UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Alfred Leitenstorfer (Experimentalphysik)
Raum P 809, Tel. (07531)88-3818
E-mail: Alfred.Leitenstorfer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 06/07

Übungsblatt 3, Ausgabe 07.11.2006, abzugeben am 14.11.2006
Besprechung in den Übungen vom 15.-17.11.2006

13. **Regenbogen; (6 Punkte)**

Paralleles Sonnenlicht trifft auf ein kugelförmiges Wassertröpfchen mit Radius R und wird in diesem einmal reflektiert.

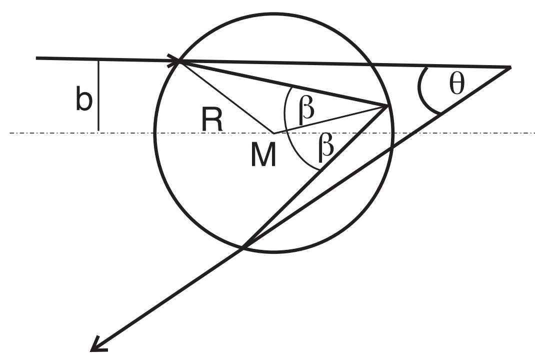

Abbildung 1: Strahlenverlauf in einem kugelförmigen Wassertropfen

(a) Berechnen Sie den Austrittswinkel θ in Abhängigkeit des Streuparameters b und tragen Sie θ gegen b/R auf (siehe Abbildung 2). Der Brechungsindex von Wasser für rotes Licht beträgt $n = 1.33$. Für welchen Winkel θ wird am meisten Licht reflektiert? (4 Punkte)

(b) Wieso gibt es eine Farbaufspaltung und wie ist die Reihenfolge der Farben? (1 Punkt)

(c) Unter guten Bedingungen können zusätzliche Regenbögen beobachtet werden. Wie entstehen diese und wo befindet sich der Mittelpunkt der Kreise, die durch die Regenbögen beschrieben werden. (1 Punkt)

14. **Gekrümmte Lichtstrahlen – Sonnenuntergang; (6 Punkte)**

Aufgrund der Lichtbrechung in der Atmosphäre geht die Sonne früher auf und später unter, als geometrisch zu erwarten ist.

(a) Zeigen Sie zunächst mit Hilfe des Brechungsgesetzes, dass ein Lichtstrahl in einem Medium mit Brechungsindex $n(h)$ einen infinitesimalen Ablenkwinkel

$$\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{n(h)}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}h}\sin\varphi(s)\mathrm{d}s$$

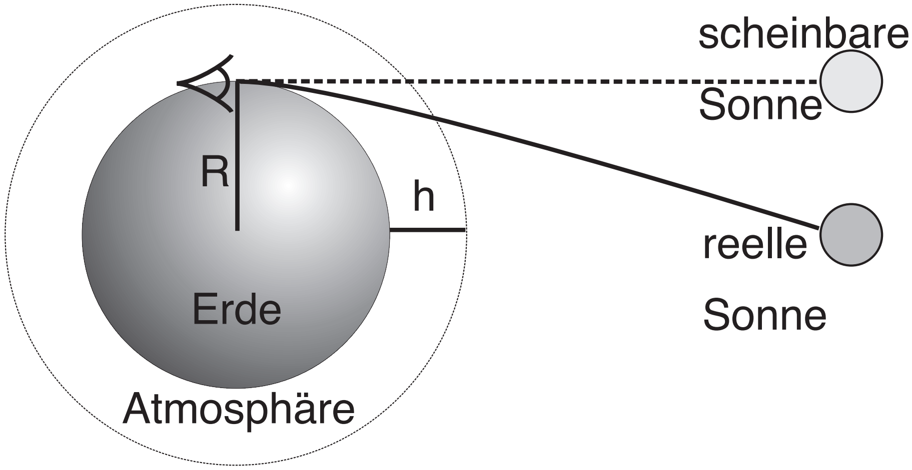

Abbildung 2: Geometrie des Sonnenunterganges am Ort des Betrachters (Augensymbol) auf der Erde.

entlang des Steckeninkrementes $\mathrm{d}s$ erfährt. Dabei ist h der Abstand zum Boden. *Hinweis*: Denken Sie sich das Medium in ebene Schichten der Dicke $\mathrm{d}h$ mit konstantem Brechungsindex zerlegt. Linearisieren Sie hierbei $n(h)$ und verwenden Sie Additionstheorem und Kleinwinkelnäherung. (2 Punkte)

(b) Der Brechungsindex ist näherungsweise linear zum Luftdruck und fällt gemäß der barometrischen Höhenformel exponentiell mit der Höhe h über dem Erdboden ab:

$$n(h) = 1 + (n_0 - 1)e^{-h/H}$$

mit

$$H = \frac{\rho_0 g}{p_0} \approx 8\,\mathrm{km} \qquad n_0 \approx 1.0003.$$

Wo findet die maßgebliche Krümmung des Lichtstrahls statt? Berechnen Sie den Winkel der reellen zur scheinbaren untergehenden Sonne, indem Sie die Ablenkung entlang des Lichtweges aufintegrieren. Nähern Sie außerdem $\varphi(s)$ bzw. $n(h)$ bis zur nullten und $h(s)$ bis zur zweiten Ordnung, und verwenden Sie

$$\int_0^\infty e^{-s^2/\alpha}\,\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\alpha\pi}}{2}.$$

Berechnen Sie die Zeit, um die der Tag (zur Tag- und Nachtgleiche am Äquator) verlängert wird. Argumentieren Sie qualitativ, warum die Sonne am Horizont abgeflacht erscheint. (4 Punkte)

15. **Fresnel'sche Formeln für senkrechte Polarisation; (9 Punkte)**
Gesucht ist der Reflexions- und Transmissionskoeffizient für die Beugung an der Grenzfläche zweier optischer Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2. Das elektrische Feld sei senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Der Einfallswinkel (in Medium 1) sei α, der Beugungswinkel (in Medium 2) sei β.

(a) Die einfallende Welle ist gegeben durch

$$\mathbf{E}_\mathrm{I}(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_\mathrm{I}^y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i[\omega t - (k_1^x x + k_1^z z)]}$$

Verwenden Sie für die reflektierte und die transmittierte Welle zunächst den allgemeinen Ansatz

$$\mathbf{E}_\mathrm{R}(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} E_\mathrm{R}^x \\ E_\mathrm{R}^y \\ E_\mathrm{R}^z \end{pmatrix} e^{i[\omega t - (k_1^x x - k_1^z z)]}\,, \quad \mathbf{E}_\mathrm{T}(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} E_\mathrm{T}^x \\ E_\mathrm{T}^y \\ E_\mathrm{T}^z \end{pmatrix} e^{i[\omega t - (k_2^x x + k_2^z z)]}$$

und zeigen Sie, dass

$$E_{\mathrm{R}}^{x} = E_{\mathrm{R}}^{z} = E_{\mathrm{T}}^{x} = E_{\mathrm{T}}^{z} = 0$$

gilt. Verwenden Sie hierzu die Stetigkeitsbedingungen für $\vec{E}$ an einer ungeladenen Grenzfläche und beachten Sie, dass die Wellen außerdem die Maxwell-Gleichung $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ erfüllen müssen.

Hinweis: Sie erhalten ein homogenes Gleichungssystem für E_{R}^{x}, E_{R}^{z}, E_{T}^{x} und E_{T}^{z}. Wie lautet die Lösung dieses Gleichungssystems? (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen für $\vec{B}$ den Reflexionskoeffizienten $R = E_{\mathrm{R}}/E_{\mathrm{I}}$ und den Transmissionskoeffizienten $T = E_{\mathrm{T}}/E_{\mathrm{I}}$. (3 Punkte)

(c) Diskutieren Sie R in Abhängigkeit vom Einfallswinkel α für $n_2 > n_1$. (1 Punkt)

(d) Diskutieren Sie R in Abhängigkeit vom Einfallswinkel α für $n_2 < n_1$. Was passiert für Einfallswinkel $\alpha > \alpha_{\mathrm{G}}$, wobei α_{G} der Grenzwinkel der Totalreflexion ist? In diesem Fall lässt sich der Reflexionskoeffizient in der Form $R = e^{-2i\psi}$ schreiben (warum?). Bestimmen Sie die Phase ψ. Wie lässt sich die Beziehung $R = e^{-2i\psi}$ physikalisch interpretieren im Hinblick auf die Felder E_{I} und E_{R}? Macht die Bezeichnung „Totalreflexion“ Sinn? (3 Punkte)

16. **Energie/Impuls/Drehimpuls/Spindichte; (9 Punkte)**

(a) Aus der Betrachtung der Kräfte, die elektromagnetische Felder auf Ladungen ausüben, kann mit dem actio=reactio Prinzip die Impulsdichte $\mathbf{p}$ der elektromagnetischen Felder gefunden werden. Zur Vereinfachung der Rechnung soll im Vakuum gerechnet werden, und das zu betrachtende Volumen V den gesamten R^3 einnehmen, so dass Randterme wegen des Verschwinden der Felder im Unendlichen, z.B. $\mathbf{E}(|\mathbf{r}| \to \infty) \to 0$, vernachlässigt werden können.
Bestimmen Sie $\mathbf{p}$ in Analogie zur Ableitung der Energiedichte u.
Hinweis: Zeigen und verwenden Sie

$$\int d\mathbf{r} \left(\frac{1}{\mu_0} (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + \epsilon_0 (\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) \times \mathbf{E} \right) = 0$$

$$(\mathbf{X}(\nabla \cdot \mathbf{X}) - \mathbf{X} \times (\nabla \times \mathbf{X})) = \nabla \cdot (\mathbf{X}\mathbf{X}) - \frac{1}{2} \nabla (X^2),$$

wobei $\mathbf{X}$ für $\mathbf{E}$ oder $\mathbf{B}$ steht. $\mathbf{XX}$ ist das Tensorprodukt. (3 Punkte)

(b) Die Drehimpulsdichte des elektromagnetischen Feldes sei definiert durch das antisymmetrische Tensorfeld

$$L_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} (r_i S_j - r_j S_i),$$

(Poyntingvektor $\mathbf{S}$). Zeigen Sie, dass eine Kontinuitätsgleichung der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{ij} + \partial_k M_{ijk} = -D_{ij}$$

gilt und bestimmen Sie den Drehimpulsstromtensor M_{ijk} und den durch Ladungen und Ströme gegebenen Drehmomententensor D_{ij}. (1 Punkt)

(c) Zeigen Sie, dass $\frac{d}{dt}(\mathbf{L} + \mathbf{L}_M)$ =Oberflächenstrom, wobei $\mathbf{L}$ der über das Volumen V integrierte Drehimpulse des Feldes und $\mathbf{L}_M$ der Drehimpuls der in V befindlichen Materie ist. Ausserhalb V sei keine Materie. (1 Punkt)

(d) Zeigen Sie in Strahlungseichung, dass der Drehimpuls $\mathbf{L} = \int d\mathbf{r} \mathbf{L}(\mathbf{r}, t)$ geschrieben werden kann als Summe von Spin

$$\mathbf{L}_s = \frac{1}{\mu_0} \int d\mathbf{r} \, \mathbf{A} \times \dot{\mathbf{A}}$$

und Bahndrehimpuls $\mathbf{L}_B$, der vom Bezugspunkt des Koordinatensystems abhängt, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_s + \mathbf{L}_B$. Bestimmen Sie $\mathbf{L}_B$. (1 Punkt)

(e) Betrachtet sei eine zirkular polarisierte ebene monochromatische elektromagnetische Welle, die sich in Richtung $\mathbf{n}$ mit der Frequenz ω ausbreitet. Man berechne die Energiedichte u der Welle und stelle Poyntingvektor $\mathbf{S}$, Impulsdichte $\mathbf{P}$ und Spindichte $\mathbf{L}_s = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{A}_s \times \dot{\mathbf{A}}_s$ durch u dar.
Hinweis: Finden Sie zuerst ein Vektorpotential A_s in Strahlungseichung, dh. div $\mathbf{A}_s = 0$, welches die *em* Felder beschreibt. Berechnen Sie dann die gesuchten Größen mit Hilfe dieses A_s. (3 Punkte)