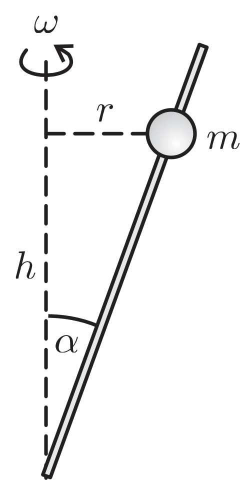
UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Alfred Leitenstorfer (Experimentalphysik)
Raum P 809, Tel. (07531)88-3818
E-mail: Alfred.Leitenstorfer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 06/07

Übungsblatt 9, Ausgabe 19.12.2006, abzugeben am 09.01.2007
Besprechung in den Übungen vom 10.-12.01.2007

37. Perle auf rotierendem Draht; (6 Punkte)

Eine Perle gleitet reibungsfrei auf einem geraden rotierenden Drahtstück, das um den Winkel α gegenüber seiner Rotationsachse und der Richtung der Gravitationskraft geneigt ist.



(a) Stellen Sie mit Hilfe des Lagrange-Formalismus die Bewegungsgleichung auf. (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie ohne die Bewegungsgleichung zu lösen, die Höhe $h(\alpha, \omega)$ der Perle, in der das System stationär bleibt. (2 Punkte)

(c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung. (2 Punkte)

38. Gekoppelte Pendel; (7 Punkte)

Zwei ebene Pendel mit Massen m_1, m_2 und Pendellängen l_1 und l_2 seien durch eine Feder gekoppelt (s. Figur). Die Pendelstangen und die Feder seien masselos. Dies ist eine Idealisierung des Versuchs im Anfängerpraktikum.

(a) Berechnen Sie die charakteristischen Frequenzen λ der periodischen Bewegungen für kleine Winkel-Auslenkungen q_1 und q_2 um die Ruhelage. Sie erhalten diese aus den Euler-Lagrange-Gleichungen für $q_1(t)$ und $q_2(t)$, wenn Sie die kinetische Energie jedes Massenpunktes j als $T_j = \frac{1}{2} m_j l_j^2 \dot{q}_j^2$ und die potentielle Energie $U_j = \frac{g}{2} m_j l_j q_j^2$ ansetzen. Die Größe g bezeichnet die Erdbeschleunigung. Die Kopplung zwischen den Pendeln werde durch den Term $U_{12} = \frac{\alpha}{2}(q_1 - q_2)^2$ beschrieben.
Machen Sie dazu den Lösungsansatz

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = e^{i\lambda t} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Zeigen Sie, wie aus diesem Ansatz die beiden gekoppelten linearen Gleichungen

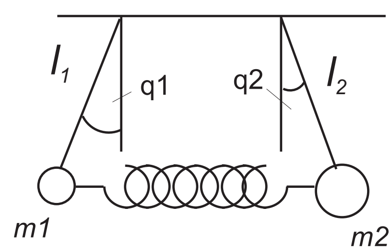
$$\begin{pmatrix} -\lambda^2 + \omega_1^2 + \alpha_1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & -\lambda^2 + \omega_2^2 + \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

mit dem Frequenzeigenwert λ folgen. (Wie lauten die Abkürzungen ω_i und α_i?) Durch welche Forderung werden nun die Eigenwerte λ bestimmt und warum? Wieviele davon gibt es? Wie lautet die allgemeine Lösung $(q_1(t), q_2(t))$? (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie λ für den Fall, dass beide Pendel die gleichen Massen $m_1 = m_2$ und Längen $l_1 = l_2$ haben. Stellen Sie die Frequenz λ^2 als Funktion der Kopplungskonstanten α graphisch dar. Wie schwingen die Pendel zueinander in den beiden Fällen? (Dieser Zusammenhang ist Ihnen eventuell aus dem Anfängerpraktikum bekannt.) (1 Punkte)

(c) Wie verhalten sich im allgemeinen Fall die Frequenzen λ in den Grenzfällen (G1) $\alpha_{1,2} \ll \Delta\omega^2 \equiv \omega_1^2 - \omega_2^2$ und (G2) $\alpha_{1,2} \gg \Delta\omega^2$? Stellen Sie wiederum λ^2 als Funktion der Kopplungskonstanten α für beide Fälle graphisch dar. Gegen welchen Grenzwert strebt λ jeweils für den Fall starker Kopplung (G2)? (2 Punkte)

(d) Diskutieren Sie die Schwingungen für die Anfangsbedingungen $q_1 = Q$, $q_2 = 0$, $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ für den Fall des enarteten Pendel aus Aufgabe b). Beachten Sie hierbei, dass die Parameter $A_{1,2}$ etc. Eigenvektoren zum Eigenwert λ darstellen müssen! Skizieren Sie den Verlauf der Schwingungen beider Pendel für den Fall schwacher Kopplung. (2 Punkte)



39. **Kürzester Weg auf Zylinder- und Kegeloberfläche; (7 Punkte + 2 Zusatzpunkte)**
Ein Variationsproblem der Form

$$\int \mathrm{d}x\, L(y, y', x) = \text{Extremum} \quad \Leftrightarrow \quad \delta \int \mathrm{d}x\, L(y, y', x) = 0 \quad \text{mit} \quad y = y(x)$$

wird gelöst durch die entsprechende Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0\,.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist also die Funktion $y(x)$, für die obiges Funktional extremal (d.h., minimal oder maximal) wird.

(a) Gesucht ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte in der (x, y)-Ebene. *Hinweis*: Verwenden Sie das Wegelement $ds^2 = dx^2 + dy^2$ und die obige Euler-Lagrange-Gleichung. (1 Punkt)

(b) Finden Sie die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf der Oberfläche eines Zylinders. Schreiben Sie hierzu das Wegelement $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ in Zylinderkoordinaten ϕ und z ($r = \text{const.}$). Durch die Parametrisierung $z = z(\phi)$ erhalten Sie ein Funktional der Form $\int ds = \int \mathrm{d}\phi\, L(z'(\phi))$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung den extremalen Weg $z(\phi)$. Um was für eine Kurve handelt es sich dabei? (2 Punkte)

(c) Gesucht ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf der Oberfläche eines Kegels. Drücken Sie hierzu das Wegelement ds in Zylinderkoordinaten r, θ und z (mit $r/z = \tan\alpha = \text{konst.}$) aus, und wählen Sie die Parametrisierung $\theta = \theta(r)$. Bestimmen Sie das Extremum des Funktionals $\int dr\, L(\theta'(r), r)$.

Hinweis: Das Ergebnis lautet:

$$r_m = r\cos a(\theta - \theta_m)$$

Was ist a? Wie hängen die Integrationskonstanten r_m und θ_m mit den Randbedingungen der Kurve zusammen? Die Euler-Gleichung liefert lediglich das Extremum der Weglänge. Können Sie für einen Fall einen kürzeren Weg finden? Weswegen liefert obiges Ergebnis diese Kurven nicht? Was ergibt sich im Fall $\alpha \to \frac{\pi}{2}$? (3 Punkte)

(d) Finden Sie die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf der Oberfläche einer Kugel. *Hinweis*: Wenn Sie das Problem in Kugelkoordinaten lösen erhalten Sie

$$a\sin(\theta)\sin(\phi) + b\sin(\theta)\cos(\phi) - \cos(\theta) = 0$$

(Kugel-Großkreis Gleichung). (2 Zusatzpunkte)

40. **Keplerproblem; (8 Punkte)**

Die um 1610 veröffentlichten drei Gesetze der Planetenbewegung des *Johannes Kepler* (1571-1630) waren das Ergebnis seiner bahnbrechenden Analyse der 38jährigen Beobachtungen von *Tycho Brahe* (1546-1601) und legten den Grundstein zu *Newtons* (1643-1727) Entdeckungen. Während Kepler II (Erhaltung der Flächengeschwindigkeit) für alle Zentralkraftbewegungen Gültigkeit hat, sind Kepler I (Planeten auf Ellipsenbahnen) und Kepler III (Quadrat der Perioden ist den Kuben der Halbachsen proportional) auf Potentiale des reziproken Abstands beschränkt. In der folgenden Aufgabe sollen Sie das Keplerproblem mithilfe des Lagrange-Formalismus lösen.

(a) Stellen Sie die Hamilton-Funktion und die Lagrangefunktion in kartesischen Koordinaten für einen Massepunkt im Zentralpotential

$$U(r) = -\frac{\gamma}{r}$$

auf. (1/2 Punkt)

(b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ und die Energie E, sowie der Runge-Lenz-Vektor

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \alpha \mathbf{r}/r$$

mit geeigneter Wahl von α Erhaltungsgrössen der Bewegung sind. (1 Punkt)

(c) Warum lässt sich das Keplerproblem auf ein effektiv zweidimensionales Problem reduzieren? Ermitteln Sie die Lagrangefunktion in ebenen Polarkoordinaten. (1 Punkt)

(d) Zeigen Sie erneut, dass Drehimpuls und Energie erhalten sind, und geben Sie die Grössen in Polarkoordinaten an. (1 1/2 Punkte)
Hinweis: Um zu zeigen, dass $\frac{d}{dt}E = 0$, benutze man die Euler-Lagrange-Gleichungen für die beiden Polarkoordinaten.

(e) Lösen Sie nach der Trajektore $r(\phi)$, und diskutieren Sie die unterschiedlichen Lösungen hinsichtlich der Energie oder anderer geeigneter Parameter. Für welche Werte von E erhalten Sie geschlossene und für welche offene Keplerbahnen?
Hinweise: Benutzen Sie zunächst die Ausdrücke für E und den Drehimpuls l in Polarkoordinaten, um zu zeigen, dass

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm \frac{mr^2}{l}\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{l^2}{m^2r^2} + \frac{2\gamma}{mr}}.$$

Führen Sie nun die Substitution $u = 1/r$ durch, und benutzen Sie

$$\int \frac{du}{\sqrt{au^2 + bu + c}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos\left(\frac{-2au - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right).$$

(2 Punkte)

(f) Ein Massepunkt (Meteorit, Raumsonde) fliegt aus sehr grosser Entfernung auf ein Zentralpotential (Gravitationspotential eines Planeten) zu und passiert dieses auf einer offenen Bahn ($E > 0$). Bestimmen Sie den Winkel θ, um den sich die Flugrichtung des Massepunktes ändert. (1 Punkt)

(g) In welche Richtung zeigt der Runge-Lenz-Vektor? Berechnen Sie hierzu $\mathbf{A}$ im Perihel, dem Bahnpunkt mit minimalem Abstand vom Kraftzentrum. (1 Punkt)