UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Theorieübungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 1, Ausgabe 27.10.2010, abzugeben am 03.11.2010
Besprechung in den Übungen vom 05.11.2010

3. **Gekoppelte Pendel; (6 Punkte)**
Zwei ebene Pendel mit Massen m_1, m_2 und Pendellängen l_1 und l_2 seien durch eine Feder gekoppelt (s. Figur). Die Pendelstangen und die Feder seien masselos. Dies ist eine Idealisierung des Versuchs im Anfängerpraktikum.

(a) Berechnen Sie die charakteristischen Frequenzen λ der periodischen Bewegungen für kleine Winkel-Auslenkungen q_1 und q_2 um die Ruhelage.
Sie erhalten diese aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen oder aus den Euler-Lagrange-Gleichungen für $q_1(t)$ und $q_2(t)$, wenn Sie die kinetische Energie jedes Massenpunktes j als $T_j = \frac{1}{2} m_j l_j^2 \dot{q}_j^2$ und die potentielle Energie $U_j = \frac{g}{2} m_j l_j q_j^2$ ansetzen. Die Größe g bezeichnet die Erdbeschleunigung. Die Kopplung zwischen den Pendeln werde durch den Term $U_{12} = \frac{\alpha}{2}(q_1 - q_2)^2$ beschrieben. Die Lagrangedichte lautet $L = T - U$.
Machen Sie dazu den Lösungsansatz

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = e^{i\lambda t} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

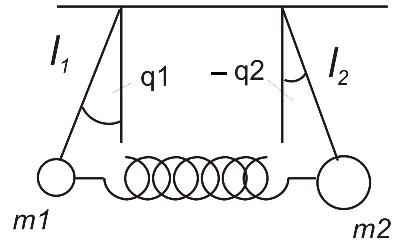
Zeigen Sie, wie aus diesem Ansatz die beiden gekoppelten linearen Gleichungen

$$\begin{pmatrix} -\lambda^2 + \omega_1^2 + \alpha_1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & -\lambda^2 + \omega_2^2 + \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

mit dem Frequenzeigenwert λ folgen. (Wie lauten die Abkürzungen ω_i und α_i?) Durch welche Forderung werden nun die Eigenwerte λ bestimmt und warum? Wieviele davon gibt es? Wie lautet die allgemeine Lösung $(q_1(t), q_2(t))$ und wieviele freie Parameter hat diese? (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie λ für den Fall, dass beide Pendel die gleichen Massen $m_1 = m_2$ und Längen $l_1 = l_2$ haben. Stellen Sie die Frequenz λ^2 als Funktion der Kopplungskonstanten α graphisch dar. Bestimmen Sie die Eigenmoden, d.h. die Eigenvektoren. Wie schwingen die Pendel zueinander? (2 Punkte)

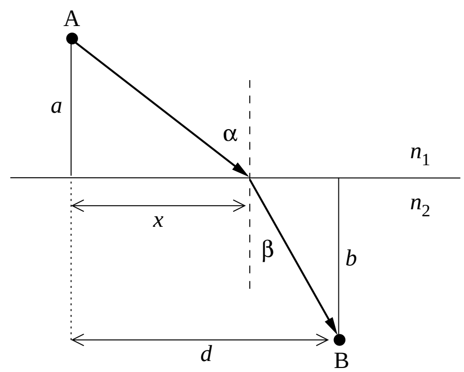
(c) Wie verhalten sich im allgemeinen Fall die Frequenzen λ in den Grenzfällen (G1) $\alpha_{1,2} \ll \Delta\omega^2 \equiv \omega_1^2 - \omega_2^2$ und (G2) $\alpha_{1,2} \gg \Delta\omega^2$? Stellen Sie wiederum λ^2 als Funktion der Kopplungskonstanten α für beide Fälle graphisch dar. Gegen welchen Grenzwert strebt λ jeweils für den Fall starker Kopplung (G2)? (2 Punkte)



4. **Fermat'sches Prinzip; (8 Punkte + 2 Sonderpunkte)**
Das Fermat'sche Prinzip besagt, dass ein Lichtstrahl stets den Weg mit der kürzesten Laufzeit wählt.

   (a) Snellius'sches Brechungsgesetz (2 Punkte)

   Zeigen Sie, dass das Snellius'sche Brechungsgesetz aus dem Fermat'schen Prinzip folgt. Betrachten Sie dazu die Laufzeit $t = t(x)$ des Lichts von A nach B (siehe Abbbildung). A liege im Medium mit Brechungsindex n_1, B im Medium mit n_2. Unter welcher Bedingung ist die Laufzeit minimal? Welches bekannte Gesetz erhält man, falls B in der gleichen Hälfte wie A ist?



   (b) Gekrümmte Lichtstrahlen – Sonnenuntergang (2 Punkte + 2 Sonderpunkte)
   Aufgrund der Lichtbrechung in der Atmosphäre geht die Sonne früher auf und später unter, als geometrisch zu erwarten ist.

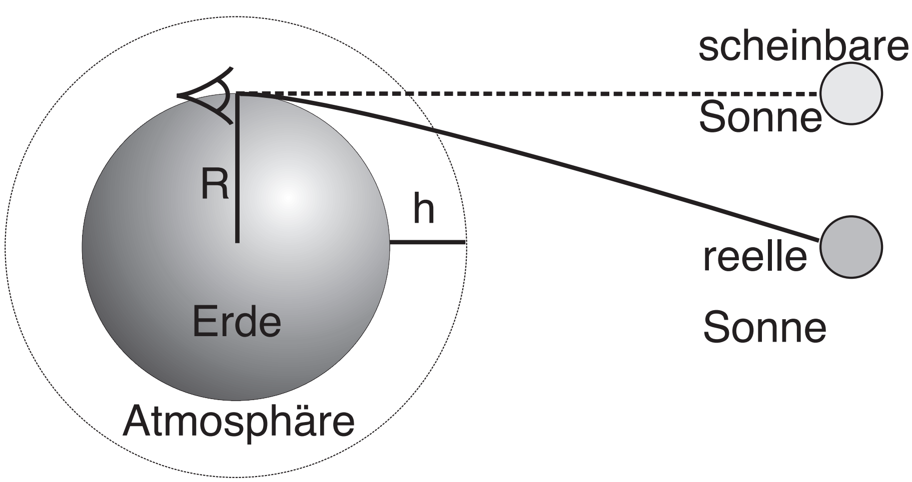


Abbildung 1: Geometrie des Sonnenunterganges am Ort des Betrachters (Augensymbol) auf der Erde.

i. Zeigen Sie zunächst mit Hilfe des Brechungsgesetzes, dass ein Lichtstrahl in einem Medium mit Brechungsindex $n(h)$ einen infinitesimalen Ablenkwinkel

$$\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{n(h)}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}h}\sin\varphi(s)\mathrm{d}s \tag{1}$$

entlang des Streckeninkrementes $\mathrm{d}s$ erfährt. Dabei ist h der Abstand zum Boden. *Hinweis*: Denken Sie sich das Medium in ebene Schichten der Dicke $\mathrm{d}h$ mit konstantem Brechungsindex zerlegt. Linearisieren Sie hierbei $n(h)$ und verwenden Sie Additionstheorem und Kleinwinkelnäherung.

ii. Gleichung (1) kann man auch mit Hilfe des Fermat'schen Prinzips ableiten. Die Laufzeit eines Lichtstrahls in einem Medium mit räumlich variierendem Brechungsindex ist gegeben durch

$$t = \int dt = \int s\,\frac{1}{v(s)} = \frac{1}{c}\int ds\, n(s)\,,$$

wobei s den Laufweg parametrisiert. Nach Fermat muss dieses Funktional extremal werden.
Betrachten Sie nun den Verlauf eines Lichtstrahls in der Atmosphäre. Vernachlässigt man die Krümmung der Erdoberfläche, so kann der Weg des Lichts durch $h = h(x)$ parametrisiert werden. Der Brechnungsindex ist höhenabhängig, d.h. $n = n(h)$. Bestimmen Sie zuerst die Euler-Lagrange-Gleichung dieses Problems und mit einer Beziehung für den Ablenkwinkel dann (1).

(c) Der Brechungsindex ist näherungsweise linear zum Luftdruck und fällt gemäß der barometrischen Höhenformel exponentiell mit der Höhe h über dem Erdboden ab:

$$n(h) = 1 + (n_0 - 1)e^{-h/H}$$

mit

$$H = \frac{\rho_0 g}{p_0} \approx 8\,\mathrm{km} \qquad n_0 \approx 1.0003.$$

Wo findet die maßgebliche Krümmung des Lichtstrahls statt? Berechnen Sie den Winkel der reellen zur scheinbaren untergehenden Sonne, indem Sie die Ablenkung entlang des Lichtweges aufintegrieren. Nähern Sie dazu $\varphi(s)$ bzw. $n(h)$ bis zur nullten und $h(s)$ bis zur zweiten Ordnung, und verwenden Sie

$$\int_0^\infty e^{-s^2/\alpha}\,\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\alpha\pi}}{2}.$$

Berechnen Sie die Zeit, um die der Tag (zur Tag- und Nachtgleiche am Äquator) verlängert wird. Argumentieren Sie qualitativ, warum die Sonne am Horizont abgeflacht erscheint. (4 Punkte)