UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2005

Übungsblatt 12, Ausgabe 06.07.2005, abzugeben bis 11. und 13.07.2005
Besprechung in den Übungen in der 14. Semesterwoche (13.-15.07.2005)

49. **Anomaler Zeeman-Effekt (6 Punkte)**
Betrachten Sie den $3d \to 2s$-Übergang in einem wasserstoffähnlichem Atom in Anwesenheit eines Magnetfeldes B. Nehmen Sie an, die Zeeman-Aufspaltung sei klein gegenüber der Spin-Bahn-Wechselwirkung.

   a) Zeichnen Sie das Termschema und tragen Sie die erlaubten Übergänge ein. (2 Punkte)

   b) Berechnen Sie die Energien der erlaubten Übergänge in Einheiten von $\mu_\mathrm{B}B$. (4 Punkte)

50. **Spin-Bahn-Kopplung (4 Punkte)**

   a) Wie wirkt sich die Spin-Bahn-Kopplung auf die Energieniveaus des $3F$- bzw. des $3D$-Zustands aus? Zeichnen Sie das Energieniveauschema. (1 Punkt)

   b) Welche der Übergänge $3F \to 3D$ sind erlaubt? Zeichnen Sie diese Übergänge ins Niveauschema ein. (1 Punkt)

   c) Wiederholen Sie die Aufgabe für die Übergänge $4D \to 3P$ und $4P \to 4S$. (2 Punkte)

51. **Feinstruktur (Spin-Bahn-Wechselwirkung) (6 Sonderpunkte)**
Ein Elektron e^- mit Bahndrehimpuls $\mathbf{L}$ (wobei $l \geq 0$ und ganzzahlig) und Spin $\mathbf{S}$ (wobei s=1/2) befinde sich in einem kleinen (schwachen) homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Vernachlässigt man zunächst die Spin-Bahn Kopplung $H_{LS} \simeq 0$, so lautet der Hamiltonoperator $H = H_0 + H_m$ mit $H_0 = \left(\frac{p^2}{2m} + V(r)\right)\mathbf{1}$ und $H_m = \frac{\mu_B}{\hbar}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B}$ wobei μ_B das Bohrsche Magneton ist. Die zugehörige zeitabhängige Schrödingergleichung ist die Pauli-Gleichung
$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}, t) \\ \psi_-(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \equiv H \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}, t) \\ \psi_-(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$$

   a) Welche Basis diagonalisiert H_0 und auch H_m? Zeigen Sie, dass in dieser Basis die Energieaufspaltung
$$\Delta E_{n,l,m_l,m_s} = \mu_B(m_l + 2m_s)B$$
lautet.

b) Im Folgenden wird der Gesamtdrehimpuls $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ des Elektrons eingeführt. Für die Quantenzahl j des Gesamtdrehimpulses muss gelten: $j \equiv l + 1/2, l - 1/2$ (mit: $l \geq 1, s = 1/2$).
Welche Dimension hat der Produktraum $H \equiv H_l \bigoplus H_{s=1/2}$?
Zeigen Sie, dass

$$|l \pm \frac{1}{2}, m_j, l, 1/2\rangle = \pm\sqrt{\frac{l \pm m_j + 1/2}{2l+1}}|l, m_j - 1/2\rangle|+\rangle \mp \sqrt{\frac{l \mp m_j + 1/2}{2l+1}}|l, m_j + 1/2\rangle|-\rangle$$

die gemeinsamen Eigenzustände der Operatoren $\mathbf{J}^2, J_z, \mathbf{L}^2, \mathbf{S}^2$ sind.
Hinweis: Starten Sie von der Behauptung, dass für $j = l + 1/2$ und $m_j = l + 1/2$ gilt $|l + 1/2, l + 1/2, l, 1/2\rangle = |l, l\rangle|+\rangle$ und wenden Sie darauf wiederholt den Operator J_- an.

c) Die Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten des Bahndrehimpulses $\mathbf{L}$ und des Spins $\mathbf{S}$ führt auf die Spin-Bahn-Kopplung (rein relativistischer Effekt) mit dem Hamiltonoperator $H_{LS} = \frac{1}{2m^2c^2}\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}V(r)$, wo $V(r) = e\phi(r)$ die potentielle Energie im elektronischen Potential $\phi(r)$ des Kerns ist.
Für die Diskussion der Spin-Bahn-Wechselwirkung wird im folgenden das Magnetfeld $\mathbf{B} \equiv 0$ (d.h. $H_m \equiv 0$) gesetzt, so dass der Hamiltonoperator eines Elektrons jetzt durch $H = H_0 + H_{LS}$ gegeben ist.

   i. Welche Form des Potentials $\phi(r)$ führt auf

$$H_{LS} = \frac{1}{2m^2c^2}\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}\frac{Ze^2}{r^3}$$

   wobei Z die Kernladungszahl ist?

   ii. Berechnen Sie die Kommutatoren $[H_{LS}, L_z]$ und $[H_{LS}, S_z]$ und zeigen Sie, dass demzufolge die Basis von $\mathbf{J}^2, J_z, \mathbf{L}^2, \mathbf{S}^2$ den Operator $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$ diagonalisiert.

   iii. Zeigen Sie desweiteren, dass sich in niedrigster Ordnung der Störungstheorie der Korrekturterm

$$\langle H_{LS}\rangle_{n,j=l\pm1/2,l} \equiv \frac{1}{2m^2c^2}\frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} l \\ -l-1 \end{pmatrix} Ze^2\langle\frac{1}{r^3}\rangle_{n,l}$$

   ergibt.

52. **Radioaktiver Zerfall (6 Sonderpunkte)**
Ein quantenmechanisches Teilchen liege zum Zeitpunkt $t = 0$ in einem gebundenen Zustand vor zum Energiewert $E_n^{(0)}$. Bei $t = 0$ werde eine konstante Störung angeschaltet, $V(t) = V\,\Theta(t)$, worauf das Teilchen in einem ungebundenen Zustand mit kontinuierlich verteilter Energie übergehe.

a) Zeigen Sie, dass mit der Annahme, dass die Besetzungswahrscheinlichkeit eines Zustandes $m \neq n$ nur durch Übergänge vom Zustand n bevölkert werde, folgt

$$i\hbar\frac{d}{dt}c_m(t) = V_{mn}c_n(t)e^{i\omega_{mn}t}$$

für $m \neq n$. Was bedeuten V_{mn} und ω_{mn}?

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung für die Amplitude des Ausgangszustandes n lautet

$$i\hbar\frac{d}{dt}c_n(t) = \sum_{m\neq n} V_{nm}c_m(t)e^{i\omega_{nm}t} + V_{nn}c_n(t)$$

c) Lösen Sie beide Gleichungen nach $c_n(t)$ durch Fouriertransformation.
Hinweis: Setzen Sie $c_n(t<0)=0$ und $c_n(t=0)=1$ an und berücksichtigen Sie einen kleinen Imaginärteil von ω, damit alle Integrale konvergieren. Bestimmen Sie dann die Polstelle von $\tilde{c}_n(\omega)$ in niedrigster Ordnung in ω und führen Sie die Fourier-Rücktransformation durch. Das Ergebnis lautet:

$$c_n(t) = \exp\{-\frac{w}{2}t - \frac{i}{\hbar}t\Delta E_n\}$$

d) Zeigen Sie, dass für lange Zeiten das Teilchen im Zustand m mit der Wahrscheinlichkeit

$$|c_m(t\to\infty)|^2 = \frac{|V_{mn}|^2}{(E_m^{(0)} - E_n^{(0)} - \Delta E_n)^2 + (\hbar w)^2}$$

vorliegt. Wie lautet also der Zusammenhang zwischen der Lebensdauer des Zustandes und der Verteilung von Energiewerten, die am radioaktiven Teilchen gemessen werden können?