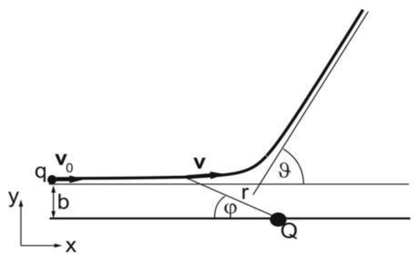
UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2005

Übungsblatt 1, Ausgabe 20.04.2005, abzugeben bis 25.04. und 27.04.2005
Besprechung in den Übungen in der 3. Semesterwoche (27.-29.04.2005)

5. **Rutherford-Streuung (7 Punkte)**



Beweisen Sie die Rutherford'sche Streuformel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\mu v_0^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$$

Gerechnet wird im Relativkoordinatensystem, d.h. die Streuung ist äquivalent der Bewegung eines Teilchens mit Ladung q und reduzierte Masse μ in dem System, in dem der streuende Kern mit Ladung Q ruht.

a) Leiten Sie zunächst die Beziehung

$$\cot\frac{\vartheta}{2} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{qQ}\mu v_0^2\, b$$

zwischen dem Stoßparameter b und dem Streuwinkel ϑ her. Dazu ist es nützlich, für jeden Bahnpunkt den erhaltenen Drehimpuls bezüglich des Punktes Q in Polarkoordinaten auszudrücken. Es sind dann die Anteile der Coulombkraft in y-Richtung entlang der Bahn aufzuintegrieren und mit dem Endimpuls senkrecht zur ursprünglichen Flugrichtung gleichzusetzen. (2 Punkte)
Hinweis: Siehe auch Aufgabe 39, IK III.

b) Erläutern Sie die Formel für den differentiellen Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = b \left| \frac{db}{d\vartheta} \right| \frac{1}{\sin\vartheta}$$

indem Sie anhand einer Zeichnung betrachten, in welchen Raumwinkelbereich die in einem Kreisring der Breite db im Abstand b vom Streuer einfallenden Teilchen gestreut werden. Setzen Sie dann b und $\frac{db}{d\vartheta}$ aus a) ein. (2 Punkte)

c) Ein parallel gerichteter Strahl von α-Teilchen der kinetischen Energie 4,8 MeV trifft senkrecht auf eine Aluminiumfolie der Dicke $2 \cdot 10^{-5} m$. Die Strahlintensität betrage 10^6 Teilchen pro Sekunde. Wieviele Teilchen werden pro Minute in einem Detektor gezählt, der unter 30° zur Einfallsrichtung aufgebaut ist und in ϑ und φ jeweils $\pm 2°$ überdeckt? Für Aluminium $\rho = 2,7 \cdot 10^3 kg/m^3, Z = 13, A = 27$. (2 Punkte)
Hinweis: Bilden Sie aus Teilchendichte und Dicke der Folie zunächst eine Säulendichte.

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta \sin\vartheta \sin^{-4}\frac{\vartheta}{2} = 4 \int_{\sin\vartheta_1}^{\sin\vartheta_2} \sin^{-3}\frac{\vartheta}{2}\, d(\sin\frac{\vartheta}{2})$$

d) Erklären Sie, weswegen Rutherfords Beobachtungen im Rahmen der klassischen Physik nicht verstanden werden konnten. (1 Punkt)

6. **Planck'scher Strahler und wie schnell der Kaffee kalt wird (6 Punkte)**

a) Geben Sie die Lage des Intensitätsmaximus der Planck'schen Strahlung

$$S_\lambda^\star = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/k_BT\lambda} - 1}$$

als Funktion der Temperatur an, leiten Sie also das Wien'sche Verschiebungsgesetz her. Vergleichen Sie λ_{max} mit der Frequenz ω_{max}, bei der

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT} - 1}$$

das Planck'sche Strahlungsgesetz laut der Vorlesung maximal wird. Weswegen gilt nicht $\omega_{max}\lambda_{max} = 2\pi c$? (2 Punkte)
Hinweis: Die Gleichungen für die Extrema sind nicht analytisch auflösbar; suchen Sie die (näherungsweise) Lösungen, zeichnerisch oder numerisch.

b) Beweisen Sie das Stefan-Boltzmann'sche Strahlungsgesetz $P = \sigma \cdot T^4, \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}$, indem Sie die Energiedichte der Hohlraumstrahlung $u(\omega, T)$ über den gesamten Frequenzbereich von 0 bis ∞ integrieren. Um aus der Energiedichte die von einer Flächeneinheit abgegebene Strahlungsleistung P zu bekommen, ist diese zum einen mit der Lichtgeschwindigkeit zu multiplizieren und zum anderen (für in einen Halbraum herauslaufende Photonen) durch vier (!) zu dividieren. (Warum?)

(2 Punkte)

Hinweise zur Integration

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{nx} \quad ; \quad \int_0^{\infty} x^3 e^{nx} = \frac{3!}{n^4} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

c) Betrachten Sie eine Thermoskanne als Zylinder mit Durchmesser 10 cm und Höhe 25 cm. Vernachlässigen Sie den Boden und den Deckel, rechnen Sie nur mit der Zylindermantelfläche. Der Flächenunterschied der inneren und äußeren Zylindermantelflächen des Isoliervakuums sei ebenfalls vernachlässigbar. Die (vorgewärmte) Kanne wird mit $350K$ heißer Flüssigkeit (Wasser, Wärmekapazität $18,0\frac{cal}{mol\cdot K}$, $\quad 1cal = 4,184$ Joule) vollgefüllt. Nach welcher Zeit ist soviel Wärme abgegeben, dass die Wassertemperatur nur noch $310K$ beträgt? Rechnen Sie zunächst nur mit (ungehinderter) Energieabgabe in das Isoliervakuum über Wärmestrahlung nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz. Wie ändert sich das Ergebnis, wenn man berücksichtigt, dass die Außenwand (auf $300K$) ebenfalls Wärmestrahlung nach innen aussendet, die der innere Bereich mit der Flüssigkeit als 'schwarzer Strahler' vollständig absorbiert? (2 Punkte)

Hinweis:

$$\int \frac{dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^3}\ln\frac{a+x}{a-x} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a}.$$

7. **Streuung harter Kugeln und Scheiben (6 Punkte)**

Eine harte Kugel 1 mit Radius R und Masse m wird an einer gleichen Kugel 2 gestreut.

a) Bestimmen Sie den Stoßparameter $b(\vartheta)$ als Funktion des Streuwinkels ϑ und daraus den differentiellen sowie den totalen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ und σ, wenn Kugel 2 festgehalten wird. (3 Punkte)
Hinweis: Zwischen den gestreuten Teilchen pro Zeit dN und dem differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma$ besteht folgender Zusammenhang $dN = I d\sigma$, mit I eingehendem Strom. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen dN und der Änderung des Stoßparameters db, um dann schließlich auf den differentiellen Wirkungsquerschnitt von Aufgabe 5b zu kommen.

b) Die Streuung von Teilchen, die sich nur in einer Ebene bewegen können, kann auch durch Wirkungsquerschnitte beschrieben werden. Leiten Sie die allgemeine Formel ab für den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\vartheta}$ der Streuung an einem Zentralpotential in zwei Dimensionen (d.h. $V(x,y) = V(\rho)$ mit $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$).
Hinweis: Die Bewegung in drei Dimensionen verläuft auch in einer Ebene, allerdings gibt es für zwei Dimensionen eine wesentliche Änderung. (2 Punkte)

c) Diskutieren Sie die Streuung einer harten Kreisscheibe mit Radius R an einer gleichen Kreisscheibe, die festgehalten wird. Vergleichen Sie die Ergebnisse der harten Scheiben mit denen der harten Kugeln. (1 Punkt)

8. **Stefan-Boltzmann Gesetz (6 Punkte)**

Ein wichtiges thermodynamisches Ergebnis, welches Planck bei der Formulierung seines Gesetzes der Hohlraumstrahlung verwenden konnte, leitete Boltzmann 1884 ab. Aufbauend auf dem Maxwellschen Ergebnis für den Impuls elektromagnetischer Strahlung im Vakuum zeigte er, dass die Energiedichte (pro Volumen) elektromagnetischer Strahlung im thermischen Gleichgewicht erfüllt:

$$u(T) = \sigma\, T^4 \,,$$

wobei die Konstante σ zum ersten Mal 1879 von Stefan gemessen worden war.

a) Rekapitulieren Sie, wie der Zusammenhang zwischen Energie und Impuls einer zirkular polarisierten, ebenen und monochromatischen Welle lautet. Die Hohlraumstrahlung ist eine inkohärente Überlagerung beliebiger solcher Wellen, die im thermischen Gleichgewicht mit den Wänden des Hohlraumes stehen. Rekapitulieren Sie Kirchhoffs Überlegung, wonach der zweite thermodynamische Hauptsatz bedingt, dass u eine universelle Funktion alleine von der Temperatur T sein muss. (1 Punkt)

b) Wie variiert der Druck einer unter dem Winkel ϑ gegen die Normale auf ein Flächenelement dA fallender Strahlung mit ϑ? Leiten Sie damit durch geeignete Winkelintegration für die isotrope Hohlraumstrahlung die Zustandsgleichung her:

$$u(T) = 3\,p\;,$$

wobei p der elektromagnetische Strahlungsdruck ist. (2 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie hierzu den Impulsübertrag der Strahlung, die aus einem Halbraum auf dA fällt.

c) Zeigen Sie durch Betrachtung der freien Energie $F(T, V)$, dass das Stefan–Boltzmann Gesetz gilt. (2 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie hierzu die zweite Ableitung $-\partial^2 F(T, V)/\partial T \partial V$, und verwenden Sie eine Maxwell Beziehung und die Zustandsgleichung von Teil b).

d) Bestimmen Sie letztlich daraus und aus dem dritten Hauptsatz der Thermodynamik, wonach die Entropie $S(T = 0) = 0$ erfüllt, die freie Energie $F(T, V)$. Was bedeutet es, dass F für elektromagnetische Strahlung nur von den beiden Variablen T und V abhängt? (1 Punkt)