UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Alfred Leitenstorfer (Experimentalphysik)
Raum P 809, Tel. (07531)88-3818
E-mail: Alfred.Leitenstorfer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 06/07

Übungsblatt 5, Ausgabe 21.11.2006, abzugeben am 28.11.2006
Besprechung in den Übungen vom 29.11.-01.12.2006

21. **Geometrische Optik - Linsen; (7 Punkte)**

(a) Berechnen Sie die Brennweite einer dünnen Linse mit $R_1 = 20\,\text{cm}$ und $R_2 = -20\,\text{cm}$ mit dem Brechnungsindex $n_\text{G} = 1.5$ in Luft ($n = 1$) und in Wasser ($n = 1.33$). Leiten Sie eine allgemeine Beziehung zwischen der Brennweite einer Linse in Luft und in einem dichteren Medium her. (2 Punkte)

(b) Ein Gegenstand der Höhe $h = 3\,\text{cm}$ befinde sich im Abstand $g = 20\,\text{cm}$ vor einer dünnen Linse mit der Brechkraft $D = 10\,\text{dpt}$. Zeichen Sie den exakten Strahlengang der Abbildung und ermitteln Sie so den Ort b und den Vergrößerungsfaktor V. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse rechnerisch. Ist das Bild virtuell oder reell, aufrecht oder umgekehrt?

(2 Punkte)

(c) Wiederholen Sie die Aufgaben aus b) für eine dünne Linse mit $f = -20\,\text{cm}$ und der Gegenstandsweite $g = 30\,\text{cm}$. (1 Punkt)

(d) Wiederholen Sie die Berechnungen aus b) und c) für eine Gegenstandsweite von $g = 5\,\text{cm}$ und klassifizieren Sie die Abbildungen. (1 Punkt)

(e) Ein Gegenstand befinde sich im Abstand $d = 2.4\,\text{m}$ vor einem Schirm. Mit einer Sammellinse wird ein reelles Bild des Gegenstandes auf dem Schirm erzeugt. Durch Verschieben der Linse um $a = 1.2\,\text{m}$ wird ein zweites reelles Bild auf dem Schirm erzeugt. An welcher Stelle stand die Linse zuerst und wie groß ist Ihre Brennweite? (2 Punkte)

22. **Geometrische Optik - Linsensysteme; (6 Punkte)**

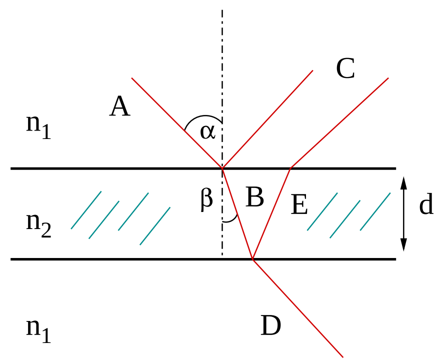
(a) Durch sogenannte Achromate, die aus zwei verkitteten Linsen bestehen, wird die chromatische Abberation der Linsen teilweise ausgeglichen. Eine solche achromatische Linse bestehe aus einer symmetrischen Bikonvexlinse der Glassorte 1 mit $n_{\text{D}1} = 1.5100$ und einer Plankonkavlinse mit gleichem Radius der Glassorte 2 mit $n_{\text{D}2} = 1.6128$. Für die Spektrallinie D soll die Brennweite $f = 20\,\text{cm}$ erreicht werden. Welchen Betrag müssen die Krümmungsradien R der Linsen haben? Welcher Bedingung müssen die Dispersionen der beiden Glassorten genügen, damit es sich in einem gewählten Frequenzbereich tatsächlich um einen Achromaten handelt? (2 Punkte)

(b) Ein Theaterglas (Galileisches Fernrohr) habe die Vergrößerung $V = 3$. Bei der Einstellung auf unendlich ist der Abstand zwischen Objektiv und Okular gegeben durch $l = 60\,\mathrm{mm}$; dieser Abstand kann zum Scharfstellen auf näher gelegene Objekte maximal um die Strecke $e = 20\,\mathrm{mm}$ verlängert werden. Wie groß sind die Brennweiten von Objektiv und Okular? Wie groß ist der kürzeste Beobachtungsabstand bei Beobachtung mit entspanntem Auge? (2 Punkte)

(c) Bei einem einfachen Mikroskop sei die Tubuslänge um die Strecke $\Delta t = 68\,\mathrm{mm}$ zu variieren, so dass die Gesamtvergrößerung zwischen $V_1 = 125$ und $V_2 = 225$ variiert werden kann. Die Vergrößerung des Okulars sei $V_0 = 6.25$ bei Beobachtung mit entspanntem Auge (bzw. Bezugssehweite $S = 25\,\mathrm{cm}$. Wie groß sind die Brennweiten des Okulars und des Objektivs? Welchen Tubuslängen entsprechen V_1 und V_2? (2 Punkte)

23. **Lummer-Gehrke-Platte; (9 Punkte)**

Eine Lummer-Gehrke-Platte besteht aus einer planparallelen dünnen Glasplatte. Durch Einstrahlung eines Lichtstrahles nahe dem Winkel der Totalreflexion erreicht man eine fast vollständige Reflexion innerhalb der Platte. Durch Überlagerung der jeweils reflektierten und transmittierten Anteile erhält man damit ein wellenlängensensitives Interferenzmuster.



(a) Stellen Sie für eine senkrecht zur Einfallsebene polarisierte ebene Welle in Anlehnung zur Aufgabe 15 (Fresnelsche Formeln) ein Gleichungssystem für die Koeffizienten A,..,E aus den Stetigkeitsbedingungen der Tangentialkomponenten an den beiden Grenzflächen auf (siehe Abbildung). (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie damit unter der Annahme $\alpha = \beta = 0$ das Verhältnis C/A. Sie sollten finden $\mid \frac{C}{A} \mid^2 = R\frac{2(1-\cos\phi)}{1+R^2-2R\cos\phi}$ Wie lautet der Phasenwinkel ϕ?

Hinweis: Führen Sie eine Variable $\eta = e^{ikd/2}$ ein. (2 Punkte)

(c) Alternativ lässt sich dieses Problem für beliebige α auch mit der sog. Summationsmethode berechnen. Man addiert hierbei die verschiedenen, mehrfach reflektierten Wellen unter Berücksichtigung ihrer Phasenverschiebungen. (Die Abbildung zeigt zwei dieser Teilwellen.) Bestimmen Sie dafür zuerst die Phasendifferenz $\Delta\phi = kl - \omega t$ bei der Reflexion an der zweiten Grenzfläche durch geometrische Überlegungen.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Phasenwinkel in Aufgabenteil b). (1 Punkt)

(d) Betrachten Sie jetzt das Amplitudenverhältnis und bestimmen Sie dazu aus der Summe von p$\in \mathbb{N}$ Reflexionen die Verhältnisse C/A und D/A. Geben Sie auch die Verhältnisse für $p \to \infty$ an.

Ist die Näherung $p \to \infty$ für eine Lummer-Gehrke-Platte zulässig (Reflexionskoeffizient R = 0.9, p = 100)? Vergleichen Sie |C/A| und |D/A| bei Vernächlässigung der direkten Reflexion.

Hinweis: Überlegen Sie sich, welcher Anteil der Amplitude bei der 1,3,5-fachen bzw. 2,4,6-fachen Reflexion zur Gesamtamplitude beiträgt. Für die geometrische Reihe gilt :

$$\sum_{l=0}^{p} R^l e^{il\phi} = \frac{1 - R^p e^{ip\phi}}{1 - Re^{i\phi}}$$

(2 Punkte)

(e) Stellen Sie das Verhältnis |D/A| in Abhängigkeit von ϕ für R=0.9 graphisch dar. Zur Diskussion des Auflösungsvermögen $A = \lambda/\delta\lambda$ bestimmen Sie nun die Halbwertsbreite $\delta\phi$. Welcher Ausdruck ergibt sich für das Auslösungsvermögen in Abhängigkeit von der Länge L einer Lummer-Gehrke-Platte und der Wellenlänge λ.

Hinweis: Für die Halbwertsbreite gilt allgemein $|\mathrm{D/A}|^2 = \frac{1}{2}$. Weiterhin gilt $\phi/\delta\phi = -\lambda/\delta\lambda$ (Warum ?). Überlegen Sie sich, wie die Länge L in die Zahl p der Reflexionen eingeht.

(2 Punkte)

24. **Wellenleiter; (8 Punkte)**

Elektromagnetische Wellen können in Kabeln geleitet werden. In der Elektrotechnik verwendet man vor allem metallische Koaxialkabel, in der Optik dielektrische Glasfasern. Im folgenden sollen (einfache) zylindersymmetrische Wellenleiter betrachtet werden; ihre Achsen sollen in z-Richtung liegen. Es gelten die elektromagnetischen Wellengleichungen für transversale, monochromatische Felder, $\mathbf{E},\mathbf{B} \propto e^{i\omega t}$:

$$\epsilon(\frac{\omega}{c})^2\,\mathbf{E} + \nabla^2\,\mathbf{E} = 0\,,\ \epsilon(\frac{\omega}{c})^2\,\mathbf{B} + \nabla^2\,\mathbf{B} = 0\,,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0\,, \nabla\cdot\mathbf{B} = 0\,, \mathbf{B} = \frac{i}{\omega}\nabla\times\mathbf{E}$$

und jeweils die entsprechenden Stetigkeitsbedingungen. Entlang der Wellenleiter propagierende Wellen sollen mit den Ansätzen $\mathbf{E} \propto e^{i\omega t - ikz}\,\mathbf{E}^0(r,\phi)$ beschrieben werden, wobei z, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und ϕ Zylinderkoordinaten sind, und ein analoger Ansatz für $\mathbf{B}$ gilt.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Ansatzes (aber noch ohne Betrachtung der Stetigkeitsbedingungen an den Rändern), dass es zwei Fälle gibt, die getrennt untersucht werden können: (A) $E_z^0 = 0$ und $B_z^0 \neq 0$ (transversal-elektrisch, TE), und (B) $E_z^0 \neq 0$ und $B_z^0 = 0$ (transversal-magnetisch, TM).

Hinweis: Verwenden Sie hierbei noch kartesische Koordinaten und zeigen Sie, dass in beiden Fällen jeweils die folgende gewöhnliche Differentialgleichung gelöst werden muss:

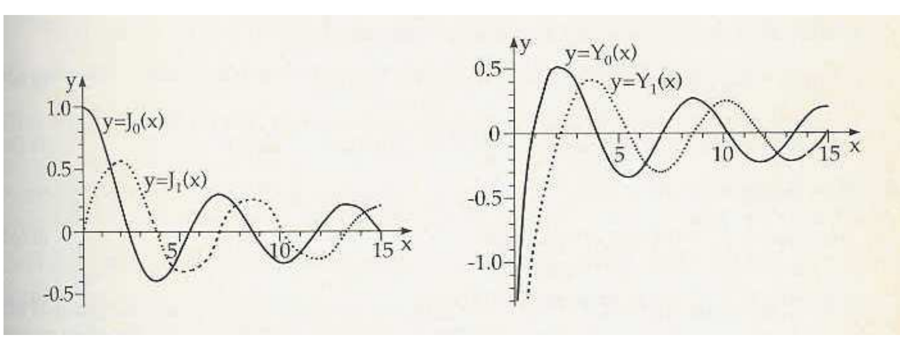
$$\left[(\frac{\partial}{\partial x})^2 + (\frac{\partial}{\partial y})^2 + \alpha\right]\ A = 0$$

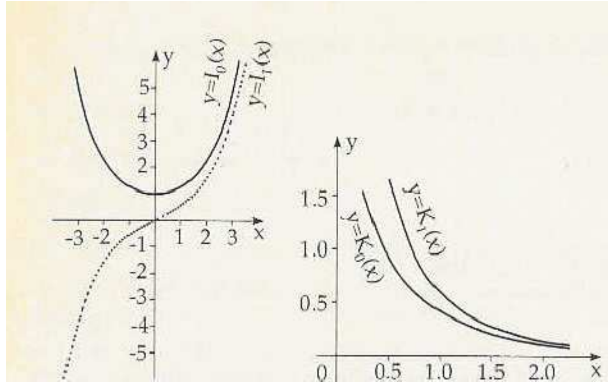
wobei A für E_z^0 oder B_z^0 steht. Geben Sie für die TM-Welle an, wie sich die anderen Feldkomponenten (E_x^0, etc) aus E_z^0 ergeben. Wie lautet α? (2 Punkte)

(b) Im Folgenden soll nur der TM-Fall betrachtet und obige Gleichung für $E_z^0(r,\phi)$ gelöst werden. Der Wellenleiter sei durch ein luftgefülltes ($\epsilon = 1$) metallisches Rohr (Modell des idealen Leiter, $\mathbf{E} \equiv 0$) mit Durchmesser $2R$ gegeben. Wie lautet die Randbedingung für E_z^0? (1 Punkt)

(c) Transformieren Sie mit dem Ansatz $E_z^0 = E(\rho)\cos n\phi$ (mit $\rho = \beta r$) obige Gleichung auf eine Besselsche Differentialgleichung:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)\right] E(\rho) = 0$$





Was ist β? Diese Differentialgleichung wird für festes n durch die Besselschen $J_n(\rho)$ und Weberschen Y_n Funktionen gelöst (siehe Abbildung). Begründen Sie, dass die Lösung mit den niedrigsten Frequenzen lautet:

$$E_z^0 = E_0^0 \; J_0(\beta_0 \, r) \; , \quad \text{mit} \;\; \beta_0 \approx \frac{2.40}{R}$$

Der Parameter β kann also nur diskrete Werte annehmen; deswegen spricht man von (Eigen-) Moden. Wie lauten die Dispersionsrelation $\omega(k)$, die Phasengeschwindigkeit $\omega(k)/k$ und die Gruppengeschwindigkeit $\partial\omega/\partial k$ dieser Lösungen?

(2 Punkte)

(d) Bei optischen Frequenzen ist häufig die oben studierte Metallreflexion ineffizient und es wird die Totalreflexion am optisch dünneren Medium eingesetzt, um die elektromagnetische Welle lateral einzusperren. Wiederum werde nur die TM-Welle betrachtet, die in einer zylindersymmetrischen Glasfaser aus einem Kern mit Brechungsindex n (ideales Dielektrikum, $n = \sqrt{\epsilon} > 1$) und Radius R geführt wird, welche von Luft (Brechungsindex 1) umgeben ist. Begründen Sie, dass wiederum die Lösung mit den niedrigsten Frequenzen lautet:

$$E_z^0 = E_0^0 \; J_0(\gamma_0 \, r)$$

wobei γ_0 noch unbestimmt ist. Über den Zusammenhang von γ_0 mit ω können Sie aber schon die Dispersionsrelation $\omega(k)$, die Phasen- $\omega(k)/k$ und Gruppengeschwindigkeit $\partial\omega/\partial k$ dieser Lösungen bestimmen.

(1 Punkt)

(e) Bei Totalreflexion müssen die elektromagnetischen Felder im optisch dünneren Material (im wesentlichen) exponentiell abfallen. Verwenden Sie, dass die sogenannten modifizierten Besselschen Funktionen I_n und K_n die modifizierte Besselsche Differentialgleichung erfüllen:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \left(1 + \frac{n^2}{\rho^2}\right) \right] E(\rho) = 0$$

und für grosse Abstände von der Achse variieren gemäß:

$$I_n(\rho \to \infty) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \, e^{\rho} \; , \quad K_n(\rho \to \infty) \to \frac{\pi}{\sqrt{2\pi\rho}} \, e^{-\rho}$$

Wie lautet also der Zusammenhang zwischen ρ und r ausserhalb der Faser? Stellen Sie die Bestimmungsgleichung für γ_0 auf.
Hinweis: Sie benötigen eine weitere Randbedingung, welche auf die Stetigkeit der Ableitung $\partial E(\rho)/\partial\rho$ an der Oberfläche der Glasfaser führt. (2 Punkte)