UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Alfred Leitenstorfer (Experimentalphysik)
Raum P 809, Tel. (07531)88-3818
E-mail: Alfred.Leitenstorfer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 06/07

Übungsblatt 8, Ausgabe 12.12.2006, abzugeben am 19.12.2006
Besprechung in den Übungen vom 20.-22.12.2006

33. **Doppler-Effekt: relativistisch und nichtrelativistisch; (7 Punkte)**

(a) Der Stern Algol im Sternbild des Perseus verändert seine Helligkeit regelmäßig mit einer Periode von 3,96 Tagen. Dabei verschiebt sich die H_α-Linie (Spektrallinie des Wasserstoffatoms) mit der gleichen Periode zwischen $655,38$ nm und $657,18$ nm. Die Ursache für diese Erscheinung ist, dass der Stern mit einem dunklen Begleiter um den gemeinsamen Schwerpunkt kreist. Die Erde steht nahezu in der Ebene der Kreisbahn, so daß die Linienverschiebung eine Folge des Doppler-Effektes der unterschiedlichen Bewegungsrichtungen des Sterns in Bezug zur Erde ist. Wie groß sind Bahngeschwindigkeit und Durchmesser der von dem hellen Stern beschriebenen Kreisbahn? (2 Punkte)

(b) Geschwindigkeitskontrollen im Straßenverkehr werden meist mit Hilfe eines Doppler-Radars durchgeführt, das auf dem Prinzip des longitudinalen Dopplereffektes beruht. Dabei wird die Frequenz f' einer vom Fahrzeug reflektierten monochromatischen Mikrowellenstrahlung der Frequenz $f = 30$ GHz präzise bestimmt. Welcher vereinfachte lineare Zusammenhang gilt zwischen der Frequenzverschiebung und der Geschwindigkeit des Fahrzeugs? Wie groß ist die Frequenzverschiebung $f' - f$, welche die Polizei in einer Geschwindigkeitsbeschränkung auf 80 km/h höchstens messen sollte? (1 Punkt)

(c) Der Dopplereffekt in seiner klassischen Form ist aus der Akustik bekannt (z.B. Martinshorn auf Rettungswagen). Betrachten Sie einen Radfahrer, der mit der Geschwindigkeit $v = 36$ km/h auf einen stehenden Fußgänger zufährt. Welche Frequenz f' nimmt der Fußgänger wahr, wenn der Radfahrer Schallwellen mit der Frequenz f aussendet? (Hinweis: Überlegen Sie sich, welche effektive Wellenlänge der Schall am Ort des Fußgängers hat.) Geben Sie die Frequenz- und Wellenlängenänderung für eine Frequenz von 200 Hz und eine Schallgeschwindigkeit von $v_s = 330$ m/s auf sechs Stellen genau an. (2 Punkte)

(d) Nehmen Sie nun an, dass der Fußgänger dem Radfahrer zuruft. Welche Änderung in der Frequenz bzw. Wellenlänge nimmt der Radfahrer wahr? Berechnen Sie diese Änderungen für die in c) angegebenen Größen. Wie ist der Unterschied in den Ergebnissen aus den Teilaufgaben c) und d) erklärbar? Gibt es einen ähnlichen Effekt auch in der Optik?

(2 Punkte)

34. **Zyklotron und Speicherring; (12 Punkte)**
Ein Zyklotron (siehe Abbildung 1) besteht aus einem Elektromagneten, zwischen dessen Polen sich zwei durch einen schmalen Spalt getrennte halbzylindrische diamagnetische Metallkammern

(D-Elektroden oder Duanden) befinden. In der Mitte der Kammer werden die zu beschleunigenden niederenergetischen Teilchen eingebracht. An den Duanden liegt eine Wechselspannung $U(t) = U_0 \cos(2\pi f t)$ mit konstanter Frequenz f an ($U_0 = 100\,\mathrm{kV}$). Bei jedem Durchlauf durch den Beschleunigungsspalt sollen die geladenen Teilchen durch die Potenzialdifferenz zusätzliche kinetische Energie gewinnen. Ein senkrecht zu den Elektroden angelegtes Magnetfeld B zwingt die geladenen Teilchen auf gekrümmte Bahnen. Das Innere der Duanden ist frei von elektrischem Feld und nur vom B-Feld durchdrungen.

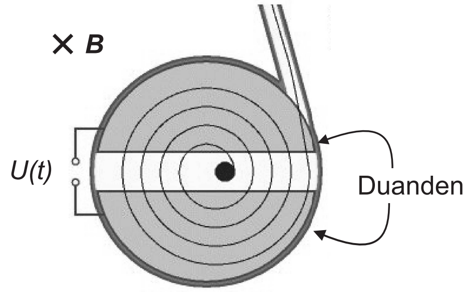

Abbildung 1: Schemaskizze eines Zyklotrons.

(a) Zeigen Sie zunächst in nicht-relativistischer Näherung, dass geladene Teilchen für ein homogenes Magnetfeld B innerhalb der Duanden Halbkreisbahnen mit Energie-unabhängiger Umlauffrequenz beschreiben. Wie muss f allgemein gewählt werden? Welche kinetische Energie besitzt ein Elektron nach seinem vierten Durchlauf durch den Beschleunigungsspalt? Nehmen Sie an, dass der Spalt infinitesimal dünn sei und somit die Beschleunigung jeweils mit maximaler Spannungsamplitude erfolge. Wie groß sind für $B = 2\,\mathrm{T}$ zugehöriger Bahnradius R_4 und Geschwindigkeit v_4 nach nichtrelativistischer Rechnung? Ist diese Näherung gerechtfertigt? Diskutieren Sie diese Frage auch für Protonen. (Hinweis: Elektronenmasse $m_\mathrm{e} = 9,11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$; Protonenmasse $m_\mathrm{P} = 1836 \times m_\mathrm{e}$). (4 Punkte)

(b) Leiten Sie einen Lorentz-invarianten Ausdruck für die Umlauffrequenz her. Wie groß ist R_4 für Elektronen? Welches Problem entsteht für die Beschleunigung mit der Wechselspannung konstanter Frequenz f aus a)? (2 Punkte)

(c) Begründen Sie, warum man Elektronen durch die geschickte Wahl von $U_0 = 2 \times 511\,\mathrm{kV}$ auch bei konstanter Frequenz f auf relativistische Energien beschleunigen kann. (Hinweis: Beachten Sie, dass für die Ruheenergie des Elektrons gilt $m_e c^2 = 511\,\mathrm{keV}$.) (2 Punkte)

(d) Um auch schwerere Teilchen bei konstanter Umlauffrequenz zu beschleunigen, kann man ein radial nach außen ansteigendes Magnetfeld $B(r)$ anlegen. Welches Profil $B(r)$ ist nötig? Skizzieren Sie die Trajektorie von Protonen während der Beschleunigung qualitativ. Wodurch ist in diesem Fall die maximal erreichbare Energie begrenzt? (2 Punkte)

(e) Hochenergetische Teilchen können in Speicherringen über längere Zeit auf hohen Geschwindigkeiten gehalten werden. Es wurde vorgeschlagen, Myonen (instabile Elementarteilchen mit einer Lebensdauer von nur $\tau_\mu = 2 \cdot 10^{-6}$ s und einer Ruheenergie von $m_\mu c^2 = 105$ MeV) in einem Speicherring mit Radius $r = 2$ km bei einer kinetischen Energie von 2 TeV einzuschließen. Ein Student führt aus, dass Myonen aufgrund ihrer kurzen Lebensdauer nur eine maximale Entfernung von $c\tau_\mu = 600$ m, also nicht einmal einen einzigen Umlauf im Speicherring, zurücklegen könnten. Hat der Student recht? Berechnen Sie die mittlere Anzahl der Umläufe, die die Myonen im Speicherring tatsächlich vollführen.

(2 Punkte)

35. **Relativistische Teilchen-Kollision; (10 Punkte)**
Wir betrachten die elastische Kollision von zwei Teilchen der Ruhemasse m. Nehmen Sie dabei an, dass das zweite Teilchen im Laborsystem ruht. Wir bezeichnen die Viererimpulse der

einfallenden Teilchen mit $p_1^\mu = (E_1/c, \mathbf{p}_1)$ und $p_2^\mu = (E_2/c, \mathbf{p}_2)$. Als Raumkomponenten bezeichnen wir $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$.

(a) Finden Sie zunächst eine geeignete Transformation um die Vierervektoren darzustellen, wenn Sie sie aus einem Bezugssystem mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$ betrachten. Welche Bedingung lässt sich daraus ableiten, wenn man in ein Schwerpunktsystem transformieren möchte? Welcher Zusammenhang zwischen E und $|\mathbf{p}|$ folgt damit?

Hinweis: Überlegen Sie sich, ob es sich hierbei um eine Hin- oder eine Rücktransformation handelt. (2 Punkte)

(b) Die Kollision im Schwerpunktsystem kann man schematisch folgendermaßen darstellen:

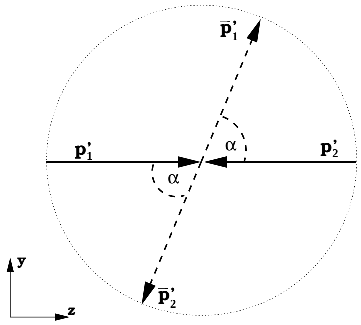

Abbildung: *Teilchen mit den Raumkomponenten $\mathbf{p_1'}$ und $\mathbf{p_2'}$ kollidieren im Schwerpunktsystem. Das Ergebnis des Stoßes ist durch $\overline{\mathbf{p}}_1'$ und $\overline{\mathbf{p}}_2'$ dargestellt.*

i. Im Laborsystem sei der Winkel zwischen dem Raumvektor $\overline{\mathbf{p}}_1$ des ersten Teilchens (nach der Kollision) und der z-Achse ϑ. Welches Bild ergibt sich in diesem Bezugssystem? Finden Sie zunächst die Transformation aus dem Schwerpunktsystem zurück ins Laborsystem. Nutzen Sie diese, um den Ausdruck

$$\tan\vartheta = \frac{|\overline{\mathbf{p}}_1'|\sin\alpha}{\gamma\,|\overline{\mathbf{p}}_1'|\cos\alpha + \beta\gamma\overline{E}_1'/c}$$

herzuleiten. (1 Punkt)

ii. Verwenden Sie die Eigenschaften des Schwerpunktsystems, um folgende Gleichungen aufzustellen. Welche Bedeutung hat M? (2 Punkte)

$$|\mathbf{p}_1'| = \frac{m\,|\mathbf{p}_1|}{M}$$

$$E_1' = \frac{m}{M}E$$

iii. Beweisen Sie nun mit Hilfe des Energie- und Impulssatzes den angegebenen Ausdruck des Winkels θ als Funktion von α.

$$\vartheta(\alpha) = \arctan\left(\frac{\sin\alpha}{\gamma(\cos\alpha + 1)}\right)$$

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie, dass im Schwerpunktsystem gilt $|\mathbf{p}_1'| = |\overline{\mathbf{p}}_1'|$ und $E_1' = \overline{E}_1'$. (2 Punkte)

(c) Betrachten Sie den klassischen ($v \ll c$) und ultrarelativistischen ($v \approx c$) Grenzfall. Skizzieren und interpretieren Sie die Abhängigkeit des Winkels ϑ von α. (1 Punkt)

(d) In einer inelastischen Kollision zweier Protonen ($m_p = 938{,}3\ \mathrm{MeV}/c^2$) soll obendrein noch eine π^0-Meson ($m_{\pi^0} = 135{,}0\ \mathrm{MeV}/c^2$) entstehen (neben den beiden Protonen). Auf welche Geschwindigkeit muß das erste Proton im Laborsystem mindestens beschleunigt werden? (2 Punkte)

36. **Thomas-Präzession; (8 Punkte)**
Führt man zwei spezielle Lorentztransformationen hintereinander aus, deren Geschwindigkeitsvektoren nicht in diesselbe Richtung zeigen, dann erhält man nicht wieder eine einfache spezielle Lorentztransformation. Die resultierende Transformation besteht aus einer speziellen Lorentztransformation gefolgt von einer Raumdrehung. Im folgenden soll dies am vereinfachten Fall, dass die erste Transformation in $\hat{\mathbf{z}}$-Richtung, die zweite danach senkrecht dazu in $\hat{\mathbf{x}}$-Richtung erfolgt, analysiert werden.

(a) Führen Sie die beiden speziellen Lorentztransformationen hintereinander durch, um die Matrix T^{μ}_{ν} der resultierenden Transformation zu erhalten. Die Geschwindigkeit des Interialsystems IS relativ zu IS' sei $v\hat{\mathbf{z}}$, die von IS' relativ zu IS" sei $u\hat{\mathbf{x}}$. Unter Verwendung der Angabe, dass $T = R(\alpha)L(\mathbf{w})$ gilt, wobei R eine Drehmatrix zum Winkel α und L eine spezielle Lorentztransformation zur Relativgeschwindigkeit $\mathbf{w}$ ist, kann der Betrag w der resultierenden Relativgeschwindigkeit leicht abgelesen werden

$$w = c\sqrt{1 - (1 - \frac{v^2}{c^2})(1 - \frac{u^2}{c^2})}$$

Hinweis: Die Drehung ändert spezielle Komponenten von T nicht. (2 Punkte)

(b) Eine Beobachtung nebenbei: Ist Ihr Ergebnis symmetrisch in u und v? Hätten Sie das selbe Ergebnis erhalten, wenn Sie zuerst in x- und danach in z-Richtung transformiert hätten? Fällt Ihnen eine weitere Koordinatentransformation ein, die sich ähnlich verhält?

(1 Punkt)

(c) Wiederum unter Verwendung des Hinweises, dass in der resultierenden Lorentztransformation eine Raumrotation der speziellen $L(\mathbf{w})$ nachgeschaltet ist, können Sie sich x- und z-Komponente der Relativgeschwindigkeit $\mathbf{w}$ besorgen.
Hinweis: Sollten Sie hier nicht weiter kommen, überlegen Sie sich erst Aufgabenteil d). Das Ergebnis lautet $w_x = u/\gamma(v)$ und $w_z = v$. Verifizieren Sie hiermit nochmals den Betrag w.
(1 Punkt)

(d) Eine spezielle Lorentztransformation in $\mathbf{w}$-Richtung erhält man aus der bekannten Transformation entlang der z-Richtung, indem man zuerst das Koordinatensystem dreht, so dass $\mathbf{w}$ parallel zu $\hat{\mathbf{z}}$ liegt, dann entlang z transformiert, und danach die Drehung des Koordinatensystems rüchgängig macht. Zeigen Sie somit, dass (mit Unterdrückung der y-Komponente)

$$L(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \gamma(w) & \gamma(w)\frac{w_x}{c} & \gamma(w)\frac{w_z}{c} \\ \gamma(w)\frac{w_x}{c} & 1 + (\gamma(w)-1)\frac{w_x^2}{w^2} & (\gamma(w)-1)\frac{w_x w_z}{w^2} \\ \gamma(w)\frac{w_z}{c} & (\gamma(w)-1)\frac{w_x w_z}{w^2} & 1 + (\gamma(w)-1)\frac{w_z^2}{w^2} \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

(e) Durch Vergleich der beiden Ergebnisse, kann der Winkel α der nachgeschalteten räumlichen Rotation bestimmt werden. Dies ist im allgemeinen Fall trotz der speziellen Geometrie immer noch algebraisch etwas aufwändig. Deswegen soll folgende Vereinfachung betrachtet werden: Die zweite Relativgeschwindigkeit u sei klein, so dass beide Ausdrücke T und $L(\mathbf{w})$ im Folgenden nur in linearer Ordnung in u benötigt werden. Führen Sie diese Taylorentwicklungen durch und bestimmen Sie letztlich α in linearer Ordnung in u.
Hinweis: Das Ergebnis lautet: $\alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{u}{v}$. Ihr Ergebnis spielte eine wichtige Rolle zum Verständnis der relativistischen Korrekturen im Energiespektrum des Wasserstoffatoms.

(2 Punkte)