UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Theorieübungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 10, Ausgabe 12.01.2011, abzugeben am 19.01.2011
Besprechung in den Übungen vom 21.01.2011

22. **Legendre-Transformation; (6 Punkte)**
Die Legendre-Transformation wird in der Physik an verschiedenen Stellen verwendet: der Übergang von Lagrangescher zu Hamiltonscher Mechanik geschieht durch Legendre-Transformation bezüglich der Geschwindigkeitskoordinaten. Weiterhin wechselt man in der Thermodynamik von einer Fundamentalform zu einer anderen mittels einer Legendre-Transformation. In dieser Aufgabe sollen ein paar wesentliche Eigenschaften der Legendre-Transformation zusammengestellt werden.
Sei f eine strikt konvexe glatte Funktion, $f''(x) > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x;p) = xp - f(x)$ für gegebenes p entweder kein oder ein eindeutiges Maximum $x(p)$ hat.
Die Legendre-Transformation g ist nun der Wert von F an der Stelle des Maximums, also $g(p) = p \cdot x(p) - f(x(p))$. (1 Punkt)

(b) Sei g die Legendre-Transformation von f. Zeigen Sie, dass dann $g(p/\alpha)$ die Legendre-Transformation von $f(\alpha x)$ ist, für $\alpha \neq 0$. (1 Punkt)

(c) Zeigen Sie die Youngsche Ungleichung $f(x) + g(p) \geq xp$. (1 Punkt)

(d) Zeigen Sie, dass auch $g(p)$ strikt konvex ist.
Hinweis: Satz von der Umkehrfunktion auf f' anwenden. (1 Punkt)

(e) Zeigen Sie die Involutivität der Legendre-Transformation, also dass die Legendre-Transformation von $g(p)$ wieder $f(x)$ ergibt. (1 Punkt)

(f) Berechnen Sie die Legendre-Transformation der folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} 1.\ f(x) &= \frac{1}{2}x^2 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}, \\ 2.\ f(x) &= \frac{1}{\alpha}x^\alpha \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und } \alpha > 1, \text{ damit } f \text{ konvex ist.} \end{aligned}$$

Welche (bekannten?) Ungleichungen ergeben sich in diesen Beispielen aus der Youngschen Ungleichung? (1 Punkt)

23. **Relativistische Hamiltonfunktion in elektromagnetischen Feldern; (8 Punkte)**

(a) Die relativistische Lagrangefunktion mit einem Potential $U(\mathbf{r})$ ohne elektromagnetische Felder lautet:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} - U(\mathbf{r}).$$

Ermitteln Sie die relativistische Hamiltonfunktion H indem Sie zunächst den relativistischen Impuls bestimmen. Leiten Sie daraus die Einsteinsche Energie-Impuls-Beziehung für ein freies Teilchen $H = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ ab. Entwickeln Sie die relativistische Lagrangefunktion im nicht-relativistischen Grenzfall $\frac{v}{c} \ll 1$. (2 Punkte)

(b) Die nicht-relativistische Lagrangefunktion in allgemeinen zeitabhängigen Feldern lautet für ein Teilchen mit der Ladung q:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\Phi(\mathbf{r},t) + q\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t).$$

Zeigen Sie, dass sich bei diesem Problem der verallgemeinerte Impuls $\mathbf{p}$ vom kinetischen ("normalen") Impuls unterscheidet. Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion für ein Teilchen der Ladung q im elektromagnetischen Feld. Schreiben Sie das Resultat einmal als Funktion von $\{\mathbf{p},\Phi,\mathbf{A}\}$ und ein zweites mal als Funktion von $\{\mathbf{v},\Phi\}$. Erklären Sie anschaulich, warum die Gesamtenergie nur vom elektrischen Feld, nicht aber vom Magnetfeld abhängt. (2 Punkte)

(c) Nun kombinieren wir die beiden vorigen Lagrangefunktion, um jene für ein relativistisches Teilchen der Ladung q im elektromagnetischen Feld zu erhalten:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} - q\Phi(\mathbf{r},t) + q\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t).$$

Berechnen Sie die entsprechende Hamiltonfunktion. Schreiben Sie das Resultat einmal als Funktion von $\{\gamma,\Phi\}$ und ein zweites mal als Funktion von $\{\mathbf{p},\Phi,\mathbf{A}\}$. (2 Punkte)
Hinweis: Im zweiten Fall lautet das Resultat $H = c\sqrt{m^2c^2 + (\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2} + q\Phi$.

(d) Betrachten Sie nun ein relativistisches Teilchen der Ladung q in einem Vektorpotential $\mathbf{A} = 1/2(-By, Bx, 0)$ $(\Phi = \mathbf{0})$. Wie lautet damit das Magnetfeld? Überlegen Sie sich zunächst, dass die Energie des Teilchens zeitlich konstant ist. Stellen Sie dann die Hamiltonschen Gleichungen auf, und berechnen Sie die Bahn des Teilchens mit den Anfangsbedingungen: $\mathbf{r}(t=0) = (0, r_0, 0)$, $\dot{\mathbf{r}}(t=0) = (v, 0, w)$. Diskutieren Sie die Teilchenbahn. (2 Punkte)
Hinweis: Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind für dieses Problem 6 lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, von denen 2 trivial und 4 gekoppelt sind. Ein möglicher Lösungsweg der 4 gekoppelten Gleichungen besteht darin, zuerst p_x *und* p_y *zu eliminieren und dann eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Hilfsgröße* $\zeta(t) = x(t) + iy(t)$ *aufzustellen.*