UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Alfred Leitenstorfer (Experimentalphysik)
Raum P 809, Tel. (07531)88-3818
E-mail: Alfred.Leitenstorfer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 06/07

Übungsblatt 4, Ausgabe 14.11.2006, abzugeben am 21.11.2006
Besprechung in den Übungen vom 22.-24.11.2006

17. **Prisma; (6 Punkte)**

(a) Leiten Sie unter Verwendung des Brechungsgesetzes und geometrischer Beziehungen einen allgemeinen Ausdruck für die Ablenkung δ eines Strahls an einem Prisma mit Scheitelwinkel γ und Brechungsindex n her. Das umgebende Medium sei Luft mit $n_{\mathrm{L}} = 1$. Der Strahl treffe unter einem Winkel α_1 auf das Prisma (vgl. Abbildung 1). (2 Punkte)

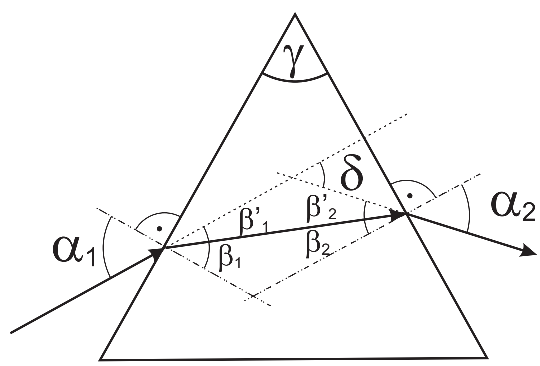


Abbildung 1: Strahlenverlauf in einem Glasprisma

(b) Zeigen Sie, dass der Ablenkwinkel δ für den symmetrischen Fall $\alpha_1 = \alpha_2$ extremal wird.

(2 Punkte)

(c) Mit einem Quarzglasprisma (Scheitelwinkel $\gamma = 60°$, $\alpha_1 = 60°$) beobachtet man im Spektrum einer Natrium-Dampflampe zwei benachbarte Linien bei 589 nm und 589.6 nm. Wie groß ist die Aufspaltung der beiden Linien? Verwenden Sie zur Bestimmung der Brechungsindizes die in Aufgabe 9 gegebene Sellmeier-Gleichung für Quarzglas.

(1 Punkt)

(d) Wie groß muss für ein Prisma der Scheitelwinkel γ sein, damit Licht der Wellenlänge $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$ an den Oberflächen des Prismas keine Reflexionsverluste erfährt ($n(600\mathrm{nm}) = 1.458$). Wählen Sie den Fall der minimalen Ablenkung und begründen Sie dies. Wie muss das Licht polarisiert sein? (1 Punkt)

18. **Hohlspiegel; (7 Punkte)**

(a) In der Vorlesung wurde der sphärische Hohlspiegel für achsennahe Strahlen behandelt. Wie ändert sich für achsenferne Strahlen die Position des Brennpunktes? Betrachten Sie hierzu einen im Abstand h zur optischen Achse parallel einfallenden Strahl. Ab welchem Abstand h ergibt sich kein Fokus durch einfache Reflexion mehr? Was bedeutet dies für die Abbildung ausgedehnter Objekte? (3 Punkte)

(b) Mit Hilfe eines Parabolspiegels lässt sich ein ausgedehntes Bündel kollimierter Strahlen auf einen Punkt fokussieren. Zeigen Sie, dass für die parabolisch gekrümmte Fläche der Brennpunkt unabhängig vom Achsenabstand der einfallenden Strahlen ist. (2 Punkte)

(c) Konstruieren Sie für den *sphärischen Hohlspiegel* die Abbildung eines kleinen Objektes, das im Abstand $2R$ bzw. $R/4$ vor dem Spiegel steht. Wo entstehen die Bilder und wie sind sie orientiert? Handelt es sich um reelle oder virtuelle Bilder? (2 Punkte)

19. **Eikonalgleichung; (8 Punkte)**

In (homogenen isotropen) idealen Dielektrika mit Brechungsindex n lösen ebene monochromatische Wellen $E = Ae^{i(\omega t - \mathbf{kr})}$ (der Vektorcharakter der em. Felder werde vernachlässigt) die Wellengleichung und besitzen Ebenen $\mathbf{kr} = konst.$ als Flächen konstanter Phasen. Für Systeme, in denen der Brechungsindex eine langsam veränderliche Funktion des Ortes ist, $n = n(\mathbf{r})$, können die 'Wellenflächen', d.h. Flächen konstanter Phase $S(\mathbf{r}) = konst.$, des Ansatzes $E = Ae^{i(\omega t - k_0 S(\mathbf{r}))}$ mit $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ aus der Eikonalgleichung

$$(\nabla S) \cdot (\nabla S) = n^2(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(\lambda_0) \tag{1}$$

bestimmt werden. ($\mathcal{O}(\lambda_0)$ kürzt Terme ab, die $\mathcal{O}(\lambda_0) \to 0$ für $\lambda_0 \to 0$ erfüllen.)

(a) Leiten Sie die Eikonalgleichung (1) aus der Wellengleichung ab

$$\left[\nabla^2 - \frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2}\partial_t^2\right] E(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{2}$$

(1 Punkt)

(b) Aus Dimensionsgründen muss die Bedingung $\lambda_0 \to 0$ genauer lauten $\lambda_0/L \ll 1$. Was bestimmt L? (1 Punkt)

(c) Zeigen Sie, dass für optisch homogene Materialien, $n(\mathbf{r}) = n$, (i) Ebenen $S = \mathbf{ar}$ und (ii) Kugelschalen $S = \alpha \mid \mathbf{r} \mid$ mit geeigneten $\mathbf{a}$ und α Gleichung (1) erfüllen. Bestimmen Sie die Vektorfelder $\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \frac{1}{n(\mathbf{r})}\nabla S(\mathbf{r})$ für die zwei Beispiele und begründen Sie, dass $\mathbf{s}$ senkrecht auf den Wellenflächen steht. In der geometrischen Optik beschreibt $\mathbf{s}$ Bahnen, die als Lichtstrahlen interpretiert werden. Für die Beispiele sind dies Strahlen, die aus einem Kollimator (Fall i) austreten oder von einer Punktquelle (Fall ii) ausgehen.

(2 Punkte)

(d) Zeigen Sie

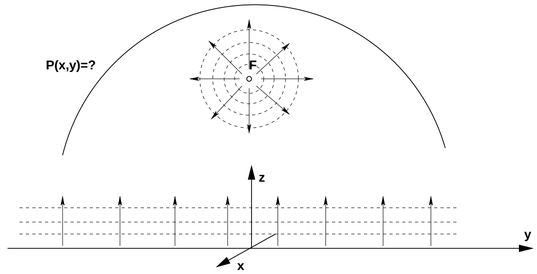
$$\nabla \times n\,\mathbf{s} = 0 \tag{3}$$

und bestimmen Sie damit den optischen Weg Λ zwischen einem Objektpunkt P zu seinem Bildpunkt P' aus dem Linienintegral:

$$\Lambda = \int_P^{P'} d\mathbf{s} \cdot n(\mathbf{r})\,\mathbf{s}(\mathbf{r})$$

(1 Punkt)

(e) Leiten Sie aus Gl.(3) das Brechungsgesetz von Snellius ab. (1 Punkt)
Hinweis: Betrachten Sie eine Grenzschicht und verfahren Sie wie in Paragraph 1.5.3 der Vorlesung.



(f) Wie muß ein perfekter Spiegel geformt sein, um folgenden Effekt zu erzeugen: Eine einfallenden ebenen Wellen wollen wir in eine Punktquelle verwandeln, indem wir alle Strahlen gleichzeitig in **F** bündeln. Nutzen Sie das Eikonal $S(r)$, um die gesuchte Oberfläche $p(x, y)$ als mathematische Formel auszudrücken.

Überprüfen Sie ferner, ob dem Brechungsgesetz von Snellius an dieser Oberfläche genüge getan wird. (2 Punkte)

20. **Oberflächenwellen; (8 Punkte)**

Durch Reflexion von Licht erhält man Information über die elektromagnetischen Eigenschaften verschiedener Materialien. Im beleuchteten Medium (Medium 2) gilt die Dispersionsrelation

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon(\omega)}$$

und propagierende Wellen treten nur auf für $\epsilon > 0$. Für $\epsilon < 0$ beobachtet man exponentiell gedämpfte Felder in Medium 2. (Medium 1 sei im folgenden als Vakuum angenommen.)

Für $\epsilon < 0$ gibt es jedoch auch die Möglichkeit entlang der Oberfläche propagierender elektromagnetischer Wellen, diese werden Oberflächenpolaritonen genannt. Ihre Felder sind auf die Grenzfläche (bei $z = 0$) lokalisiert und fallen exponentiell sowohl in's Vakuum als auch in's Medium 2 ab.

(a) Stellen Sie allgemeine Ansätze für die magnetischen Felder in Medium 1 und 2 auf, die exponentiell (mit Konstanten κ_1 und κ_2) als Funktion von z abfallen, die mit Wellenzahl q propagierende ebene monochromatische Wellen in x Richtung entlang der Grenzfläche beschreiben, und deren **B**-Vektoren in y-Richtung zeigen. Verwenden Sie kinematische Einschränkungen, um Ihre Ansätze so weit wie möglich einzuschränken. (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die zugehörigen elektrischen Felder. (1 Punkt)

(c) Verwenden Sie die Stetigkeitsbedingungen der elektromagnetischen Felder und zeigen Sie damit:

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = -\epsilon$$

Wann können Oberflächenwellen also auftreten? (1 Punkt)

(d) Bestimmen Sie die Wellengleichungen in beiden Medien und leiten Sie daraus und mit Aufgabenteil c) die Dispersionsrelation ab:

$$q = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}$$

Welche weitere Einschränkung für die Existenz von Oberflächenwellen erkennen Sie?

(2 Punkte)

(e) Bestimmen und diskutieren Sie (z.B. graphisch) die Dispersionsrelation für $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ aus dem Drude-Modell. Begründen Sie, dass diese Oberflächenanregungen optisch nicht angeregt werden können. (1 Punkt)

(f) Bestimmen und skizzieren Sie die elektrischen Felder und die induzierte Oberflächenladungsdichte. (1 Punkt)