UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Alfred Leitenstorfer (Experimentalphysik)
Raum P 809, Tel. (07531)88-3818
E-mail: Alfred.Leitenstorfer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 06/07

Übungsblatt 7, Ausgabe 5.12.2006, abzugeben am 12.12.2006
Besprechung in den Übungen vom 13.-15.2006

29. **Beugung an breiten Spalten; (7 Punkte)**

(a) In Abbildung 1(a) fällt monochromatisches Licht der Wellenlänge λ auf einen Spalt der Breite b. Erklären Sie qualitativ, welche winkelabhängige Intensitätsverteilung $I(\theta)$ sich hinter dem Spalt ergibt und leiten Sie eine Gleichung für $I(\theta)$ her (vernachlässigen Sie dabei die Dicke der Blende, in der sich der Spalt befindet). Skizzieren Sie die Intensitätsverteilung für $b = \sqrt{2}\,\lambda$ und $b = 10\,\lambda$. Überlegen Sie, wie sich die Lage des ersten Intensitätsminimums θ_1 mit der Spaltbreite verändert (z.B. durch Betrachten des Gangunterschiedes zweier Teilwellen). Wie breit erscheint ein anfänglich paralleles Lichtbündel der Wellenlänge $\lambda = 650$ nm (also eine ebene Welle) auf einem Schirm, der $s = 2$ m hinter einem Spalt der Breite $b = 5$ mm angebracht ist? Überlegen Sie qualitativ, wie das Schirmbild aussieht, wenn statt des monochromatischen Lichtes weißes Licht auf den Spalt fällt.

(3 Punkte)

(b) Nun sollen N Spalte der Breite b im Abstand d (von Spaltmitte zu Spaltmitte) nebeneinander angeordnet sein (Abbildung 1(b)). Leiten Sie auch für diesen Fall einen Ausdruck für die winkelabhängige Intensitätsverteilung $I(\theta)$ her und skizzieren Sie für $b = 2\lambda$, $d = 2b$ und $N = 8$ das entstehende Beugungsbild (I als Funktion von $\sin(\theta)$) und dessen Einhüllende. Erklären Sie, wie sich das Bild ändert, wenn N, b oder d variiert werden.

(3 Punkte)

(c) Eine billige Digitalkamera enthalte einen CCD-Sensor mit 2048×2048 Bildpunkten auf einer Fläche von 1 cm $\times$ 1 cm. Dieser Sensor sei im Fokus eines Objektivs mit 10 cm Brennweite und einem Durchmesser von 10 mm montiert. Kann das deutlich teurere Modell mit 4096×4096 Bildpunkten auf einem Quadratzentimeter und der gleichen Optik tatsächlich Bilder der doppelten Auflösung aufnehmen? Berechnen Sie bei beiden Kameras die tatsächlich zu erwartende Auflösung.

(1 Punkt)

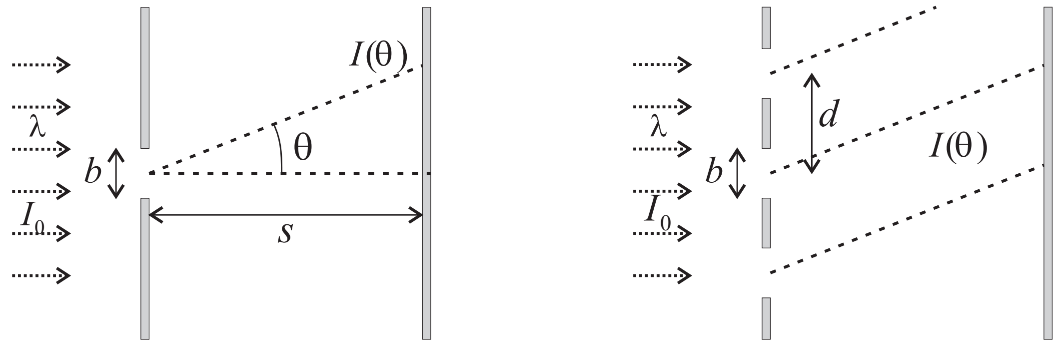

Abbildung 1: (a) Beugung am breiten Einzelspalt; (b) Beugung an mehreren breiten Spalten

30. **Beugung am Gitter; (4 Punkte)**

(a) Leiten Sie für ein Gitter der Gitterkonstante d, welches unter dem Winkel α beleuchtet wird, aus einfachen Überlegungen die Winkel β_m ab, unter denen Beugungsmaxima beobachtbar sind. Berechnen Sie die Winkel für alle $\lambda \in \{400\,\mathrm{nm}, 500\,\mathrm{nm}, 600\,\mathrm{nm}, 700\,\mathrm{nm}\}$, $\alpha = 15°$ und $d = 1\ \mu$m. Stellen Sie die Ergebnisse graphisch dar.

(2 Punkte)

(b) Derartige Gitter haben oftmals in der Praxis das Profil einer Sägezahnkurve (sog. Blaze-Gitter). Wie müssen die Winkel dieser Kurve gewählt werden, damit in obigem Beispiel (für $\lambda = 400$ nm) die erste Beugungsordnung maximale Intensität erreicht? Hinweis: Verwenden Sie eine einfache anschauliche Bedingung aus der geometrischen Optik, um die geeigneten Winkel zu finden. Kann das Gitter auch für höhere Beugungsordnungen auf die selbe Intensität optimiert werden? Begründen Sie qualitativ anhand der Ergebnisse aus Aufgabe 29b).

(2 Punkte)

31. **Thomsonstreuung; (4 Punkte)**
Ein freies Elektron werde durch eine einfallende elektromagnetische Welle (Wellenvektor $\boldsymbol{k_0}$ und Polarisationsvektor $\boldsymbol{E_0}$) zu Schwingungen angeregt. Als beschleunigte Ladung strahlt das Elektron, nach der Larmorformel

$$P_{scatt} = \frac{1}{6\pi}\frac{e^2}{\epsilon_0 c^3}\dot{\boldsymbol{v}}^2$$

Leistung ab.

(a) Bestimmen Sie den Streuquerschnitt $\sigma = \frac{P_{scatt}}{|\boldsymbol{S}|}$, also das Verhältnis von gestreuter Leistung zu pro Einheitsfläche eingestrahlter Leistung, die durch den Poyntingvektor gegeben ist. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem klassischen Elektronenradius. Dieser ist durch die Länge gegeben bei der die elektrostatische Energie einer kugelförmigen Verteilung der Ladung e der Ruheenergie $E = mc^2$ entspricht. (1 Punkt)

(b) Betrachtet man die in die Richtung $\boldsymbol{n}$ pro Raumwinkel Ω abgestrahlte Leistung, so gilt

$$\frac{dP_{scatt}}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0}\left(\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{v}}\right)^2 .$$

Bestimmen Sie diese für linear polarisierte Wellen, deren Polarisationsvektor (i) in der Streuebene (wird durch $\boldsymbol{k_0}$ und $\boldsymbol{n}$ aufgespannt) und (ii) senkrecht dazu liegt (wie immer ist eine Skizze hilfreich). Drücken Sie dabei das Ergebnis durch den Winkel aus, der durch $\boldsymbol{k_0}$ und $\boldsymbol{n}$ definiert ist. (1 Punkt)

(c) Was erhalten Sie für unpolariertes Licht? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem sie analog zu Teil (a) einen differenziellen Streuquerschnitt definieren und durch Integration über den Raumwinkel den (gesamten) Streuquerschnitt erhalten. (1 Punkt)

(d) Zeichnen Sie die Streudiagramme (differenziellen Streuquerschnitt als Polardiagramm) für die drei Polarisationsfälle. (1 Punkt)

32. **Strahlungsdämpfung des klassischen Atoms; (7Punkte)**
Um 1910 war durch die Ruterfordschen Streuversuche bekannt, dass Atome aus positiv geladenen Kernen und einer Hülle von (negativ geladenen) Elektronen im Abstand von ca. $x_0 = 10^{-10}m$ bestehen. Nach den Gesetzen der klassischen Mechanik können die Elektronen nur aufgrund der Zentrifugalkraft einen endlichen Abstand zum Kern halten und müssen sich deswegen auf Keplerbahnen (Ellipsen oder Kreisen) bewegen. Dabei erfahren sie ständige Ablenkung und damit Beschleunigung, weswegen sie gemäß der Elektrodynamik ständig elektromagnetische Energie ausstrahlen. Da diese Energie nur aus der Bewegungsenergie der Elektronen stammen kann, muss diese abnehmen, und damit müssen die Elektronen in den positiv geladenen Kern stürzen. Im Folgenden soll die Lebenszeit eines Atoms gemäß der klassischen Physik abgeschätzt werden.

(a) Nach dem Lorentzschen Oszillatormodell (Blatt 2, Aufgabe 11) wird die Auslenkung $x(t)$ eines Elektrons (Ladung $-e$, Masse m) durch einen gedämpften harmonischen Oszillator beschrieben (es sei $\omega_0 > \gamma > 0$)

$$m\Big(\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t)\Big) = 0.$$

Lösen Sie die Differenzialgleichung mit den Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0, \quad \dot{x}(t=0) = 0$. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x}(t)$ für $t > 0$. Welche Näherungen darf man für schwache Dämpfung ($\gamma \ll \omega_0$) machen? (1 Punkt)

(b) Die pro Frequenz und Raumwinkel ausgestrahlte Energie ergab sich in der Vorlesung für einen linearen elektrischen Dipol zu:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}|\tilde{d}(\omega)|^2 \sin^2\vartheta,$$

wobei ϑ der Streuwinkel ist.
Bestimmen Sie durch Integration über den Raumwinkel die in alle Richtungen ausgestrahlte Energie pro Frequenz: (1 Punkt)

$$\frac{dW}{d\omega} = \int d\Omega \frac{d^2W}{d\omega d\Omega}.$$

(c) Die gesamte ausgestrahlte Energie ergibt sich durch Integration über alle Frequenzen:

$$W = \int_0^\infty d\omega \frac{dW}{d\omega}.$$

Formen Sie den Ausdruck für die pro Frequenz und Raumwinkel ausgestrahlte Energie um, indem Sie folgende Beziehung verwenden:

$$\dot{d}(t) = ev(t)$$

Wie lautet der Ausdruck für die Fouriertransformierte der Geschwindigkeit $\tilde{v}(\omega)$. Setzen Sie $v(t<0) = 0$ für die Fouriertransformation. Diskutieren Sie den Ausdruck $\frac{dW}{d\omega}$ für $\gamma = 0$. Machen Sie sich anhand des Verhaltens für $\omega \to 0, \infty$ und den Extremwerten klar, dass man für $\omega > 0$ und kleiner Dämpfung $0 < \gamma \ll \omega_0$ den Ausdruck $\frac{dW}{d\omega} \propto \frac{\omega_0^4}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}$ erhält. Wie lautet schließlich W? (3 Punkte)

(d) Mit der Annahme, dass die Dämpfung des Oszillators aus den Strahlungsverlusten (sog. Strahlungsdämpfung) resultiere, lässt sich durch den Vergleich der potenziellen Energie V_0 des harmonischen Oszillators zum Zeitpunkt $t = 0$ mit W der Wert von γ selbstkonsistent bestimmen. Wie lange lebt ein klassisches Atom, dessen Eigenfrequenz im Bereich von $\nu_0 \approx 10^{15}$ Hz liegt, d.h. Licht im sichtbaren Bereich aussenden kann? (D.h. wie groß ist γ?). (2 Punkte)