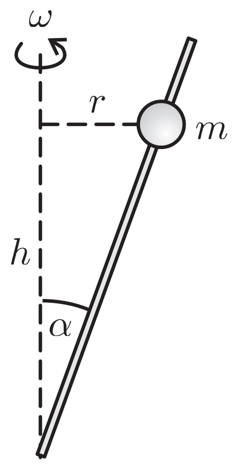
UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Theorieübungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 2, Ausgabe 03.11.2010, abzugeben am 10.11.2010
Besprechung in den Übungen vom 12.11.2010

5. **Perle auf rotierendem Draht; (6 Punkte)**
Eine Perle gleitet reibungsfrei auf einem geraden, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Drahtstück, das um den festen Winkel α gegenüber seiner Rotationsachse und der Richtung der Gravitationskraft geneigt ist.



   (a) Geben Sie die kinetische und potentielle Energie T und U des Teilchens in (geeigneten) Zylinderkoordinaten an. Stellen Sie dann eine Lagrange Funktion $\mathcal{L}(\dot{h}, h, \alpha, \omega) = T - U$ auf, indem Sie r durch h und α substituieren. Verwenden Sie die Euler-Lagrange-Gl. um aus $\mathcal{L}$ die Bewegungsgleichung des Systems abzuleiten. (2 Punkte)

   Hinweis: Formulieren Sie die Teilchengeschwindigkeit entweder in zylindrischen Koordinaten, oder transformieren Sie ausgehend von kartesischen.

   (b) Berechnen Sie ohne explizites Lösen der Bewegungsgleichung die Höhe $h(\alpha, \omega)$ der Perle, in der das System stationär bleibt. (2 Punkte)

   (c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung. (2 Punkte)
   Hinweis: Berechnen Sie als Zwischenschritt die homogene Lösung des Systems.

6. **Lorentzsches Atommodell; (15 Punkte)**
Dem Materiemodell des polarisierbaren Dielektrikums liegen verschiedene Modelle gebundener Punktladungen zugrunde. Dies soll in der folgenden Aufgabe diskutiert werden.

Aus der Vorlesung sind Ihnen die Maxwellgleichungen ohne äußere Ladungen und Ströme in folgender Form bekannt:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \partial_t \boldsymbol{D}.$$

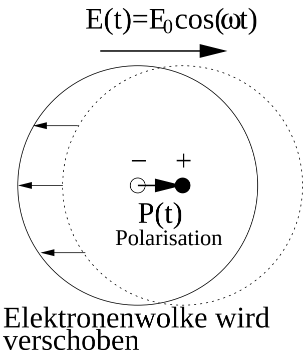
Bei einem polarisierbaren Dielektrikum werden diese noch durch folgende Materialgleichungen ergänzt:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}.$$

Die aus der Vorlesung bekannte Bewegungsgleichung (1) für die Polarisation (erweitert um einen Dämpfungsterm) soll im Folgenden abgeleitet werden.

$$\partial_t^2 \boldsymbol{P} + \gamma \partial_t \boldsymbol{P} + \omega_0^2 \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \omega_P^2 \boldsymbol{E} \tag{1}$$

(a) Leiten Sie das Modell des polarisierbaren Dielektrikums aus dem Lorentzschen Oszillator Modell ab. Betrachten Sie dazu ein einzelnes Elektron (Ladung $-e$, Masse m_e), welches durch eine Feder (mit Federkonstanten D) fest gebunden ist. Erweitern Sie die Bewegungsgleichung für die Auslenkung $\boldsymbol{x}(t)$ des Elektrons um einen Newtonschen Dämpfungsterm $-m_e \zeta \partial_t \boldsymbol{x}$, sowie eine äußere Kraft durch eine elektromagnetische Welle mit der Frequenz ω.



Zur Lösung der Differenzialgleichung machen Sie den Ansatz

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0(\omega) e^{i\omega t}.$$

Die frequenzabhängige Polarisation ist dann durch

$$\boldsymbol{P}_0(\omega) = -en\boldsymbol{x}_0(\omega),$$

mit Elementarladung e und Elektronendichte n, gegeben.
Was ergibt sich für die Parameter γ, ω_0 und ω_P? Welcher neue Term tritt in Folge der Dämpfung auf? Geben Sie die Maxwellgleichungen in Abhängigkeit der Felder $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{P}$, sowie die Bewegungsgleichung für $\boldsymbol{P}$ an. (2 Punkte)

(b) Dieses gekoppelte Differenzialgleichungssystem soll mit Hilfe ebener monochromatischer Wellen der Form

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \quad \boldsymbol{A} \in \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}\}.$$

zu algebraischen Gleichungen vereinfacht werden. (1 Punkt)

(c) Für die weitere Rechnung wird benötigt, dass sich jeder Vektor $\boldsymbol{A}_0$ in eine Komponente $\boldsymbol{A}_0^{\parallel}$ parallel und eine $\boldsymbol{A}_0^{\perp}$ senkrecht zu $\boldsymbol{k}$ zerlegen lässt:

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}_0^{\parallel} + \boldsymbol{A}_0^{\perp},$$
$$\boldsymbol{A}_0^{\parallel} = (\boldsymbol{A}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{k}})\hat{\boldsymbol{k}}, \qquad \boldsymbol{A}_0^{\perp} = (\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{A}_0) \times \hat{\boldsymbol{k}},$$

mit Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{k}}$ in $\boldsymbol{k}$-Richtung. Zeigen Sie diese Relation der Vektoranalysis und zerlegen Sie damit die algebraischen Gleichungen in longitudinale und transversale. Was ist der Vorteil dieser Zerlegung? (2 Punkte)

(d) Aus der Kombination der longitudinalen Anteile erhält man eine Bestimmungsgleichung für ω. Wie lautet diese? Machen Sie eine Fallunterscheidung, indem Sie Annahmen über die Größe der Dämpfung, verglichen mit ω_0 und ω_P, machen. Welches zeitliche Verhalten ist dabei immer dasselbe? Wenn man die Bestimmungsgleichung für ω als Dispersionsrelation auffasst, erhält man eine etwas unerwartete Eigenschaft für diese Art der Anregung (Exziton aus der Festkörperphysik). (2 Punkte)

(e) Die Dielektrizitätskonstante ε des polarisierbaren Dielektrikums kann man aus $\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ bestimmen. Geben Sie diese als Funktion der Frequenz ω an (getrennt in Realteil $\varepsilon'(\omega)$ und Imaginärteil $\varepsilon''(\omega)$). Stellen Sie diese Funktionen graphisch dar. Wie wirkt sich die Stärke der Dämpfung auf den Real- und Imaginärteil aus?

Die Dielektrizitätskonstante tritt auch bei der Bestimmung der Dispersionsrelation für die transversalen Anteile auf. Bestimmen Sie $\omega(k)$ und stellen Sie diese graphisch (ohne Dämpfung, d.h. $\gamma = 0$) dar. Zeichnen Sie auch das Ergebnis für den longitudinalen Fall ein. Wie lässt sich $\omega(k)$ graphisch mit Hilfe von $\varepsilon(k)$ bestimmen? (3 Punkte)

Nun soll obiges Modell zu einem für klassischen Ladungstransports in Metallen, dem Drude-Modell, bzw. Drude-Lorentz-Modell, modifiziert werden. Ein elektrischer Leiter wird dabei als Ionenkristall betrachtet, in dem sich Elektronen frei bewegen können ($D = 0$). Durch ein äußeres elektrisches Feld $\boldsymbol{E}$ erfahren sie eine Kraft $\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E}$ und werden beschleunigt. Stöße mit den Gitterionen führen allerdings zu ständigen Richtungsänderungen und somit wieder zu einer effektiven Newtonschen Dämpfung $-m_e\zeta\partial_t\boldsymbol{x}$ der Elektronengeschwindigkeit.

(f) Leiten Sie die Bewegungsgleichung der Elektronen analog zu Aufgabenteil (a) unter der Annahme $D = 0$ her. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den feldfreien Fall. Wie lautet $\boldsymbol{x}(t)$ für den stationären Fall $\ddot{\boldsymbol{x}} = 0$, $\boldsymbol{E} \neq 0$? (1 Punkt)

(g) Zeigen Sie mit dem Ansatz

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p(t) = \dot{\boldsymbol{x}}_h(t)\boldsymbol{\Delta}(t),$$

wobei $\dot{\boldsymbol{x}}_h$ eine homogene Lösung darstellt, wie sich eine partikuläre Lösung einer allgemeinen linearen inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung (hier für $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$) berechnen lässt (Methode der Variation der Konstanten). Berechnen Sie damit und mit der Lösung $\dot{\boldsymbol{x}}_h$ aus (f) eine partikuläre Lösung $\dot{\boldsymbol{x}}_p$ der allgemeinen Bewegungsgleichung. (2 Punkte)

(h) Welcher Zusammenhang ergibt sich zwischen der elektrischen Stromdichte $\boldsymbol{j} = -ne\dot{\boldsymbol{x}}$ und der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}$ unter Annahme konstanter Feldstärke (Ohmsches Gesetz)? Geben Sie eine Formel für die Leitfähigkeit σ an. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem stationären Fall aus (f). (1 Punkt)

(i) Berechnen Sie analog zu (h) die Lösung der Bewegungsgleichung für ein periodisches elektrisches Feld ($\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0e^{i\omega t}$). Bestimmen Sie damit die komplexe Leitfähigkeit σ. (1 Punkt)