UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Theorieübungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 3, Ausgabe 10.11.2010, abzugeben am 17.11.2010
Besprechung in den Übungen vom 19.11.2010

7. **Polarisationsladungen; (3 Punkte)**

   Die Polarisations- $\mathbf{P}$ und die Magnetisierungsdichte $\mathbf{M}$ eines Materials lassen sich mit Hilfe einer internen Ladungsdichte ρ^{int} sowie einer internen Stromdichte $\mathbf{j}^{\text{int}}$ folgendermaßen definieren :

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho^{\text{int}}$$
$$\nabla \times \mathbf{M} + \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{j}^{\text{int}}$$

   (a) Welche Gleichung müssen ρ^{int} und $\mathbf{j}^{\text{int}}$ damit erfüllen? Wie lässt sich diese Gleichung physikalisch interpretieren? (1 Punkt)

   (b) Sind die Größen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{M}$ bei gegebenem ρ^{int} und $\mathbf{j}^{\text{int}}$ durch die obigen Gleichungen eindeutig bestimmt? Wenn nein, zeigen Sie, wie sich $\mathbf{P}$ und $\mathbf{M}$ transformieren lassen. (1 Punkt)

   (c) Stellen Sie aus $\rho = \rho^{\text{ext}} + \rho^{\text{int}}$ und $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{\text{ext}} + \mathbf{j}^{\text{int}}$ sowie den Maxwellgleichungen den Zusammenhang zwischen $\mathbf{E}$ und $\mathbf{D}$ bzw. $\mathbf{B}$ und $\mathbf{H}$ her. (1 Punkt)

8. **Energie/Impuls/Drehimpuls/Spindichte; (9 Punkte)**

   (a) Mit Hilfe einer Bilanzgleichung für die Leistung soll die elektromagnetische Energiedichte u_{em} und der Poyntingvektor $\mathbf{S}$ für elektromagnetische Felder bestimmt werden. Die Gesamtleistung P ergibt sich mit Hilfe der Lorentzkraft an freien (externen) Ladungen q_i (mit $i = 1, \ldots, N$). Um

$$P = \int \mathrm{d}V \mathbf{j}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{E}$$

   zu finden, verwenden und begründen Sie

$$\mathbf{j}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathrm{q_i} \mathbf{v_i}(\mathbf{t}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_i}(\mathbf{t})).$$

   Mit Hilfe der Maxwellgleichungen kann man die Bilanzgleichung auf die angegebene Form bringen und die elektromagnetische Energiedichte u_{em} und den Poyntingvektor $\mathbf{S}$ identifizieren.

$$P = -\int \mathrm{d}V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_{em} - \oint_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S}$$

Betrachten Sie zur Vereinfachung ein unmagnetisches, ideales Dielektrum.
Hinweis: Verwenden Sie die Identität

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

(3 Punkte)

(b) Aus der Betrachtung der Kräfte, die elektromagnetische Felder auf Ladungen ausüben, kann mit dem actio=reactio Prinzip die Impulsdichte $\mathbf{p}$ der elektromagnetischen Felder gefunden werden. Zur Vereinfachung der Rechnung soll im Vakuum gerechnet werden, und das zu betrachtende Volumen V den gesamten R^3 einnehmen, so dass Randterme wegen des Verschwinden der Felder im Unendlichen, z.B. $\mathbf{E}(|\mathbf{r}| \to \infty) \to 0$, vernachlässigt werden können.
Bestimmen Sie $\mathbf{p}$ in Analogie zur Ableitung der Energiedichte u.
Hinweis: Zeigen und verwenden Sie

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}V \left(\frac{1}{\mu_0} (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + \epsilon_0 (\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) \times \mathbf{E} \right) &= 0 \\ (\mathbf{X}(\nabla \cdot \mathbf{X}) - \mathbf{X} \times (\nabla \times \mathbf{X})) = \nabla \cdot (\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}) - \frac{1}{2}\nabla(X^2), \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{X}$ für $\mathbf{E}$ oder $\mathbf{B}$ steht. $\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}$ ist das Tensorprodukt. (4 Punkte)

(c) Zeigen Sie in der Eichung $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$, dass der Drehimpuls $\mathbf{L} = \int \mathrm{d}V \mathbf{L}(\mathbf{r}, t)$ geschrieben werden kann als Summe von Spin

$$\mathbf{L}_s = \varepsilon_0 \int \mathrm{d}V \, \mathbf{A} \times \dot{\mathbf{A}}$$

und Bahndrehimpuls $\mathbf{L}_B$, der vom Bezugspunkt des Koordinatensystems abhängt, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_s + \mathbf{L}_B$. Bestimmen Sie $\mathbf{L}_B$. (2 Punkt)