UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

**Theorieübungen zur Physik III: Integrierter Kurs**
**Wintersemester 2010/2011**

**Übungsblatt 13**, Ausgabe 02.02.2011, abzugeben am 09.02.2011
Besprechung in den Übungen vom 11.02.2011

28. **Adiabatische Entmagnetisierung; (10 Punkte)**

Viele Anwendungen der Thermodynamik beruhen auf mathematischen Umformungen von Funktionen mehrerer Variablen. Diese Aufgabe soll an einige der mathematischen Techniken erinnern.

(a) i. Sei $z(x, y)$ eine Funktion von $x$ und $y$, die an einem Punkt sowohl nach $x$ als auch nach $y$ auflösbar sei. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y(x,z)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x(y,z)}{\partial z}\right) = -1$$

Hinweis: $\left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right) = 1/\left(\frac{\partial y(x,z)}{\partial z}\right)$ (1 Punkt)

ii. Die Legendre-Transformation wurde detailliert in Aufgabe 22 besprochen. Betrachten Sie zur Rekapitulation eine Funktion $f(x, y)$, für die gelte $df(x, y) = pdx + qdy$. Die "konjugierten" Variablen $p$ (zu $x$) und $q$ (zu $y$) sind definiert durch $p = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$ und $q = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$. Zeigen Sie durch Definition einer neuen Funktion $g = f - qy$, dass $dg = pdx - ydq$. Wir können also $g$ (die Legendre Trafo von $f$) als Funktion von $x$ und $q$ betrachten. (1 Punkt)

iii. Da die Reihenfolge von Ableitungen vertauschbar ist, gelten gewisse Beziehungen. Wie zum Beispiel:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right).$$

Mit $df(x, y) = pdx + qdy$ zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}$$

gilt. Solche Beziehungen heissen in der Thermodynamik "Maxwell Relationen".
(1 Punkt)

(b) Wir verwenden jetzt die obigen mathematischen Ideen, um einfache Thermodynamische Probleme zu lösen. Die Gibbssche Fundamentalform, die eine Beziehung zwischen den Änderungen von $E$ (Innere Energie), $T$ (Temperatur), $S$ (Entropie), $P$ (Druck) and $V$ (Volumen) gibt, lautet

$$dE = TdS - PdV.$$

Zeigen Sie, dass aus $F = E - TS$ folgt $dF = -S(T, V)dT - p(T, V)dV$. Für ein ideales Gas, mit Zustandsgleichung $PV = Nk_BT$, zeigen Sie, dass $\frac{\partial E(T,V)}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V}(F(T, V) + S(T, V)T) = 0$ gilt. Überrascht Sie dies? (1 Punkt)

(c) Wir betrachten jetzt ein einfaches magnetisches Material. Die Magnetisierungsarbeit pro Volumen eines Körpers mit dem magnetischen Moment pro Volumen $M$ beträgt $HdM$. Geben Sie eine anschauliche Erklärung hierfür. Seine Entropie $S$ ist mit der zu- oder abgeführten Wärme verknüpft über $TdS$. Führen Sie eine Legendretransformation der Gibbs'schen Fundamentalform der Energie $dE = TdS + HdM$ auf die Funktion $F = F(T, M)$ der unabhängigen Variablen $T$ und $M$ durch.

i. Als Zustandsgleichung einer idealen paramagnetischen Substanz findet man in guter Näherung das Curie-Gesetz: $M = AH/T$ ($A$ Curie-Konstante). Zeigen Sie, dass $\partial E(T, M)/\partial M = 0$ folgt. Wie interpretieren Sie das Ergebnis?
*Hinweis:* Verfolgen Sie den selben Weg wie in (b). Betrachten Sie wie $H(T, M)$ aus $F(T, M)$ durch Differentiation folgt und verwenden Sie dann die Zustandsgleichung (2 Punkte)

ii. Zeigen Sie, dass aus i. folgt, $S(T, M) = S(M = 0, T) - \frac{M^2}{2A}$. Begründen Sie somit, dass wärmeisolierte, (d.h. adiabatische, isentrope, $dS = 0$) Zustandsänderungen durch Kurven konstanter Magnetisierung gegeben sind, wenn man die Temperaturabhängigkeit der Entropie des unmagnetisierten Körpers vernachlässigen darf, $S(M = 0, T) = S_0$. (2 Punkte)

iii. Zeichnen Sie einen Carnot-Prozess im $H$-$M$- und im $T$-$S$-Diagramm.
*Hinweis:* Ein Carnotprozess besteht aus einer Abfolge von 4 Teilschritten, von denen je zwei adiabatisch und zwei isotherm verlaufen. (1 Punkt)

iv. Zeigen Sie und erklären Sie, dass sich der paramagnetische Körper durch einen isothermen und einen anschließenden isentropen Prozess abkühlen lässt (adiabatische Entmagnetisierung). (1 Punkt)

29. **Van der Pol Gleichung; (6 Punkte)**

Der niederländische Physiker Balthasar van der Pol (1889 - 1959) kam 1926 bei der Beschreibung der Oszillation von Röhrengeneratoren auf die nach ihm benannte Gleichung:

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x}(x^2 - 1) + x = 0, \tag{1}$$

wobei $\varepsilon > 0$ sein soll.
Für $x < 1$ wird das mit dieser Gleichung modellierte System getrieben (negative Dämpfung), während für $x > 1$ die Schwingung gedämpft wird. Der Parameter $\varepsilon$ bestimmt, wie nichtlinear sich das System verhält. Im folgenden soll $\varepsilon < 1$ sein.

(a) Lösen Sie zuerst Gleichung (1) regulär für $\varepsilon \to 0$ mit den Anfangsbedingungen $x(t = 0) = 1$ und $\dot{x}(t = 0) = 0$. Verwenden Sie dazu den Ansatz $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t)$ und lösen Sie die Differentialgleichung bis zur Ordnung $\varepsilon$. (2 Punkte)

(b) Welche Probleme treten bei der in (a) gefundenen Lösung für $t > \varepsilon^{-1}$ auf ? Um das Verhalten der echten Lösung zu studieren, untersuchen Sie die Lyapunov-(Energie-) Funktion $E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2)$.
Für welche Werte von $x$ nimmt $E$ mit der Zeit zu oder ab (bestimmen Sie $\frac{dE}{dt}$) ?
Setzen Sie jetzt die in (a) gefundene Lösung in $E$ ein und untersuchen Sie qualitativ das Verhalten von $E$ für $t > \varepsilon^{-1}$. (2 Punkte)

(c) Eine bessere Approximation findet man mit Hilfe der Multiskalenanalyse. Machen Sie hierzu den Ansatz $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(\tau(t), T(t))$. Zur Trennung der langsamen und schnellen Zeitskalen benutzen Sie die Variablen $\tau(t) = t$ (schnelle Oszillationszeit) und $T(t) = \varepsilon t$ (langsame Driftzeit der Amplitude). Lösen Sie jetzt die Differentialgleichung (1) mit den Anfangsbedingungen von (a) bis zur Ordnung $\varepsilon$. Skizzieren Sie die Lösung.
*Hinweis:* In der Gleichung für die Ordnung $\varepsilon^0$ erhalten Sie zwei zunächst unbestimmte Parameter $R(T)$ (Amplitude) und $\Theta(T)$ (Phase). Nutzen Sie die Freiheit in diesen Parametern um in der Gleichung für die Ordnung $\varepsilon^1$ die Terme $\sim \cos(t + \Theta)$ und $\sim \sin(t + \Theta)$ zu eliminieren. Wie lauten $R(T)$ und $\Theta(T)$?
Es ist nicht notwendig, $x_1$ explizit zu bestimmen. (2 Punkte)