UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2005

Übungsblatt 2, Ausgabe 27.04.2005, abzugeben bis 02.05. und 04.05.2005
Besprechung in den Übungen in der 4. Semesterwoche (04.-06.05.2005)

9. **Compton-Effekt und Streuquerschnitt des Elektrons (9 Punkte)**

a) Bestimmen Sie die Comptonverschiebung $\Delta\lambda$ für Comptonstreuung von Röntgenstrahlung bei $\lambda = 0.1\,nm$ und $\theta = 90°$ für das Röntgenquant. (1 Punkt)

b) Wie gross ist die kinetische Energie des Elektrons nach dem Stoss (E_{kin} vor dem Stoss und die Bindungsenergie können vernachlässigt werden)? (2 Punkte)

c) Wie gross ist der Energieverlust des Photons bei $\lambda = 0.01\,nm$ und $\theta = 90°$? (1 Punkt)

d) Zeigen Sie, dass ein Photon nicht seine gesamte Energie an ein einzelnes freies Elektron abgeben kann, indem Sie die Impuls- und Energieerhaltung bei einem Stossprozess eines Photons mit einem Elektron untersuchen.
Hinweis: Rechnen Sie in dem Bezugssystem, in dem das Elektron nach der Absorption des Photons ruht. (2 Punkte)

e) Es soll der totale Streuquerschnitt $\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$ eines Elektrons berechnet werden, das eine einfallende Lichtwelle $\mathbf{E} = \hat{e} E_0 \exp^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ ($\hat{e}$ ist der Polarisationsvektor) zum Teil absorbiert und die absorbierte Energie wieder abstrahlt (Thomson Streuung). Man nehme an, dass das Elektron durch das elektrische Feld der Lichtwelle beschleunigt wird und deshalb kleine Schwingungen mit nicht-relativistischer Geschwindigkeit um eine Gleichgewichtsposition ausführt. Die zeitlich gemittelte, in ein Raumwinkelelement $d\Omega$ ausgestrahlte Leistung beträgt

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 \langle \ddot{s}^2 \rangle}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2(\theta).$$

s ist hierbei die Auslenkung und e die Ladung des Elektrons. Um von $\frac{dP}{d\Omega}$ nach $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ zu gelangen, muss mit der zeitlich gemittelten einfallenden Energiestromdichte normiert werden. (2 Punkte)

f) Der Radius eines Elektrons kann abgeschätzt werden, indem man annimmt, dass die relativistische Ruheenergie mc^2 des Elektrons der Energie des elektrischen Feldes des

Elektrons entspricht. Vergleichen Sie diese Abschätzung des Elektronenradius mit dem Wert, der sich aus dem totalen Streuquerschnitt aus Teil b) ergibt. (1 Punkt)
Hinweis: Die Energie W des elektrischen Feldes im Volumen V wird mit $W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV E^2$ berechnet.

10. **Photoeffekt (2 Punkte)**

a) Licht einer Wellenlänge $\lambda = 300\, nm$ falle auf ein Stück Kalium. Die emittierten Photoelektronen haben eine maximale Energie von $2.03\, eV$. Wie gross ist die Energie der einfallenden Photonen? Wie gross ist die Austrittsarbeit von Kalium? Wie gross ist die maximale Bremsspannung, wenn die Wellenlänge der einfallenden Photonen $430\, nm$ beträgt? Wie gross ist die Grenzwellenlänge des Photoeffekts bei Kalium?

(2 Punkte)

11. **Gauß-Verteilung (7 Punkte)**
Zwei Zufallsvariablen ξ und η, die Werte x und y annehmen können, sollen die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte $P_2(x, y)$ besitzen; zur Vereinfachung gelte für die Mittelwerte $\langle\xi\rangle = 0 = \langle\eta\rangle$.

a) Wie lautet allgemein die Wahrscheinlichkeitsdichte $P_2'(x', y')$ bei einer Drehung des Koordinatensystems, wenn also: (1 Punkt)

$$\xi' = \cos\alpha\,\xi + \sin\alpha\,\eta\ , \qquad \eta' = -\sin\alpha\,\xi + \cos\alpha\,\eta$$

Hinweis: Das Ergebnis lautet $P_2'(x', y') = P_2(\cos\alpha\xi' - \sin\alpha\eta', \sin\alpha\xi' + \cos\alpha\eta')$.

b) Zeigen Sie, dass die Annahmen, (i) ξ und η seien unabhängig, und (ii) es gebe (mindestens) einen Winkel $\alpha \neq 0,\ n\frac{\pi}{2}$ (mit n einer ganzen Zahl), so dass auch ξ' und η' unabhängig sind, dazu führt, dass $P_2(x, y) = P^G(x)\ P^G(y)$ gilt, wobei $P^G(x)$ die (eindimensionale) Gaußverteilung sein muss. (2 Punkte)
Hinweis: Diese Aufgabe beleuchtet die Ableitung des Maxwell-Boltzmann Gesetzes; siehe IK III, Kapitel 4.3. Zeigen Sie zuerst, dass der Ansatz $P_\xi(x)P_\eta(y) = P_{\xi'}(x')P_{\eta'}(y')$ durch $P_\alpha(a) = e^{\phi_\alpha(a)}$ gelöst wird, und danach (durch zweimaliges Differenzieren nach x' und y'), dass die $\phi_\alpha(a)$ quadratische Polynome sein müssen.

c) Zeigen Sie, dass die Summe $\Xi = \xi + \eta$ zweier unabhängiger Zufallsvariablen ξ und η verteilt ist gemäß:

$$P_\Xi(X) = \int dx\ P_\eta(X - x)\ P_\xi(x)\ ,$$

und dass, falls ξ und η Gauß–verteilt sind, auch die Summe Ξ eine Gauß–Verteilung besitzt. (2 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte des Quotienten $\zeta = \xi/\eta$ gegeben ist durch:

$$P_\zeta(z) = \int dy\, |y|\, P(yz, y)\ ,$$

und berechnen Sie $P_\zeta(z)$ für unabhängige, Gauß–verteilte Zufallsvariablen. (2 Punkte)
Hinweis: Das Ergebnis $P_\zeta(z)$ ist eine Cauchy–Verteilung, welche weder Mittelwert, noch Varianz besitzen.

12. **Poisson-Verteilung (6 Punkte)**
Die Verteilung von zufälligen Punkten auf Bereiche der Größe t führt auf die Poisson-Verteilung, die zur Beschreibung der Galaxienverteilung im Universum, der Anzahl der Regentropfen, die auf ein Dach schlagen, der Anzahl radioaktiver Zerfälle innerhalb der Zeit t, und vieler anderer Verteilungen unabhängiger Zufallsvariablen auf endliche Bereiche verwendet wird.

Es seien die Voraussetzungen gegeben, dass die Anzahl der Punkte im Intervall $[T, T+t]$ (mit $t > 0$) unabhängig sei von T ("Stationarität") und von der Zahl der Punkte im Intervall bis T ("Markowsch"). Ausserdem enthalte ein infinitesimales Intervall $[T, T+dt]$ maximal einen Punkt.

Speziell werde eine radioaktive Quelle betrachtet, die zufällig Teilchen aussendet, wobei jeder Zerfall unabhängig von den anderen stattfindet und die mittlere Zerfallsrate λ ist.

a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit im Zeitintervall $[0, t]$ kein Teilchen zu beobachten gegeben ist durch

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Markow-Eigenschaft.

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit P_n für $n > 0$ Teilchen im Zeitfenster $t + dt$ der Gleichung genügt:

$$P_n(t+dt) = P_n(t)(1 - \lambda dt) + P_{n-1}\lambda dt$$

(2 Punkte)

Hinweis: Begründen und verwenden Sie die Formel für die totale Wahrscheinlichkeit

$$P_n(t+dt) = \sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(t) P_k(dt)$$

und entwickeln Sie P_0 und P_1 für $dt \to 0$.

c) Lösen Sie die gekoppelten Differentialgleichungen, die man für $dt \to 0$ erhält, mit dem Ansatz $P_n(t) = v_n(t)e^{-\lambda t}$ und bestimmen Sie die $v_n(t)$ rekursiv. Wie lauten die Anfangsbedingungen? (2 Punkte)

d) Zeigen Sie die Normierung $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$, und berechnen Sie Mittelwert und Varianz der Teilchenzahlen; welcher Zusammenhang besteht? (1 Punkt)