UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2005

Übungsblatt 11, Ausgabe 29.06.2005, abzugeben bis 04. und 06.07.2005
Besprechung in den Übungen in der 13. Semesterwoche (06.-08.07.2005)

45. **Doppler-Verbreiterung von Spektrallinien (5 Punkte)**
Es soll die Spektrallinie einer Straßenlaterne (Natrium-Dampflampe) bestimmt werden. Die Lampe wird bei 500K betrieben. Die Messung ergibt ein Gaußprofil mit einer Halbwertsbreite von $\delta\omega_D = 1.07 \times 10^{10} s^{-1}$. Um die Wellenlänge des Übergangs zu bestimmen, wird zunächst die Dopplerverbreiterung von Spektrallinien hergeleitet.

a) Betrachten Sie zunächst ein Atom, das sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt und ein Photon mit der Frequenz ω_0 emittiert. Welche Frequenz "sieht" ein Beobachter? Welche Frequenz müsste eine Lichtwelle, die in z-Richtung einfällt, haben, damit das bewegte Atom Photonen der Frequenz ω_0 absorbieren kann? (1 Punkt)

b) Betrachtet werden nun Atome in einem Gas bei T=500K im thermischen Gleichgewicht. Berechnen Sie die Anzahl der Atome, deren Emission bzw. Absorption in das Frequenzintervall zwischen ω und $\omega + d\omega$ fallen. Berechnen Sie hieraus die emittierte/absorbierte Strahlungsleistung $P(\bar{\omega})$.
Hinweis: Benutzen Sie die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung

$$n_i(v_z)dv_z = \frac{N_i}{v_w\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{v_z}{v_w}\right)^2\right] dv_z$$

mit $v_w = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$; wahrscheinlichste Geschwindigkeit
und $N_i = \int\limits_{-\infty}^{\infty} n_i(v_z)dv_z$; Gesamtzahl der Atome im Zustand E_i pro Volumeneinheit.
Ergebnis: $P(\omega) = P(\omega_0) \cdot \exp\left(-\left[\frac{c(\omega-\omega_0)}{\omega_0 v_w}\right]^2\right)$
(2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Halbwertsbreite $\delta\omega_D(\omega_0, T, m) = |\omega_1 - \omega_2|$ mit $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_0)/2$.
Ergebnis: $\delta\omega_D = \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\frac{(8k_BT\cdot\ln 2)}{m}}$ (1 Punkt)

d) Wie groß ist die Wellenlänge der Na-D Linie ($3P_{1/2} \rightarrow 3S_{1/2}$)? Welche Farbe hat die Straßenlaterne? Vergleichen Sie die Dopplerverbreiterung mit der natürlichen Linienbreite der Na-D Linie (Lebensdauer $\tau = 16ns$).
(Molmasse Na: 0.023 kg/mol; $N_A = 6.023 \times 10^{23}$). (1 Punkt)

46. **Übergänge und Besetzungsinversion beim Laser (7 Punkte)**

a) Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeit A_{ik} für den Übergang $1s \to 2p$ im Wasserstoff-Atom. Beachten Sie dabei, dass der $2p$ Zustand dreifach entartet ist. *Hinweis*: Legen Sie die Quantisierungsachse in die z-Richtung, so dass $m = l_z$ wird. Zur Berechnung der x- und y-Komponenten von $\mathbf{M}_{ik}$ benutzt man die komplexen Linearkombinationen $(M_{ik})x \pm i(M_{ik})y$.
Wellenfunktionen:

$$1s : \psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-r/a_0}$$

$$\begin{aligned} 2p : \psi_{210} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \cos\vartheta \\ \psi_{21\pm1} &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \sin\vartheta \cdot e^{\pm i\varphi} \end{aligned}$$

(2 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein Zwei-Niveau Laser nicht funktionieren kann.

b) Stellen Sie dafür zunächst die Bilanzgleichungen für die Besetzungsdichten N_1, N_2 und der Dichte n der Photonen der Energie $h\nu$ in einem Laser auf. Berücksichtigen Sie die Pumprate P, die Relaxationsraten $R_1 N_1$ und $R_2 N_2$ aus den Laserniveaus $|1>$ und $|2>$ in beliebige andere Niveaus (z.B. strahlungslose Übergänge durch Stöße ...), sowie die spontane Emission. Die statistischen Gewichte der beiden Zustände g_1 und g_2 seien gleich. (1 Punkt)

Betrachten Sie nun den stationären Zustand.

c) Leiten Sie zwei Ausdrücke für die Pumprate her und beschreiben Sie deren physikalische Bedeutung. (1 Punkt)

d) Was gilt für die Relaxationsrate für die Entleerung des unteren Niveaus ? (1 Punkt)

e) Berechnen Sie die Besetzungsinversion $\Delta N_{stat} = N_2 - N_1$. Unter welchen Bedingungen funktioniert ein Laser? Wieso kann ein Laser, der nur aus zwei Niveaus besteht, nicht funktionieren? (2 Punkte)

47. **Stark-Effekt (8 Punkte)**

Betrachtet werde ein Teilchen mit Masse m und Ladung q im (allgemeinen) Zentralfeld gegeben durch den Hamiltonoperator $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r)$. Ein s-Energieniveau mit Energie E_s liege dicht bei einem p-Energieniveau mit Energie E_p. Der Abstand dieser beiden Energieniveaus von den restlichen sei so groß gegen ihre Aufspaltung $E_p - E_s > 0$, dass alle anderen Niveaus vernachlässigt werden können.

a) Für welche drei Operatoren können gemeinsame Eigenzustände gefunden werden? Wieviele Eigenzustände gehören zu den beiden Niveaus; d.h. welche Entartungen liegen vor? (1 Punkt)

b) Charakterisieren Sie die Zustände nach ihren Eigenschaften unter Spiegelung $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$, welche in Polarkoordinaten lautet $\vartheta \to \vartheta' = \pi - \vartheta$ und $\varphi \to \varphi' = \pi + \varphi$.

(1 Punkt)

c) Auf das System wirke nun ein konstantes elektrisches Feld der Stärke $-F$ in $\mathbf{z}$-Richtung, welches durch das elektrische Potential $\Phi(z) = Fz$ gegeben sei.

i. Was ergibt sich für $[L_z, \Phi]$, wobei L_z die z-Komponente des Bahndrehimpulsoperators ist? Was folgern Sie daraus für die Matrixelemente von Φ? Welche sind Null? (1 Punkt)

ii. Verwenden Sie die Eigenschaften von $\Phi(z)$ und der Zustände unter Spiegelung, um alle Matrixelemente von Φ zu finden, die ungleich Null sind, ohne diese explizit zu berechnen. Wie viele verschiedene sind es?
Hinweis: Ohne Spezifizierung des Zentralpotentiales können die nicht verschwindenden Matrixelemente von Φ nicht berechnet werden. (1 Punkt)

d) Verwenden Sie die Ergebnisse von Aufgabenteil c) um die Energieeigenwerte der Matrix $\langle i \mid H \mid j \rangle$ des Hamiltonoperators $H = H_0 + q\Phi$ zu bestimmen; $\mid i\rangle$ und $\mid j\rangle$ stehen hier für die Eigenzustände. (2 Punkte)

e) Diskutieren Sie die Abhängigkeit der Energieeigenwerte von F. (1 Punkt)

f) Bestimmen Sie den Eigenzustand, der zur niedrigsten Energie gehört und diskutieren Sie seine Abhängigkeit von F. (1 Punkt)

Hinweis: Kugelflächenfunktionen zu den niedrigsten Quantenzahlen lauten

$$Y_0^0(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad ; \quad Y_1^0(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta$$

$$Y_1^1(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, e^{i\varphi}\, \sin\vartheta \quad ; \quad Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, e^{-i\varphi}\, \sin\vartheta$$

48. **Ritzsches Variationsverfahren (6 Punkte)**
Ein Hamiltonoperator H habe den nichtentarteten Grundzustand ψ_0 zur Energie E_0 und erste angeregte Zustände ψ_1 zur Energie $E_1 > E_0$. Zeigen Sie, dass folgendes Variationsprinzip gilt:

a)
$$E_0 = \min_{\psi \in \mathcal{H}} \{ \langle \psi | H | \psi \rangle \mid \langle \psi | \psi \rangle = 1 \}$$

b)
$$E_1 = \min_{\psi \in \mathcal{H}} \{ \langle \psi | H | \psi \rangle \mid \langle \psi | \psi \rangle = 1, \langle \psi_0 | \psi \rangle = 0 \}$$

(2 Punkte)

Das Rayleigh-Ritz'sche Näherungsverfahren beruht darauf eine Form für den Grundzustand als Funktion von Parametern $a_1, a_2, \ldots, a_N$, also $\psi(x) = \psi(x, a_1, \ldots, a_N)$, anzusetzen und durch Minimierung von $E(a_1, \ldots, a_N) = \langle \psi | H | \psi \rangle / \langle \psi | \psi \rangle$ eine optimale Funktion ψ und Abschätzung für E_0 zu bestimmen.
Betrachtet sei als Anwendung das Dreieckspotential in einer Dimension:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ Fx & x > 0 \end{cases}$$

a) Mit dem Variationsansatz $\psi(x) = xe^{-ax}$ bestimme man das optimale a und die Näherung für E_0. (2 Punkte)

b) Mit dem Variationsansatz $\psi(x) = x(x - a_1)e^{-a_2 x}$ bestimme man den optimalen ersten angeregten Zustand und das optimale E_1. (2 Punkte)