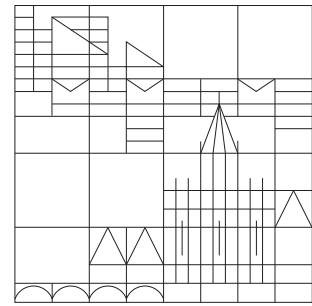


UNIVERSITÄT KONSTANZ
 Fachbereich Physik
 Prof. Georg Maret (Experimentalphysik)
 Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
 E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
 Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
 Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
 E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de



**Theorieübungen zur Physik III: Integrierter Kurs
 Wintersemester 2010/2011**

Übungsblatt 0, Ausgabe 20.10.2010, abzugeben am 27.10.2010
 Besprechung in den Übungen vom 29.10.2010

1. Nabla-Kalkül; (5 Zusatzpunkte)

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ seien Vektorfelder, $\phi(\mathbf{r})$ ein Skalarfeld und $f(r)$ eine skalare Funktion, die nur von $r = |\mathbf{r}|$ abhängt. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B} + (\mathbf{B} \times \nabla) \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \phi (\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \nabla \phi.$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla^2 f(r) = \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) f(r)$$

2. Fourier Reihe; (7 Zusatzpunkte)

Eine reelle Funktion $f(x)$, die quadrat integrabel im Bereich $-l \leq x \leq l$ ist, d.h. $\int_{-l}^l dx |f(x)|^2 < \infty$, soll durch eine Summe

$$\tilde{f}_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n \varphi_n(x)$$

angenähert werden, wobei die Funktionen φ_n orthonormiert sind, d.h.

$$\int_{-l}^l dx \varphi_n^*(x) \varphi_m(x) = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{ikx}$$

mit $k = \frac{\pi}{l}n$ und $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ orthonormiert sind.

(1 Punkt)

b) Als Maß für den Fehler der Näherung soll verwendet werden

$$\delta_N^2 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dx |f(x) - \tilde{f}_N(x)|^2$$

Zeigen Sie, dass δ_N^2 als Funktion der Entwicklungskoeffizienten c_n minimal wird, wenn diese erfüllen:

$$c_n = \int_{-l}^l dx \varphi_n^*(x) f(x)$$

(2 Punkte)

Hinweis: Um das Minimum von δ_N^2 als Funktion der komplexen c_n zu finden, bietet es sich an, die c_n durch Amplitude und Phase auszudrücken, und δ_N^2 als Funktion dieser $2N$ reellen Größen zu minimieren.

c) Verwenden Sie, dass $f(x)$ reell ist, um die Summe $\tilde{f}_N(x)$ umzuschreiben zu:

$$\tilde{f}_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=N} \left[a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \right]$$

Wie lauten die a_n und b_n ? Was kann gefolgert werden, wenn $f(x)$ symmetrisch (d.h. $f(-x) = f(x)$) oder antisymmetrisch (d.h. $f(-x) = -f(x)$) ist? (2 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Fourierreihe $\tilde{f}(x)$, die sich für $N \rightarrow \infty$ ergibt durch $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_\infty(x)$, für die Funktionen:

$$f_1(x) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{x}{l}\right) & 0 < x \leq l \\ f_1(-x) & -l \leq x < 0 \end{cases}$$

und

$$f_2(x) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{x}{l}\right) & 0 < x \leq l \\ -f_2(-x) & -l \leq x < 0 \end{cases} ,$$

und vergleichen Sie das Verhalten der Fourierkoeffizienten für Große n . (2 Punkte)