UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Theorieübungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 12, Ausgabe 26.01.2011, abzugeben am 02.02.2011
Besprechung in den Übungen vom 04.02.2011

26. **Relativistische Teilchen-Kollision; (11 Punkte)**
Wir betrachten die elastische Kollision von zwei Teilchen der Ruhemasse m. Nehmen Sie dabei an, dass das zweite Teilchen im Laborsystem ruht. Wir bezeichnen die Viererimpulse der Teilchen vor dem Stoß mit $p_1^\mu = (E_1/c, \mathbf{p}_1)$ und $p_2^\mu = (E_2/c, \mathbf{p}_2)$. Als Raumkomponenten bezeichnen wir $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$.

(a) i. Geben Sie zunächst allgemein eine geeignete Transformation ${\Lambda^\nu}_\mu$ an, um den Vierervektor $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$ in einem Bezugssystem mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$ darzustellen. Wie sieht $p'^\mu = {\Lambda^\mu}_\nu\, p^\nu$ aus? (1 Punkt)

ii. Im Laborsystem soll sich (vor dem Stoß) das einfallende Teilchen in z-Richtung bewegen, während das zweite Teilchen ruht. Wie sehen die entsprechenden Viererimpulse p_1^μ und p_2^μ aus?
Im Schwerpunktsystem soll die Raumkompenente des Gesamtimpulses $p'^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu$ gerade null sein. Welche Bedingung lässt sich daraus für den Parameter $\beta = \frac{v}{c}$ der Transformation ins Schwerpunktsystem ableiten? (*Hinweis: Wählen Sie die Richtung von* $\mathbf{v}$ *so, dass sich* $\beta > 0$ *ergibt.*) Welcher Zusammenhang zwischen der Gesamtenergie $E = E_1 + E_2$ und p_1 folgt damit? Mit welchem Faktor hängen die Energien E und E' in Laborsystem und Schwerpunktsystem zusammen? (1 Punkt)

(b) Die Kollision im Schwerpunktsystem ist in der Abbildung schematisch dargestellt.

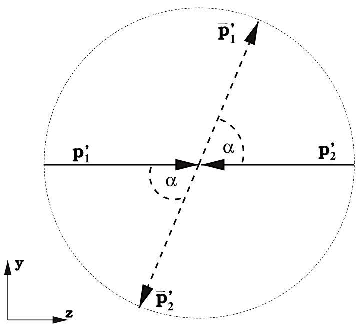

Abbildung: *Teilchen mit den Raumkomponenten* $\mathbf{p_1'}$ *und* $\mathbf{p_2'}$ *kollidieren im Schwerpunktsystem. Das Ergebnis des Stoßes ist durch* $\overline{\mathbf{p}}_1'$ *und* $\overline{\mathbf{p}}_2'$ *dargestellt.*

i. Welches Bild ergibt sich im Laborsystem? Dort bezeichnen wir den Winkel zwischen dem Raumvektor $\overline{\mathbf{p}}_\mathbf{1}$ des ersten Teilchens (nach der Kollision) und der z-Achse mit ϑ. Ist ϑ größer oder kleiner als der entsprechende Winkel α im Laborsystem? Warum? (1 Punkt)

ii. Finden Sie nun die Transformation aus dem Schwerpunktsystem zurück ins Laborsystem. Nutzen Sie diese, um den Ausdruck

$$\tan\vartheta = \frac{|\overline{\mathbf{p}}_1'|\sin\alpha}{\gamma\,|\overline{\mathbf{p}}_1'|\cos\alpha + \beta\gamma\overline{E}_1'/c}$$

herzuleiten. (1 Punkt)

iii. Verwenden Sie die in Teil (a) gefundenen Eigenschaften der Transformation ins Schwerpunktsystem, um die folgenden Transformationsgleichungen aufzustellen. Welche Bedeutung hat M? (2 Punkte)

$$|\mathbf{p}_1'| = \frac{m\,|\mathbf{p}_1|}{M}, \quad E_1' = \frac{m}{M}E$$

Hinweis: Sie benötigen dazu unter anderem den Zusammenhang zwischen E und E_1, und zwischen E_1 und p_1.

iv. Beweisen Sie nun mit Hilfe des Energie- und Impulssatzes den angegebenen Ausdruck des Winkels ϑ als Funktion von α.

$$\vartheta(\alpha) = \arctan\left(\frac{\sin\alpha}{\gamma(\cos\alpha+1)}\right)$$

Hinweis: Begründen und verwenden Sie, dass im Schwerpunktsystem $|\mathbf{p}_1'| = |\overline{\mathbf{p}}_1'|$ und $E_1' = \overline{E}_1'$ gilt. (2 Punkte)

(c) Betrachten Sie den klassischen ($v \ll c$) und ultrarelativistischen ($v \approx c$) Grenzfall. Skizzieren und interpretieren Sie die Abhängigkeit des Winkels ϑ von α. (1 Punkt)

(d) In einer inelastischen Kollision zweier Protonen ($m_p = 938,3\ \mathrm{MeV}/c^2$) soll obendrein noch ein π^0-Meson ($m_{\pi^0} = 135,0\ \mathrm{MeV}/c^2$) entstehen (neben den beiden Protonen). Auf welche Geschwindigkeit muß das erste Proton im Laborsystem mindestens beschleunigt werden? (2 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie die Gesamtviererimpulse in Labor- und Schwerpunktsystem und nutzen Sie die Invarianz des Skalarprodukts unter Lorentztransformation ($p_\mu p^\mu = p'_\mu p'^\mu$)

27. **Thomas-Präzession; (9 Punkte)**
Führt man zwei spezielle Lorentztransformationen hintereinander aus, deren Geschwindigkeitsvektoren nicht in diesselbe Richtung zeigen, dann erhält man nicht wieder eine einfache *spezielle* Lorentztransformation. Die resultierende Transformation besteht aus einer speziellen Lorentztransformation gefolgt von einer Raumdrehung. Im folgenden soll dies am vereinfachten Fall, dass die erste Transformation in x-Richtung, die zweite danach senkrecht dazu in y-Richtung erfolgt, analysiert werden.

(a) i. Führen Sie die beiden speziellen Lorentztransformationen hintereinander durch, um die Matrix $T^\mu{}_\nu$ der resultierenden Transformation zu erhalten.
Dabei sei die Geschwindigkeit des Inertialsystems IS' relativ zu IS $u\hat{\mathbf{x}}$, die von IS" relativ zu IS' sei $v\hat{\mathbf{y}}$. (1 Punkt)
Hinweis: Die z-Kompenente wird durch die beiden Lorentztranformationen nicht verändert, so dass man in der ganzen Aufgabe mit 3×3-Matrizen rechnen kann.

ii. Wir nehmen nun an, dass $T = R(\alpha)L(\mathbf{w})$ gilt, wobei R eine Drehmatrix zum Winkel α (um die z-Achse) und L eine spezielle Lorentztransformation zur Relativgeschwindigkeit $\mathbf{w}$ ist.
Überlegen Sie sich welche Komponenten von $L(\mathbf{w})$ von der Drehung $R(\alpha)$ unverändert gelassen werden. Bestimmen Sie dadurch $\gamma(w)$ und zeigen Sie, dass sich für den Betrag w der resultierenden Relativgeschwindigkeit folgendes ergibt:

$$w = c\sqrt{1-(1-\frac{v^2}{c^2})(1-\frac{u^2}{c^2})} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

iii. Eine Beobachtung nebenbei: Ist Ihr Ergebnis symmetrisch in u und v? Hätten Sie das selbe Ergebnis erhalten, wenn Sie zuerst in y- und danach in x-Richtung transformiert hätten? Fällt Ihnen eine weitere Koordinatentransformation ein, bei der die Reihenfolge eine ähnliche Rolle spielt? (1 Punkt)

(b) Eine spezielle Lorentztransformation $L(\mathbf{w})$ in die Richtung $\mathbf{w} = w_x\hat{\mathbf{x}} + w_y\hat{\mathbf{y}}$ (wobei $w^2 = w_x^2 + w_y^2$) erhält man aus der bekannten Transformation entlang der x-Richtung, indem man zuerst das Koordinatensystem so dreht, dass $\mathbf{w}$ parallel zu $\hat{\mathbf{x}}$ liegt, dann entlang x transformiert, und danach die Drehung des Koordinatensystems rüchgängig macht. (1 Punkt)

i. Bestimmen Sie zunächst die Drehmatrix R, die zu der gewünschten Drehung von $\mathbf{w}$ führt. *Hinweis:* Dabei muss gelten $w\hat{\mathbf{x}} = R\mathbf{w}$.

ii. Zeigen Sie nun durch Hintereinanderausführung von Drehung, Lorentz-transformation und Rückdrehung, dass (z-Kompenente ist wieder weggelassen)

$$L(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \gamma(w) & -\gamma(w)\frac{w_x}{c} & -\gamma(w)\frac{w_y}{c} \\ -\gamma(w)\frac{w_x}{c} & 1+(\gamma(w)-1)\frac{w_x^2}{w^2} & (\gamma(w)-1)\frac{w_x w_y}{w^2} \\ -\gamma(w)\frac{w_y}{c} & (\gamma(w)-1)\frac{w_x w_y}{w^2} & 1+(\gamma(w)-1)\frac{w_y^2}{w^2} \end{pmatrix}.$$

(1 Punkt)

iii. In Teilaufgabe (a)(ii) haben Sie überlegt, welche Kompenenten von $L(\mathbf{w})$ sich durch die Drehung nicht ändern. Bestimmen Sie nun mit Hilfe des Ergebnisses von (a)(i) die x- und y-Kompenente von $\mathbf{w}$. Verifizieren Sie hiermit nochmals den Betrag w. (*Hinweis*: Das Ergebnis lautet $w_x = u$ und $w_y = v/\gamma(u)$). (1 Punkt)

(c) Durch einen Vergleich der beiden Ergebnisse, kann der Winkel α der nachgeschalteten räumlichen Rotation bestimmt werden. Dies ist im allgemeinen Fall trotz der speziellen Geometrie immer noch algebraisch etwas aufwändig.

Deswegen soll folgende Vereinfachung betrachtet werden: Die zweite Relativ-geschwindigkeit v sei klein gegenüber u. Wegen $v \ll u < c$ werden im Folgenden also nur Terme in linearer Ordnung in $\frac{v}{u}$ und $\frac{v}{c}$ benötigt.

i. Zeigen Sie zunächst, dass in dieser Näherung $\gamma(v) \approx 1$, $\gamma(w) \approx \gamma(u) \equiv \gamma$ und $w \approx u$ gilt und bestimmen Sie die Rotationsmatrix $R(\alpha)$ in erster Ordnung in α. (1 Punkt)

ii. Vergleichen Sie nun T aus Teil (a) mit $R(\alpha)L(\mathbf{w})$ und zeigen Sie, dass diese (in erster Ordnung in $\frac{v}{u}$ und $\frac{v}{c}$) für $\alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{v}{u}$ übereinstimmen. (2 Punkte)

Diese Drehung um den Winkel α bezeichnet man als *Thomas-Präzession*. Sie gibt an, wie sich das momentane Ruhesystem eines Massenpunktes während seiner Bewegung verdreht. Das Ergebnis spielte eine wichtige Rolle zum Verständnis der relativistischen Korrekturen im Energiespektrum des Wasserstoffatoms.