UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Theorieübungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 7, Ausgabe 08.12.2010, abzugeben am 15.12.2010
Besprechung in den Übungen vom 17.12.2010

16. **Greensche Funktion der Elektrostatik; (7 Punkte)**

(a) In der Elektrostatik interessiert man sich für das (zeitunabhängige) elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ bei gegebenen Ladungsverteilungen $\rho(\mathbf{r})$.
Zeigen Sie, dass im Vakuum das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$, aus dem das E-Feld sich über $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ ergibt, die Poissonsche Gleichung erfüllt:

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\epsilon_\mathbf{0} \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Greensche Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, die

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{und} \quad \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \to \mathbf{0} \qquad \mathbf{r} \to \infty \tag{2}$$

erfüllt (∇^2 wirkt auf $\mathbf{r}$), und mit der die Lösung von GL (1) lautet

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \mathbf{d^3r'}\, \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, \rho(\mathbf{r}')/\varepsilon_\mathbf{0}$$

Wie interpretieren Sie das Ergebnis?
Hinweis: Fouriertransformation der Gleichung führt mit $\int d^3R\; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\delta(\mathbf{R}) = \mathbf{1}; \mathbf{R} := \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ auf eine algebraische Gleichung, aus der sich die Greenfunktion
$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mathbf{G}(\mathbf{R})$ durch Rücktransformation (Kugelkoordinaten!) mit Hilfe des Integrals $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$ bestimmen lässt. (3 Punkte)

(b) Greensche Funktionen hängen von den Randbedingungen ab. Am Beispiel des elektrischen Potential einer Ladungsverteilung vor einer Metallplatte (die in $z \leq 0$ liegt) kann dies mit der Methode der Spiegelladungen leicht gezeigt werden.

i. Das elektrische Feld $\mathbf{E}$ in einem idealen Leiter erfüllt $\mathbf{E} \equiv 0 (D \equiv 0)$ und an der Leiteroberfläche springt die Normalkomponente von $\mathbf{D}$ um die Oberflächenladungsdichte σ_F. Wie gerichtet ist also $\mathbf{E}$ auf der Leiteroberfläche $z = 0$? (1 Punkt)

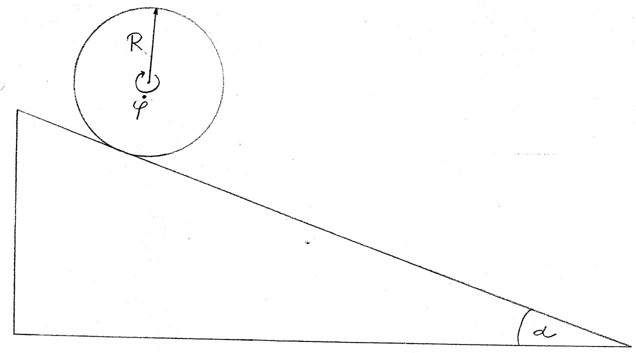
ii. Verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass das Feld einer Punktladung q im Abstand $z_o > 0$ vor dem Metall so lautet, als ob bei $-z_o$ eine Spiegelladung $-q$ säße. (2 Punkte)

iii. Wie lautet also für $z > 0$ die Greensche Funktion vor einem idealer Leiter für $z \leq 0$?
Hinweis: Verwenden Sie, dass das Potential bei $\mathbf{r}$ einer Punktladung q bei $\mathbf{r}_o$ gegeben ist durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{\varepsilon_o}\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r_0})$$

(1 Punkt)

17. **Mechanik Spielereien; (9 Punkte)**
(A) Rollendes Fass



Ein leeres Fass rolle ohne zu gleiten eine Rampe hinunter.

(a) Als Zwangsbedingung tritt die sogenannte Rollbedingung auf. Auf den ersten Blick ist diese nicht holonom. Zeigen Sie, dass diese auf eine holonome Zwangsbedingung zurückgeführt werden kann. (1 Punkt)

(b) Stellen Sie die Lagrangegleichungen auf und lösen Sie sie. (1 Punkt)

(c) Vergleichen Sie die Geschwindigkeit des rollenden Fasses mit der Geschwindigkeit beim freien Fall. (1 Punkt)

(B) Jojo
Gegeben sei ein Jojo mit Trägheitsmoment I und Achsenradius r (siehe Abb. 1). Näherungsweise sei die Schnur verschwindend dünn, masselos und beliebig lang, so dass sie stets senkrecht bleibt. Sie ist an einem Punkt auf der Achse befestigt.

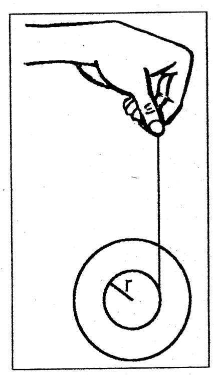


Abbildung 1:

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion L auf und eleminieren Sie die Zwangsbedingungen für den Fall der teilweise aufgewickelten Schnur, und dass der Befestigungspunkt ruht (ohne Umkehrpunkt). (2 Punkte)

(b) Welche Sinkbewegung führt das Jojo aus? (1 Punkt)

(C) Paraboloid
Eine punktförmige Masse m bewege sich nur unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einem glatten Rotationsparaboloid

$$z = c(x^2 + y^2); \qquad c > 0 \tag{3}$$

(a) Schreiben Sie die Lagrangefunktion in ebenen Polarkoordinaten (r, ϕ). (1 Punkt)

(b) Zeigen Sie dass die z-Komponente des Drehimpulses eine Erhaltungsgrösse der Bewegung ist. (1 Punkt)

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für r auf (Euler-Lagrange) unter Verwendung von (b) (1 Punkt)