UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Theorieübungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 5, Ausgabe 24.11.2010, abzugeben am 01.12.2010
Besprechung in den Übungen vom 03.12.2010

11. **Elektromagnetische Wellen in Ohm'schen Leitern; (10 Punkte)**
Für einen elektrischen Leiter mit der Leitfähigkeit σ gelte das Ohm'sche Gesetz $\vec{j}^{int} = \sigma\vec{E}$. Außerdem gelten die konstituierenden Gleichungen $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, $\dot{\vec{P}} = \vec{j}^{int}$ und $\vec{H} = \mu_0^{-1}\vec{B}$ $(\mu = 1)$.

   (a) Zur Zeit $t = 0$ sei im Leiter eine Ladungsverteilung $\rho_0(\vec{r})$ vorhanden. Bestimmen Sie mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen die zeitliche Entwicklung von $\rho(\vec{r}, t)$. Was ist die charakteristische Zeitskala τ, so dass für $t \gg \tau$ die Näherung $\rho = 0$ gilt, und was folgt im Grenzfall des idealen Leiters $(\sigma \to \infty)$? Was gilt insbesondere im Fall $\rho_0(\vec{r}) = 0$?

   (1 Punkt)

   (b) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen je eine geschlossene Gleichung für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in einem ungeladenen Ohm'schen Metall ab. (Welche Gleichung erhalten Sie im Grenzfall $\sigma \to 0$?)

   Hinweis: Verwenden Sie die Identität $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$. (2 Punkte)

   (c) Verwenden Sie als Lösungsansatz ebene, monochromatische Wellen: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$. Was folgt damit als Lösbarkeitsbedingung oder Dispersionsrelation? Bestimmen Sie daraus den komplexen Brechungsindex $n' = n(1 - i\kappa)$ mit $n, \kappa \in \mathbb{R}$, der definiert ist durch $k = (\omega/c)n'$. Wie tief kann demnach eine elektromagnetische Welle in einen guten Ohm'schen Leiter eindringen? (3 Punkte)

   (d) Betrachten Sie den Fall, dass eine ebene, monochromatische Welle aus dem Vakuum senkrecht auf die Leiteroberfläche trifft. In der Vorlesung wurde für die zeitlich gemittelte Energiestromdichte einer monochromatischen Welle im Vakuum die Beziehung $\langle\vec{S}\rangle = (\epsilon_0 c^2/2)\,\mathrm{Re}\{\vec{E}^* \times \vec{B}\}$ hergeleitet. Bestimmen Sie damit den Reflexionskoeffizienten $r = -\langle S_R\rangle/\langle S_I\rangle$ (wobei $S = \vec{S}\cdot\vec{e}_z$).

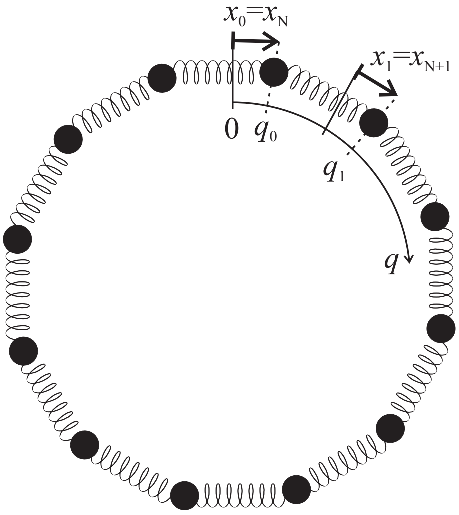
   Hinweis: Verwenden Sie die Stetigkeitsbedingungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ an Grenzflächen ohne Oberflächenladungen und -ströme. (2 Punkte)

   (e) Gehen Sie nun über zum idealen Metall, das durch $\sigma \to \infty$ charakterisiert ist. Was folgt für den Reflexionskoeffizienten? Was lässt sich über die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ direkt an der Metalloberfläche aussagen? Was folgt aus dem Verhalten von $\vec{B}$ für die Stromdichte? (2 Punkte)

12. **Schwingungen in kreisförmiger Kette; (6 Punkte)**

N identische Teilchen der Masse m werden mit N identischen Federn (die nicht notwendigerweise ein lineares Kraftgesetz aufweisen) zu einem Adventskranz verbunden. Die Koordinaten längs des Rings seien q_j ($j = 0, \ldots, N-1$).

a) Setzen Sie eine potentielle Energie $u(q_{j+1} - q_j)$ zwischen jedem Paar von benachbarten Teilchen an (Formel geeignet modifiziert für „Ringschluss"), wobei die Funktion u ein Minimum $u(a) = u_0$ besitzt. Welche Ruhelage $q_j^{(0)}$ der N Teilchen wird sich einstellen?



Den so gefundenen Ringumfang halten wir nun fest und erlauben den Teilchen nur noch eindimensionale Bewegung entlang des Kreises (s. Skizze), die wir durch die Auslenkungen $\mathbf{x}$ aus der Ruhelage $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 - q_0^{(0)} \\ \vdots \\ q_{N-1} - q_{N-1}^{(0)} \end{pmatrix}$ beschreiben.

Die *periodischen Randbedingungen* erlauben uns dabei, $x_{j+N} \equiv x_j$ zu identifizieren. Zeigen Sie durch Taylorentwicklung der potentiellen Energie, dass sich die Lagrangefunktion ergibt zu

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \mathcal{A} \dot{\mathbf{x}} - \frac{D}{2} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathcal{B} \mathbf{x}.$$

$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ bezeichnet den transponierten Vektor $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$. Welche Form haben die Matrizen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, was ist die Konstante $\mathcal{D}$? (1 Punkt)

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her. Schreiben Sie sie in Matrixschreibweise und komponentenweise. (1 Punkt)

c) Um die Bewegungsgleichungen zu entkoppeln, ist bei einem solchen Problem mit periodischen Randbedingungen die *diskrete Fouriertransformation* geeignet. Hierbei wird das Muster der Auslenkungen als die folgende Superposition angesetzt:

$$x_j(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_n(t) \exp(ik_n ja)$$

Welche Bedingung müssen die Wellenzahlen k_n erfüllen und warum durchläuft n gerade den Bereich $0 \ldots N-1$? Welchen Bereich durchläuft k_n? Weisen Sie nach, dass sich die Fourierkoeffizienten $\tilde{x}_n$ bestimmen lassen durch

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \exp(-ik_n ja)$$

(2 Punkte)

d) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für die sogenannten *Normalkoordinaten* $\tilde{x}_n(t)$ her und führen Sie in geeigneter Weise Kreisfrequenzen ω_n ein. Skizzieren Sie die Abhängigkeit $\omega_n(k_n)$, die man *Dispersionsrelation* nennt. (2 Punkte)