

UNIVERSITÄT KONSTANZ

Fachbereich Physik

Prof. Dr. Alfred Leitenstorfer (Experimentalphysik)

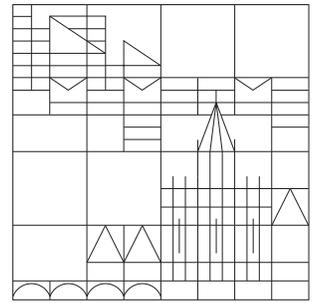
Raum P 809, Tel. (07531)88-3818

E-mail: Alfred.Leitenstorfer@uni-konstanz.de

Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)

Raum P 907, Tel. (07531)88-4678

E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de



**Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs  
Wintersemester 06/07**

**Übungsblatt 6**, Ausgabe 28.11.2006, abzugeben am 05.12.2006  
Besprechung in den Übungen vom 06-08.12.2006

**25. Zweistrahlint interferenz; (7 Punkte)**

- (a) Zeigen Sie, dass für die Phasendifferenz  $\Delta\phi$  zwischen der Reflexion eines Lichtstrahls der Wellenlänge  $\lambda$  an Vorder- und Rückseite einer planparallelen Platte mit Brechungsindex  $n$  und Dicke  $d$  gilt

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \pi,$$

wenn der Strahl unter einem Winkel  $\alpha$  relativ zur Oberflächennormalen auftrifft.

(2 Punkte)

- (b) Ein Kind spielt mit einer wässrigen Seifenlösung und erzeugt damit Seifenblasen. Eine der Blasen fällt 50 cm vor ihm herunter. Wie dick ist die Haut dieser Seifenblase mindestens, wenn sie dem Kind auf dessen Augenhöhe rot ( $\lambda = 660$  nm) erscheint? (1 Punkt)
- (c) Das Kind verfolgt die Farbänderung auf der Äquatoralebene der Blase. Mit welcher mittleren Geschwindigkeit sinkt die Blase, wenn sie von dem Kind nach einer Minute blau ( $\lambda = 488$  nm) wahrgenommen wird? (Hinweis: Betrachten Sie nur die erste Beugungsordnung und nehmen Sie eine konstante Sinkgeschwindigkeit an.) (1 Punkt)
- (d) In Abbildung 1(a) fällt Tageslicht senkrecht auf einen dünnen Ölfilm ( $n_{\text{film}} = 1,5$ ) und erzeugt Interferenzringe. Schätzen Sie die maximale Dicke des gezeigten Ölfilms ab. (1 Punkt)
- (e) Den Krümmungsradius einer Linsenfläche kann man bestimmen, indem man diese auf eine ebene Glasplatte legt und die Durchmesser der bei senkrechtem Einfall von monochromatischem Licht auftretenden Newtonschen Ringe misst (siehe Abbildung 1(b)). Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen dem Durchmesser  $d$  dieser Ringe und dem Krümmungsradius  $R$  der Linse her. Hierbei kann die Richtungsänderung der Lichtstrahlen gegenüber dem Einfallslot bei Reflexion und Brechung vernachlässigt werden. (2 Punkte)

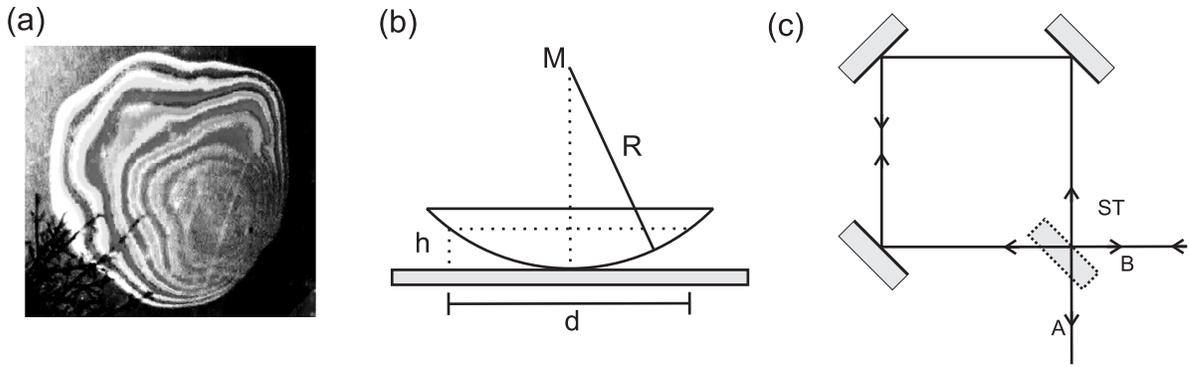


Abbildung 1: (a) Zu Aufgabe 25(d): Ölfilm auf Wasser. (b) Zu Aufgabe 25(e): Linse mit Krümmungsradius  $R$ . (c) Zu Aufgabe 26: Kreiselerferometer.

**26. Kreiselerferometer; (6 Punkte)**

- (a) In Abbildung 1(c) wird der Aufbau eines sogenannten Kreiselerferometers gezeigt. Das einfallende Licht wird an einem 50:50-Strahlteiler (ST) aufgespalten. Die beiden interferierenden Strahlen breiten sich entlang identischer Wege aus. Welche Art der Interferenz (konstruktiv oder destruktiv) beobachtet man am Ausgang A bzw. B?

(1 Punkt)

- (b) Das Interferometer aus Teilaufgabe (a) kann zur Messung von Rotationsgeschwindigkeiten verwendet werden. Hierzu montiert man die obige Spiegelanordnung zusammen mit Lichtquelle und Detektor in einer frei drehbaren Ebene. Zeigen Sie, dass sich ein Phasenunterschied von

$$\Delta\phi = \frac{8\pi F}{\lambda c} \Omega,$$

zwischen den beiden gegenläufigen Wellen ergibt, wenn dieses System mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  rotiert. Dabei bezeichnet  $F$  die vom Lichtweg eingeschlossene Fläche,  $\lambda$  die Wellenlänge des Lichts und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

(2 Punkte)

- (c) In modernen Kreiselerferometern ersetzt man die Spiegelanordnung durch einen Glasfaserring. Wie lang muss der Lichtwellenleiter mindestens sein, um bei einer am Ausgang B minimal detektierbaren Intensitätsänderung von  $10^{-7}$ , einem Durchmesser des Rings von 0,2 m und einer Wellenlänge von  $0,5 \mu\text{m}$  die Erdrotation messen zu können? Nehmen Sie ohne Beweis an, dass  $\Delta\phi$  auch in dispersiven Medien nicht vom Brechungsindex abhängt. (2 Punkte)
- (d) Die Phasendifferenz  $\Delta\phi$  wird auch vom Winkel zwischen Drehachse und Flächennormale des Faserrings beeinflusst. Erläutern Sie diesen Zusammenhang und überlegen Sie sich, wie man ihn zur Herstellung eines präzisen Navigationsinstrumentes einsetzen könnte. (1 Punkt)

**27. Greensche Funktion der Elektrostatik; (5 Punkte)**

- (a) In der Elektrostatik interessiert man sich für das (zeitunabhängige) elektrische Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  bei gegebenen Ladungsverteilungen  $\rho(\mathbf{r})$ . Zeigen Sie, dass im Vakuum das elektrostatische Potential  $\phi(\mathbf{r})$ , aus dem das E-Feld sich über  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  ergibt, die Poissonsche Gleichung erfüllt:

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\epsilon_0 \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Greensche Funktion  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , die

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{und} \quad \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow \mathbf{0} \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty \tag{2}$$

erfüllt ( $\nabla^2$  wirkt auf  $\mathbf{r}$ ), und mit der die Lösung von GL (1) lautet

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') / \epsilon_0$$

Wie interpretieren Sie das Ergebnis?

*Hinweis:* Verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannte Greensche Funktion der Helmholtzgleichung. (1 Punkt)

- (b) Greensche Funktionen hängen von den Randbedingungen ab. Am Beispiel des elektrischen Potential einer Ladungsverteilung vor einer Metallplatte (die in  $z \leq 0$  liegt) kann dies mit der Methode der Spiegelladungen leicht gezeigt werden.
- Das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  in einem idealen Leiter erfüllt  $\mathbf{E} \equiv 0$  ( $D \equiv 0$ ) und an der Leiteroberfläche springt die Normalkomponente von  $\mathbf{D}$  um die Oberflächendichte  $\rho_F$ . Wie gerichtet ist also  $\mathbf{E}$  auf der Leiteroberfläche  $z = 0$ ? (1 Punkt)
  - Verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass das Feld einer Punktladung  $q$  im Abstand  $z_o > 0$  vor dem Metall so lautet, als ob bei  $-z_o$  eine Spiegelladung  $-q$  säße. (2 Punkte)
  - Wie lautet also für  $z > 0$  die Greensche Funktion vor einem idealer Leiter für  $z \leq 0$ ?  
*Hinweis:* Verwenden Sie, dass das Potential bei  $\mathbf{r}$  einer Punktladung  $q$  bei  $\mathbf{r}_o$  gegeben ist durch

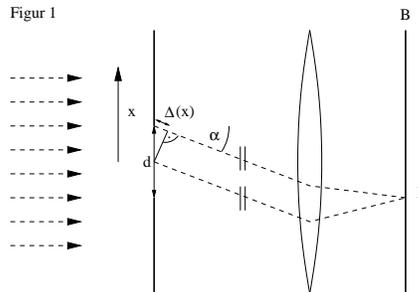
$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{\epsilon_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o)$$

(1 Punkt)

- Welche Randbedingung erfüllt  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o)$  bei  $z = 0$ ? (1 Punkt)

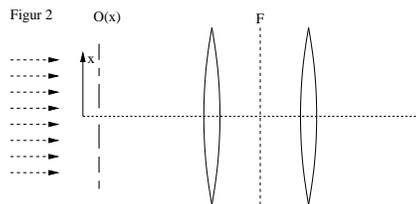
## 28. Fraunhofer Beugung, Phasenkontrastverfahren; (10 Punkte)

In dieser Aufgabe möchten wir die abstrakte Aussage aus der Vorlesung, das Beugungsbild bei Fraunhofer Beugung sei die Fouriertransformierte der Spaltfunktion, am Beispiel des Einzelspalt herleiten. Desweiteren wird diese Erkenntnis auf die Wirkungsweise eines Phasenkontrastmikroskops angewendet. Zur Vereinfachung betrachten wir Systeme, die sich in  $y$ -Richtung nicht ändern, was unsere Analyse auf die  $xz$ -Ebene beschränkt.



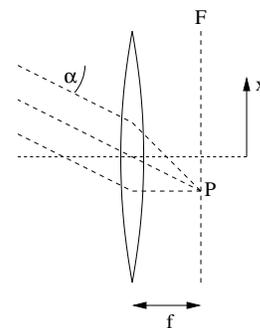
- (a) Betrachten Sie in Figur eins einen Einzelspalt, der von einer ebenen monochromatischen Welle bestrahlt wird. Nach dem Prinzip von Huygens ist jeder Punkt innerhalb des Spaltes Quelle einer Kugelwelle. Die Intensität auf dem Schirm  $B$  soll berechnet werden.
- Bestimmen sie nach Huygens die Phase  $\phi$  einer Welle am Punkt  $P$  auf dem Schirm, die vom Punkt  $x$  im Spalt emittiert wird, als Funktion von  $\Delta(x)$  und der Wellenlänge  $\lambda$ . Hinweis: Die Wirkung der Linse wird in Aufgabenteil c) besprochen.
  - Um die Amplitude des  $E$ -Feldes am Punkt  $P$  zu erhalten, müssen wir die Phasen  $e^{i\phi}$  der Wellen von allen Punkten  $x$  im Spalt aufsummieren oder aufintegrieren. Leiten Sie folgenden Ausdruck für die Amplitude her,  $E \propto \int_{-d/2}^{d/2} dx e^{ik(\alpha)x}$ . Dies ist die Fouriertransformierte für  $k(\alpha)$ . Wie lautet  $k(\alpha)$ ? (2 Punkte)

- (b) Lösen Sie obiges Integral und berechnen Sie damit die Intensitätsverteilung auf dem Schirm für einen Einzelspalt als Funktion des Winkels  $\alpha$ . (1 Punkt)



- (c) Figur zwei zeigt die Abbildung eines Objektes in der Objektebene in die Bildebene  $B$ . Als Objektfunktion  $O(x)$  definieren wir die Amplitude des  $E$ -Feldes in der Objektebene. Diese Abbildung kann als Fouriertransformation der Objektfunktion  $O(x)$  in die Brennebene  $F$  und einer Rücktransformation in die Bildebene  $B$  angesehen werden.

Bestimmen Sie anhand nebenstehender Zeichnung die Position  $x$  des Punktes  $P$  in der Brennebene als Funktion des Winkels  $\alpha$  für eine ideale dünne Linse mit Brennweite  $f$ . Bestimmen Sie daraus die Skalierung der  $k$ -Achse,  $x(k)$ . Wo liegt also das erste Minimum für einen Einzelspalt? ( $d = 2\mu\text{m}$ ,  $\lambda = 600\text{ nm}$ ,  $f = 15\text{ cm}$ )



Skizzieren Sie die Intensitätsverteilung in der Brennebene  $F$  für die folgenden Fälle:

- i. Das Objekt ist ein sehr großer Spalt,

$$O(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ für } -L < x < L \\ 0 \text{ sonst} \end{array} \right\} \text{ mit } L \rightarrow \infty.$$

- ii. Das Objekt ist ein unendlich kleiner Punkt,  $O(x) = \delta(x)$ .

- iii. Das Objekt ist ein regelmäßiges Strichgitter mit Abstand  $l$ ,  $O(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nl)$ .

(3 Punkte)

- (d) Das regelmäßige Strichgitter weise kleine Defekte (zum Beispiel Verschmutzungen) auf. Zeichnen Sie einen Fourierfilter in der Brennebene, der die durch die Defekte auftretenden unerwünschten Fouriermoden herausfiltert, so dass das Bild wieder ein schönes Gitter ist. (1 Punkt)
- (e) Viele biologische Objekte wie Zellen sind lichtdurchlässig, was ihre Beobachtung mit dem Mikroskop erschwert. Das Phasenkontrastverfahren, für das F. Zernicke 1953 den Nobelpreis erhielt, nutzt die Tatsache aus, dass optisch dichtere Medien eine Phasenverschiebung der Lichtwellen bewirken. Im folgen wird die Objektfunktion  $O(x) = A e^{i\psi(x)}$  betrachtet.  $A$  sei eine Konstante.  $O(x)$  beschreibt ein nichtabsorbierendes Objekt mit Brechungsindex  $n \neq 1$ , das in der Objektebene liegt. Es ändert die Phase, nicht aber die Intensität des Lichtes, von dem es durchstrahlt wird,  $|O(x)|^2 = A^2$ . Die Phasenverschiebung sei klein, so dass wir  $O(x) \approx A(1 + i\psi(x) + \mathcal{O}(\psi(x)^2))$  schreiben können.
- Berechnen Sie die Fouriertransformierte  $\tilde{O}(k)$  von  $O(x)$  als Funktion von  $\tilde{\psi}(k)$ . Vernachlässigen Sie Terme  $\mathcal{O}(\tilde{\psi}(k)^2)$ . Berechnen Sie durch Rücktransformation die Bildfunktion  $B(x)$ . Zeigen Sie, dass  $|B(x)|^2 = \text{konst} + \mathcal{O}(\psi^2)$ . Was können Sie dadurch über die Sichtbarkeit des Objektes sagen?
  - Beim Phasenkontrastverfahren wird im Zentrum der Ebene  $F$  ein  $\lambda/4$  Plättchen eingefügt, welches die Phase der Fouriertransformierten  $\tilde{O}(k)$  bei  $k = 0$  um  $\pi/2$  verschiebt. Wie lautet die veränderte Fouriertransformierte  $\tilde{O}'(k)$ ? Berechnen Sie die Bildfunktion  $B'(x)$  sowie  $|B'(x)|^2$  in erster Ordnung in  $\psi(x)$ . Was können Sie nun über die Sichtbarkeit des Objektes aussagen? (3 Punkte)