UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Theorieübungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 9, Ausgabe 22.12.2010, abzugeben am 12.01.2011
Besprechung in den Übungen vom 14.01.2011

20. **Teilchenbahnen in gekreuzten elektromagnetischen Feldern; (9,5 Punkte)**
Gesucht wird die Bahnkurve eines Teilchens mit Ladung q und Masse m in homogenen und statischen elektrischen $\mathbf{E}$ und magnetischen $\mathbf{B}$ Feldern, welche senkrecht aufeinander stehen, $\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{y}}$ und $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$.
Die Lagrangefunktion für das Teilchen lautet

$$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 - q\,\phi(\mathbf{r}) + q\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})$$

mit den elektromagnetischen Potentialen, aus denen die statischen Felder folgen durch

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}\,.$$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für das Teilchen lautet

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Wahl $\phi = -E\,y$ und $\mathbf{A} = -B\,y\,\hat{\mathbf{x}}$ zu den gewünschten elektromagnetischen Feldern führt. Wie lautet dann die Lagrangefunktion? (1 Punkt)

(b) Zeigen Sie mit dem Euler-Lagrange Formalismus, dass die Lagrangefunktion aus (a) auf dieselben Bewegungsgleichungen führt wie die Newtonschen für diesen Spezialfall. (1,5 Punkte)

(c) Welche zyklischen Variablen liegen vor und welche zeitlich erhaltenen Größen folgen daraus? (2,5 Punkte)

(d) Bestimmen Sie mit dem Noetherschen Theorem (NT) ein *weiteres* Integral der Bewegung (d.h. eine weitere Erhaltungsgröße).
Hinweis: Das NT liefert für jede Symmetrie der Lagrangefunktion, d.h.

$$\tilde{L}(\mathbf{r}', \mathbf{v}', \alpha) = L(\mathbf{r}', \mathbf{v}') + \frac{d}{dt}F(\mathbf{r}', t, \alpha),$$

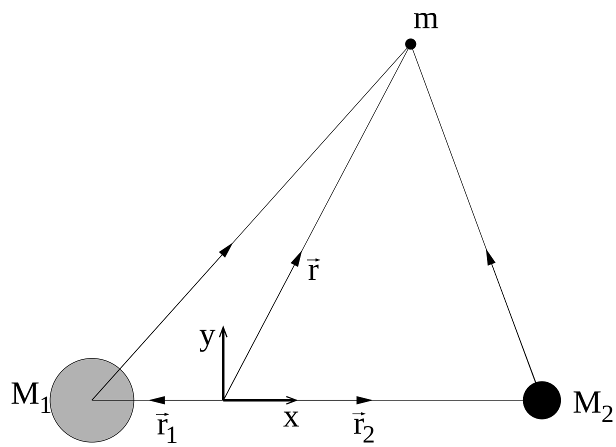
eine Erhaltungsgröße

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)\Bigg|_{\alpha=0}.$$

(1,5 Punkte)

e) Berechnen Sie die Bahnkurven $\mathbf{r}(t)$ für ein Teilchen, das zum Zeitnullpunkt am Ursprung ist und in $\hat{\mathbf{x}}$-Richtung fliegt, d.h. $\mathbf{r}(0) = 0$ und $\mathbf{v}(0) = \mathrm{v}_0\hat{\mathbf{x}}$.
Hinweis: Die komplexe Hilfsvariable $\zeta(t) = x(t) + i\,y(t)$ kann zur Lösung der Differentialgleichung nützlich sein. (3 Punkte)

21. **Lagrangesche Punkte; (8 Punkte)**
Das klassische Dreikörperproblem ist im allgemeinen nicht lösbar, da es chaotische Dynamik aufweist. Aber schon Lagrange fand spezielle Lösungen im sogenannten „eingeschränkten zirkulären Dreikörperproblem", die heute für die Positionierung von Satelliten eine Rolle spielen. Es sind dies die fünf Lagrangeschen Punkte (oder Librationspunkte), welche Gleichgewichtspunkte für leichte Objekte in der Nähe von zwei rotierenden Massen (z.B. Sonne und Erde) darstellen. Die Lagrangeschen Punkte $L_1, \ldots, L_5$ rotieren mit den Körpern mit und halten feste Abstände zu beiden ein. Im Punkt L_1 ist seit 1995 das Sonnenobservatorium SOHO stationiert.



a) Formulieren Sie die allgemeinste Lagrange Funktion für drei verschiedene Massenpunkte M_1, M_2 und m, die ein abgeschlossenes (Newtonsches) System bilden (d.h. Energie, Impuls und Drehimpuls seien erhalten) und nur Paarwechselwirkungen aufweisen. (1 Punkt)

b) Es sollen nur Gravitationskräfte wirken. Mit der Annahme, dass die Masse m so klein sei, dass sie die Bewegung der anderen beiden Massen M_1 und M_2 nicht beeinflusse, erhält man das 'eingeschränkte Dreikörperproblem'.
Lösen Sie das Keplerproblem für die beiden größeren Massen M_1 und M_2 unter der Annahme, dass die Keplerellipse zu einem Kreis entarte ('zirkuläres Problem').
Hinweis: Führen Sie eine Schwerpunkts- und eine Relativkoordinate ein. Stellen Sie die Lagrange Funktion für die Relativkoordinate im Schwerpunktsystem auf und transformieren Sie diese in Polarkoordinaten (Aufgabe 9, Blatt 4). Wie lautet die Bewegung der Relativkoordinate für eine Kreisbahn? Bestimmen Sie anhand des mittleren Radius $R = 1\mathrm{AU} = 1.5\,10^8$ km und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/\mathrm{Jahr}$ für das System Sonne-Erde die Summe der Massen $M_1 + M_2$. (2 Punkte)

c) Die Bewegung der leichten Masse m ($m \ll M_2, M_1$) werde im rotierenden Bezugssystem beschrieben, wobei die x-Achse vom Schwerpunkt zur Erde zeige und die y-Achse senkrecht dazu stehe (s. Skizze). (Da die Bewegung von M_1 und M_2 von m unabhängig ist, genügt es, in der Lagrangefunktion L nur die Terme zu betrachten, in denen m explizit auftaucht.)
Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten von m im rotierenden

Bezugssystem lauten

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} - \frac{1}{m}\frac{\partial\bar{U}}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x} - \frac{1}{m}\frac{\partial\bar{U}}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\ddot{z} = -\frac{1}{m}\frac{\partial\bar{U}}{\partial z}, \tag{3}$$

wobei das effektive Potential gegeben ist durch

$$\bar{U} = -m\left[\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{\gamma M_1}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}_1 \mid} + \frac{\gamma M_2}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}_2 \mid}\right]. \tag{4}$$

(γ ist die Gravitationskonstante). (2 Punkte)

d) Welche Erhaltungsgröße ist offensichtlich? (Sie heißt Jacobi Integral.) (1 Punkt)

e) Identifizieren Sie die Scheinkräfte in den Bewegungsgleichungen, die aufgrund der Rotation des Bezugssystems auftreten. (1 Punkt)

f) Welche drei Gleichungen legen die Lagrangeschen Punkte der konstanten Positionen von m relativ zur Erde und Sonne fest? (1 Punkt)

Die Aufgaben 18 + 21 werden besprochen in der Zentralübung am 14.01.2011 von 14ct - 16 im P 602

Gesegnete Weihnachten und einen guten Start ins Jahr 2011