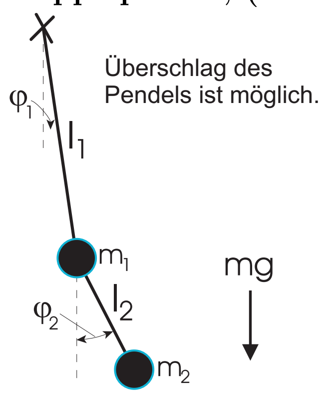
UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Theorieübungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 11, Ausgabe 19.01.2011, abzugeben am 26.01.2011
Besprechung in den Übungen vom 28.01.2011

24. **Doppelpendel; (12 Punkte)**



Gegeben sei ein Doppelpendel (siehe Zeichnung) bestehend aus zwei masselosen Stangen der Länge l_1 und l_2, an deren Enden die Massen m_1 und m_2 angebracht sind. Das erste Pendel sei an einem fixen Punkt befestigt, während das zweite Pendel an der Spitze des ersten hängt. Bitte verwenden Sie die in der Zeichnung benutzten Bezeichnungen.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen ab. (2 Punkte)

(b) Stellen Sie die Hamiltonfunktion auf und geben Sie die generalisierten Impulse an. (2 Punkte)

(c) Von nun an sei für alle Aufgabenteile $m_1 = m_2$ und $l_1 = l_2$. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen für kleine Schwingungen um die stabile Ruhelage. Geben Sie außerdem alle Fixpunkte an, an denen die Pendel ruhen können. (2 Punkte)

(d) Das Pendel sei jetzt für alle weiteren Aufgabenteile auf einer horizontalen Platte montiert ($g = 0$). Zeigen Sie mit Hilfe des Noether-Theorems, dass hier der Gesamtdrehimpuls eine Erhaltungsgröße ist und geben Sie diesen an. (2 Punkte)

(e) Gehen Sie in ein Bezugssystem, welches mit ω rotiert. Finden Sie die Fixpunkte im rotierenden Bezugssystem. (2 Punkte)

(f) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen der kleinen Schwingungen um den stabilen Fixpunkt des mit Frequenz ω rotierenden Bezugssystems. (2 Punkte)

25. **Hamiltonsche Mechanik; (15 Punkte)**

(a) i. Die Hamiltonfunktion für ein freies Teilchen im Schwerefeld der Erde laute vereinfacht

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgq.$$

Zeigen Sie, dass die Energie erhalten ist. Stellen sie darüber eine Gleichung für den Impuls als Funktion der Ortsvariablen auf. (1 Punkt)

ii. Skizzieren sie die Phasenraumtrajektorien für zwei Teilchenenergien $E^- < E^+$. Alle möglichen Teilchentrajektorien, die sich zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 Innerhalb einer Fläche $\Delta q \Delta p$ befinden stellen ein Phasenraumvolumen dar. Das *Liouville-Theorem* sagt aus, dass dieses Volumen eine konstante Größe ist. Skizzieren Sie dieses Volumen zu verschiedenen Zeitpunkten für je ein Paar Anfangsimpulse $0 < p^- < p^+$, $p^- < 0 < p^+$ und $p^- < p^+ < 0$. (1 Punkt)

(b) i. Zeigen Sie die Leibnizsche Produktregel für die Poisson-Klammer

$$\{F, GK\} = \{F, G\} K + G \{F, K\}.$$

(1 Punkt)

ii. Zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung der Funktion $A(\mathbf{q}, \mathbf{p})$

$$\frac{d}{dt} A(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \{A, H\}$$

lautet, wobei $\mathbf{q}(t)$ und $\mathbf{p}(t)$ Lösungen zur autonomen Hamiltonschen Funktion $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sind. (1 Punkt)

iii. Berechnen Sie damit die Zeitentwicklung von $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ und H selbst. Wann ist eine Funktion A entlang des Flusses im Phasenraum (gegeben durch $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$) zeitlich konstant? (1 Punkt)

iv. Eine Verallgemeinerung der Noetherschen Theoreme erhält man durch infinitesimale ($\alpha \to 0$) Verschiebungen des Systems, die durch eine *Erzeugende* $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ generiert wird:

$$\left.\begin{aligned} Q_i &= q_i + \alpha \tfrac{\partial G}{\partial p_i} \\ P_i &= p_i - \alpha \tfrac{\partial G}{\partial q_i} \end{aligned}\right\} \text{für } \alpha \to 0\,,\ i = 1, \ldots, f$$

Welche Bedingung muss eine Funktion $A(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ erfüllen, damit sie in linearer Ordnung von α invariant unter dieser Verschiebung bleibt?
Folgern Sie, dass die Konstanten der Bewegung die Erzeugenden infinitesimaler Verschiebungen sind, die die Hamiltonsche Funktion invariant lassen. (1 Punkt)

v. Beweisen Sie, dass der n-dimensionale entartete harmonische Oszillator, der durch

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \frac{m\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i^2$$

gegeben ist, die Erhaltungsgrößen

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{p_i p_j}{m} + m\omega^2 q_i q_j)$$

besitzt. (1 Punkt)

(c) i. Finden Sie die Hamiltonfunktion für ein Zentralpotential (vergleiche Keplerproblem) mit Lagrangedichte

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

und drücken Sie diese in ebenen Polarkoordinaten aus.
Zeigen Sie, dass der Runge-Lenz Vektor

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\gamma\frac{\mathbf{r}}{r}$$

in Polarkoordinaten folgende Form annimt:

$$\mathbf{A} = (\frac{p_\phi^2}{r} - \gamma m)\hat{\mathbf{e}}_r - p_r p_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi.$$

(2 Punkte)

ii. Nutzen Sie die Poissonklammer, um zu zeigen, dass

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{p_\phi}{mr^2} \quad \text{und}$$
$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_r = -\hat{\mathbf{e}}_r \frac{p_\phi}{mr^2}.$$

(1 Punkt)

iii. Machen Sie sich mit diesen Ergebnissen klar, dass $\{\mathbf{A}, H\} = 0$ gilt. (2 Punkte)
Hinweis: Die Produktregel aus Aufgabenteil b) kann hier nützlich sein.

(d) i. Studieren Sie folgendes einfache Hamiltonsche System:

$$H(Q, P) = \omega P.$$

Welche auffälligen Erhaltungsgrößen existieren, wie lauten die Bahnen? (1 Punkt)

ii. Es sei folgende kanonische Transformation gegeben:

$$p = \sqrt{2m\omega P}\cos Q \quad \text{und} \quad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Poissonklammer, dass q und p *kanonische* Variablen sind. Wie lautet $H(p, q)$? Geben sie die Lösung für $q(t)$ an. Was für ein physikalisches System beschreiben die Gleichungen in diesen Koordinaten? (2 Punkte)