial x'} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Wie lautet also $f(x',t)$?

b) Diskutieren Sie das Ergebnis, insbesondere auch den Spezialfall ebener Wellen.

(2 Punkte)