UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2005

Übungsblatt 10, Ausgabe 22.06.2005, abzugeben bis 27.06. und 29.06.2005
Besprechung in den Übungen in der 12. Semesterwoche (29.06.-01.07.2005)

41. **Bohrsches Atommodell und Unschärferelation (5Punkte)**
Um die Existenz diskreter elektronischer Energieniveaus der Atome und der daraus folgenden Linienspektren für Absorption und Emission elektromagnetischer Strahlung zu begründen, entwickelte Nils Bohr ein Modell, bei dem sich die Elektronen (Masse m_e, Ladung e) unter Einwirkung der Coulombwechselwirkung mit dem positiv geladenen Kern (Masse m_K, Ladung Z_e) auf Kreisbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt des Systems bewegen. Dies entspricht wegen der $\frac{1}{r}$-Abhängigkeit des Coulomb bzw. Gravitationspotentials dem Planetenproblem. Diskrete Bahnen ergeben sich aus der zusätzlichen Forderung, dass der Umfang jeder möglichen Bahn ein ganzzahliges Vielfaches der de Broglie Wellenlänge ist.

a) Berechnen Sie über die Gleichgewichtsbedingung $F_{Coulomb} = F_{Zentripetal}$ die möglichen Radien der Bahnen. (1 Punkt)

b) Geben Sie die Ausdrücke für die kinetische und die potentielle Energie des Elektrons an. Bringen Sie den Ausdruck für die Gesamtenergie auf die Form

$$E = -Ry\frac{Z^2}{n^2}$$

und berechnen Sie Rydbergkonstante Ry für $m_K = \infty$. (1 Punkt)

c) Berechnen Sie die Bahnradien und die zugehörigen Energien für die ersten drei Zustände des Wasserstoffatoms und des einfach ionisierten Heliums. Rechtfertigen Sie die Näherung $\mu = m_e$. (1 Punkt)

d) Schätzen Sie nun die Bindungsenergie des Wasserstoffatoms mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelation ab. Benutzen Sie dabei $\Delta x \approx a$, sowie $\Delta p \approx \frac{\hbar}{a}$ und machen Sie dies plausibel. Berechnen Sie den Abstand a des Elektrons vom Kern, bei dem die Gesamtenergie minimiert wird. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus c). (1 Punkt)

e) Nach der Elektrodynamik erwartet man, dass das Elektron auf seiner Kreisbahn Energie abstrahlt und somit nach kurzer Zeit in den Kern fällt. Zeigen Sie, dass dies nach der Unschärferelation nicht möglich ist.

(1 Punkt)

42. **Elektronenspin (4 Punkte)**
In einem einfachen Modell für das Elektron nimmt man an, dass Masse und Ladung gleichmäßig auf das Volumen einer Kugel mit dem Radius r_e verteilt sind. Über eine Energiebetrachtung wurde in Aufgabe 9 f) der Radius des Elektrons abgeschätzt zu $r_e = 2.810^{-15} m$. Nimmt man zusätzlich an, dass sich das Elektron mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die eigene Achse dreht, ergibt sich durch die rotierende Ladung ein magnetisches Moment μ.

   a) Berechnen Sie in diesem Bild die Größe des magnetischen Moments. Ermitteln Sie mit dem experimentell gefundenen Wert $\mu = 1.8510^{-23} Am^2$ die klassische Winkelgeschwindigkeit und den Wert der Umlaufgeschwindigkeit am Äquator der Kugel. Vergleichen Sie den Wert mit dem Betrag der Lichtgeschwindikeit. (2 Punkte)

   b) In einer zweiten Abschätzung soll der Elektronenspin mit dem Betrag als mechanischer Eigendrehimpuls der Kugel behandelt werden. Bestimmen Sie über das Trägheitsmoment der Kugel wiederum Winkel- und Äquatorialgeschwindigkeit und vergleichen Sie mit a). Diese Abschätzungen aus dem einfachen Modell zeigen, dass es kein klassisch-anschauliches Bild gibt, mit dem alle Eigenschaften des Elektrons befriedigend beschrieben werden können. Abhilfe bringt hier erst die Quantenelektrodynamik.

   (2 Punkte)

43. **Eigenfunktionen des Drehimpuls (6 Punkte)**
Ausgehend von der Darstellung von L_+

$$L_+ = \hbar e^{i\varphi}(\partial_\vartheta + i \cot\vartheta \partial_\varphi) \tag{1}$$

und den aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften der Drehimpulseigenzustände

$$\begin{aligned} L_+ \mid l\, m = l\rangle &= 0 \\ L_- \mid l\, m\rangle &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)} \mid l\, m-1\rangle, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $L_- = L_+^\dagger$ gilt, zeige man die folgenden Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \langle \vartheta\varphi \mid l\, m\rangle = e^{im\varphi} F_l^m(\vartheta). \tag{3}$$

   a) Zeigen Sie zuerst, dass in Kugelkoordinaten L_+, wie oben angegeben, dargestellt werden kann. (1 Punkt)

   b) Es gilt $F_l^l(\vartheta) = c_l(\sin\vartheta)^l$ mit Konstante c_l.
   Hinweis: Verwenden Sie $\xi = \sin\vartheta$ als Variable. Bestimmen Sie c_l aus der Normierung über den Raumwinkel $\int d\Omega \mid Y_l^l(\vartheta, \varphi) \mid^2 = 1$. Man wählt $c_l \in \mathbb{R}$ mit c_l positiv/negativ für gerade/ungerade l. (1 Punkt)

   c) Bestimmen Sie die Kugelflächenfunktionen zu $l = 0, 1$ und 2 und zeichnen Sie deren Polardiagramme. (2 Punkte)

   d) Zeigen Sie die Orthogonalität der Y_l^m

$$\int d\Omega\, (Y_{l'}^{m'}(\vartheta, \varphi))^*\, Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{4}$$

   und bestimmen Sie damit die Entwicklungskoeffizienten c_l^m der Darstellung einer Funktion auf der Kugel

$$F(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} c_l^m\, Y_l^m(\vartheta, \varphi) \tag{5}$$

   (1 Punkt)

e) Zeigen Sie, dass unter Spiegelung $\hat{\mathbf{r}} \to -\hat{\mathbf{r}}$ gilt $Y_l^m \to (-1)^l Y_l^m$. (1 Punkt)

44. **Harmonischer Kugeloszillator (7 Punkte)**
Die Schwingungsbewegung eines Ions, das als Fehlstelle in einen kubischen Kristall eingebaut ist, werde durch einen isotropen drei-dimensionalen harmonischen Oszillator beschrieben

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\mathbf{r}^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{6}$$

a) Begründen Sie, dass das System von Eigenfunktionen gegeben ist durch

$$\Psi_{n_1 n_2 n_3}(\mathbf{r}) = \Psi_{n_1}(x)\Psi_{n_2}(y)\Psi_{n_3}(z) \quad \text{mit} \quad n_i = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

wobei die Ψ_{n_i} die Lösungen des eindimensionalen harmonischen Oszillators sind.
Diskutieren Sie die Entartung der vier niedrigsten Energieniveaus. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator H_0 und die Operatoren L^2 und L_z simultan diagonalisiert werden können, wobei $\mathbf{L}$ der Bahndrehimpuls ist.
Stellen Sie durch Linearkombination der $\Psi_{n_1 n_2 n_3}$ die gemeinsamen Eigenfunktionen von H_0, L^2 und L_z zu den drei niedrigsten Niveaus auf. (2 Punkte)

c) Durch Anlegen eines äußeren Druckes werde ein Quadropolfeld erzeugt, so dass das Ion zusätzlich das Potential

$$V'(\mathbf{r}) = Q(x^2 + y^2 - 2z^2) \tag{8}$$

spürt.

(i) Bestimmen Sie die Energieniveaus und die zugehörigen Quantenzahlen und Entartungsgrade. (1 Punkt)

(ii) Entwickeln Sie die Energieniveaus in 2ter Ordnung in Q. (1 Punkt)

(iii) Skizzieren Sie das Termschema als Funktion von Q. (1 Punkt)