UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Theorieübungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 8, Ausgabe 15.12.2010, abzugeben am 22.12.2010
Besprechung in den Übungen vom 14.01.2011

18. **Foucaultsches Pendel; (11 Punkte)**

Ein Pendel im Labor in Konstanz dreht seine Schwingungsrichtung langsam aufgrund der Rotation der Erde. Dieser Effekt soll durch Betrachtung der Coriolis-Kraft auf das Pendel bestimmt werden.

(a) Die Position des Labors auf der Erdkugel laute

$$\mathbf{R}(t) = R \begin{pmatrix} \cos\Omega\, t \;\; \sin\theta \\ \sin\Omega\, t \;\; \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

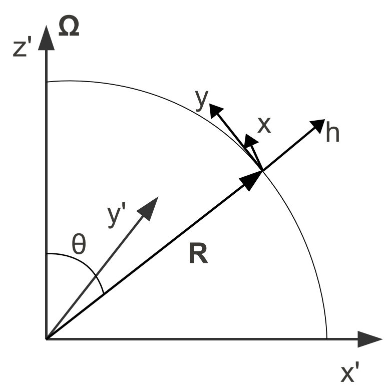
mit der Nord-Süd-Achse der Erde $\parallel \hat{\mathbf{z}}$. Welche Werte nehmen R, Ω, θ in Konstanz an? Wie groß ist die Zentrifugalkraft im Vergleich zur Erdanziehung ? (1 Punkt)

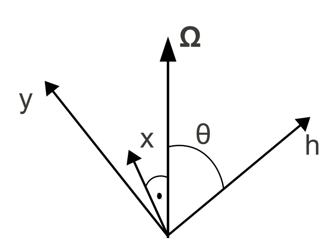
(b) Betrachten Sie die kinetische Energie T des Pendels im *unbewegten* Inertialsystem, dessen Ursprung mit dem Erdmittelpunkt zusammenfällt. Zeigen Sie, dass mit den (vertrauten) Koordinaten des Pendels im mit der Erde rotierenden Laborsystem $(h(t),\, x(t),\, y(t))$, wobei h die vertikale Höhe, und x, y die Pendelauslenkung in der horizontalen Ebene bezeichnen, die kinetische Energie T (im unbewegten System !) lautet:

$$T = \frac{m}{2}\Big[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{h}^2 + 2\,\Omega\big\{\dot{x}\,\big((R+h)\sin\theta - y\cos\theta\big) \\ -\dot{h}\,(x\sin\theta) + \dot{y}\,(x\cos\theta)\big\} + \mathcal{O}(\Omega^2)\Big],$$

wobei $\hat{\mathbf{x}}$ in Richtung Osten und $\hat{\mathbf{y}}$ in Richtung Norden zeigt und der vernachlässigte Beitrag $\mathcal{O}(\Omega^2)$ mit der Zentrifugalkraft zusammenhängt. (3 Punkte)

Hinweis: Die Geschwindigkeit in unbewegten System setzt sich zusammen aus der Geschwindigkeit im bewegten System und der durch die Erddrehung bedingten Rotationsgeschwindigkeit (ebenfalls in Koordinaten des bewegten Systems).





(c) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für *kleine* horizontale Auslenkungen $\delta x(t) = x(t) - x(0)$, $\delta y(t) = y(t) - y(0)$ des Pendels im Schwerefeld $V_{\text{grav}} = mgh$.

(3 Punkte)

Hinweise: Benutzen Sie die Zwangsbedingung, dass die Pendellänge konstant bleibt um die Koordinate h aus dem Potential zu elliminieren und benutzen Sie dabei die Tatsache, dass bei kleinen Auslenkungen δx, δy, für die vertikale Auslenkung $h(t) - h(0) \ll \delta x$, δy gilt. Zeigen Sie außerdem, dass die von h abhängigen Terme in der kinetischen Energie T vernachlässigbar sind. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} \delta\ddot{x} + \omega^2\,\delta x &= 2\tilde{\Omega}\,\delta\dot{y} \\ \delta\ddot{y} + \omega^2\,\delta y &= -2\tilde{\Omega}\,\delta\dot{x} \end{aligned}$$

Was sind ω und $\tilde{\Omega}$?

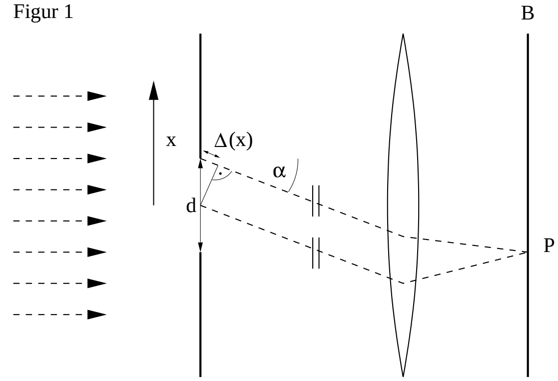
(d) Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen mit der Hilfsvariablen $\zeta(t) = \delta x + i\delta y$ und bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit der Drehung der Schwingungsebene. Gehen Sie dabei von den Ergebnissen aus Aufgabenteil (c) aus um die Differential-Gleichung für $\zeta(t)$ aufzustellen. Nehmen Sie weiterhin an, dass $\omega \gg \Omega, \tilde{\Omega}$ ist. Skizzieren Sie δx, δy als Funktionen von t, wenn das Pendel in $y-$Richtung startete ($\delta x = \delta\dot{x} = 0$ und $\delta y = y_0$, $\delta\dot{y} = 0$ für $t = 0$)

(3 Punkte)

(e) Um wieviel Grad pro Stunde dreht sich ein Pendel in Konstanz? (1 Punkt)

19. **Fraunhofer Beugung, Phasenkontrastverfahren; (10 Punkte)**
In dieser Aufgabe möchten wir die abstrakte Aussage aus der Vorlesung, das Beugungsbild bei Fraunhofer Beugung sei die Fouriertransformierte der Spaltfunktion, am Beispiel des Einzelspaltes herleiten. Desweiteren wird diese Erkenntnis auf die Wirkungsweise eines Phasenkontrastmikroskops angewendet. Zur Vereinfachnung betrachten wir Systeme, die sich in y-Richtung nicht ändern, was unsere Analyse auf die xz-Ebene beschränkt.

Figur 1



(a) Betrachten Sie in Figur 1 einen Einzelspalt, der von einer ebenen monochromatischen Welle betrahlt wird. Nach dem Prinzip von Huygens ist jeder Punkt innerhalb des Spaltes Quelle einer Kugelwelle. Die Intensität auf dem Schirm B soll berechnet werden.

i. Bestimmen sie nach Huygens den Phasenunterschied $\Delta\phi$ einer Welle am Punkt P auf dem Schirm, die von einem Punkt x im Spalt emittiert wird, als Funktion von $\Delta(x)$ und der Wellenlänge λ.
Hinweis: Die Wirkung der Linse wird erst in Aufgabenteil c) besprochen und wird hier nicht betrachtet.

ii. Um die Amplitude des E-Feldes am Punkt P zu erhalten, müssen wir die Phasen $e^{i\phi}$ der Wellen von allen Punkten x im Spalt aufsummieren oder aufintegrieren. Leiten Sie folgenden Ausdruck für die Amplitude her,

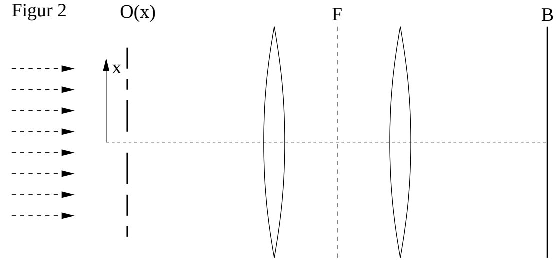
$$E \propto \int_{-d/2}^{d/2} dx\, e^{i\, k(\alpha)\, x}.$$

Dies ist die Fouriertransformierte für $k(\alpha)$. Wie lautet $k(\alpha)$?

(2 Punkte)

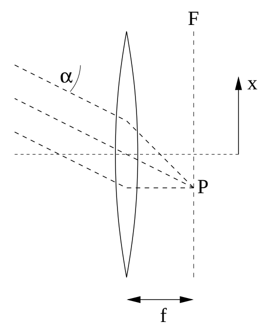
(b) Lösen Sie obiges Integral und berechnen Sie damit die Intensitätsverteilung auf dem Schirm für einen Einzelspalt als Funktion des Winkels α. (1 Punkt)

Figur 2



(c) Figur 2 zeigt die Abbildung eines Objektes in der Objektebene in die Bildebene B. Als Objektfunktion $O(x)$ definieren wir die Amplitude des E-Feldes in der Objektebene. Diese Abbildung kann als Fouriertransformation der Objektfunktion $O(x)$ in die Brennebene F und einer Rücktransformation in die Bildebene B angesehen werden.

Bestimmen Sie anhand nebenstehender Zeichnung die Position x des Punktes P in der Brennebene als Funktion des Winkels α für eine ideale dünne Linse mit Brennweite f. Bestimmen Sie daraus die Skalierung der k-Achse, $x(k)$. Wo liegt also das erste Minimum für einen Einzelspalt? ($d = 2\mu$m, $\lambda = 600$ nm, $f = 15$ cm)



Skizzieren Sie die Intensitätsverteilung in der Brennebene F für die folgenden Fälle:

i. Das Objekt ist ein sehr großer Spalt,

$$O(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für} - L < x < L \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \text{ mit } L \to \infty.$$

ii. Das Objekt ist ein unendlich kleiner Punkt, $O(x) = \delta(x)$.

iii. Das Objekt ist ein regelmäßiges Strichgitter mit Abstand l, $O(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(x - n\, l)$.

(3 Punkte)

(d) Das regelmäßige Strichgitter weise kleine Defekte (zum Beispiel Verschmutzungen) auf. Zeichnen Sie einen Fourierfilter in der Brennebene, der die durch die Defekte auftretenden unerwünschten Fouriermoden herausfiltert, so dass das Bild wieder ein schönes Gitter ist. (1 Punkt)

(e) Viele biologische Objekte wie Zellen sind lichtdurchlässig, was ihre Beobachtung mit dem Mikroskop erschwert. Das Phasenkontrastverfahren, für das F. Zernicke 1953 den Nobelpreis erhielt, nutzt die Tatsache aus, dass optisch dichtere Medien eine Phasenverschiebung der Lichtwellen bewirken. Im folgen wird die Objektfunktion $O(x) = A\, e^{i\psi(x)}$ betrachtet. A sei eine Konstante. $O(x)$ beschreibt ein nichtabsorbierendes Objekt mit Brechungsindex $n \neq 1$, das in der Objektebene liegt. Es ändert die Phase, nicht aber die Intensität des Lichtes, von dem es durchstrahlt wird, $|O(x)|^2 = A^2$. Die Phasenverschiebung sei klein, so dass wir $O(x) \approx A\,(1 + i\psi(x) + \mathcal{O}(\psi(x)^2))$ schreiben können.

i. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\tilde{O}(k)$ von $O(x)$ als Funktion von $\tilde{\psi}(k)$. Vernachlässigen Sie Terme $\mathcal{O}(\tilde{\psi}(k)^2)$. Berechnen Sie durch Rücktransformation die Bildfunktion $B(x)$. Zeigen Sie, dass $|B(x)|^2 = konst + \mathcal{O}(\psi^2)$. Was können Sie dadurch über die Sichtbarkeit des Objektes sagen?

ii. Beim Phasenkontrastverfahren wird im Zentrum der Ebene F ein kleines $\lambda/4$ Plättchen eingefügt, welches die Phase der Fouriertransformierten $\tilde{O}(k)$ bei $k = 0$ um $\pi/2$ verschiebt. Wie lautet die veränderte Fouriertransformierte $\tilde{O}'(k)$? Berechnen Sie die Bildfunktion $B'(x)$ sowie $|B'(x)|^2$ in erster Ordnung in $\psi(x)$. Was können Sie nun über die Sichtbarkeit des Objektes aussagen?

(3 Punkte)