

UNIVERSITÄT KONSTANZ

Fachbereich Physik

Prof. Dr. Alfred Leitenstorfer (Experimentalphysik)

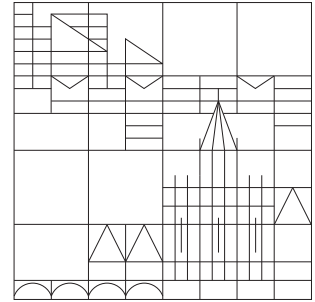
Raum P 809, Tel. (07531)88-3818

E-mail: Alfred.Leitenstorfer@uni-konstanz.de

Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)

Raum P 907, Tel. (07531)88-4678

E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de



Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs Wintersemester 06/07

Übungsblatt 2, Ausgabe 31.10.2006, abzugeben am 06.11.2006

Besprechung in den Übungen vom 8.-10.11.2006

9. Kurze Lichtimpulse in dispersiven Medien; (7 Punkte)

In den Glasfasernetzen der Telekommunikationsindustrie werden große Datenraten in Form kurzer Lichtimpulse über lange Strecken übertragen. Dabei spielt die Dispersion in den Fasern eine entscheidende Rolle.

a) Betrachten Sie eine in x -Richtung propagierende ebene Welle, die am Ort $x = 0$ einen Gaußschen Zeitverlauf aufweist:

$$E(x = 0, t) = E_0 \exp\left(-\frac{t^2}{2t_0^2}\right) \cdot \exp(-i\omega_0 t).$$

Dieser Impuls hat also die Zentralwellenlänge $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m} = \frac{2\pi c}{\omega_0}$. Bei Datenraten von 40 Gb/s ($= 4 \cdot 10^{11}$ Bit pro Sekunde) haben die verwendeten Impulse eine typische Dauer von $t_0 = 10$ ps. Berechnen Sie das Spektrum $\tilde{E}(x = 0, \omega)$ und geben Sie dessen Breite an.

(1 Punkt)

b) Die Dispersion von Quarzglas wird näherungsweise durch folgende Gleichung beschrieben (sogenannte Sellmeier-Gleichung):

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^3 \frac{B_j \lambda^2}{\lambda^2 - C_j^2}$$

mit

j	1	2	3
B_j	0,697	0,408	0,891
C_j (nm)	69,1	115,7	9900,6

Die Wellenzahl $k(\omega) = \frac{\omega \cdot n(\omega)}{c}$ kann als Taylorreihe in der Form

$$k(\omega) = k_0 + k_1 (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} k_2 (\omega - \omega_0)^2 + O^3(\omega - \omega_0)$$

geschrieben werden, wobei mit obigen Koeffizienten $k_1 \approx 4880 \text{psm}^{-1}$ und $k_2 \approx -27,5 \cdot 10^{-3} \text{ps}^2 \text{m}^{-1}$ gilt. Berechnen Sie k_0 und erklären Sie die physikalische Bedeutung von k_0 und k_1 . Wie lange braucht der Impuls, um $d = 100 \text{ km}$ Quartzglas zu durchqueren?

Berechnen Sie das (komplexwertige) Spektrum des E -Feldes nach Durchlaufen der 100 km Quartzglas. Verwenden Sie dabei den obigen Näherungsausdruck. Hinweis: Betrachten Sie die Phasen, welche verschiedene Fourierkomponenten im Glas aufsammeln.

(2 Punkte)

c) Berechnen Sie die zeitliche Form des Impulses nach Durchlaufen des Glases. Welche (einfache) funktionale Form und welche Breite t'_0 hat der Impuls nun? Von welchen Koeffizienten k_j ($j = 0..2$) hängt t'_0 ab?

(3 Punkte)

d) In der Praxis ähneln die Impulse eher Rechteckimpulsen der Dauer $2t_0$. Berechnen Sie das Spektrum eines derartigen Impulses. Begründen Sie qualitativ, wie sich die damit maximal erreichbare Datenrate im Vergleich zu Gaußimpulsen verhält.

(1 Punkt)

10. Antireflexbeschichtung; (3 Punkte)

a) Die Lichtreflexion einer Glasplatte kann stark reduziert werden, wenn die Glasoberfläche mit einer (oder mehreren) dünnen Schichten eines Materials mit geeignetem Brechungsindex überzogen wird. Die an den Grenzflächen reflektierten Wellen können sich praktisch aufheben. Berechnen Sie Brechungsindex n_2 und Dicke d_2 der Vergütungsschicht, die für senkrecht einfallendes Licht der Wellenlänge $\lambda_1 = 589 \text{ nm}$ Reflexfreiheit ergeben. Beachten Sie, dass für den Reflexionskoeffizienten gilt: $R = (n_t - n_i)/(n_t + n_i)$. Hierbei bezeichnen n_i und n_t die Brechungsindizes des Materials aus dem, beziehungsweise in welches die Lichtwelle propagiert. Außerdem ist zu berücksichtigen, dass eine elektromagnetische Welle nur bei Reflexion am optisch dichteren Medium ($n_i < n_t$) einen Phasensprung (π) erfährt. Benutzen Sie für Luft $n_1 = 1$ und für die Glasscheibe $n_3 = 1,5$.

(2 Punkte)

b) Das gleiche Prinzip wird auch benutzt, um die Reflexion an der Oberfläche einer Solarzelle möglichst gering zu halten und viel Licht zur Stromgewinnung nutzen zu können. Dazu wird eine Antireflexschicht aufgebracht, bevor die Solarzelle aus kristallinem Silizium (Brechungsindex $n_6 = 3,8$) unter einer Glasscheibe (Brechungsindex $n_4 = 1,5$) verkapselt wird. Berechnen Sie die optimale Dicke und den Brechungsindex der benötigten Antireflexschicht bei senkrechtem Einfall von Licht der Wellenlänge $\lambda_2 = 650 \text{ nm}$ (Maximum der Photonenzahl des Sonnenspektrums).

(1 Punkt)

c) Welche Reflexion erfährt Licht der Wellenlänge $\lambda_3 = 530 \text{ nm}$ an der Antireflex-beschichteten Solarzelle aus Teilaufgabe b)? Hinweis: Vernachlässigen Sie die Dispersionen in den beteiligten Materialien.

(1 Zusatzpunkt)

11. (Elektromagnetische Wellen; 7 Punkte)

(a) Wir betrachten ein ideales ungeladenes Dielektrikum. Zeigen Sie, dass die Maxwell'schen Gleichungen für die Fourier transformierten Felder $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t)$ und $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t)$ lauten:

$$\begin{aligned} -i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) &= 0 & -i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) &= -\partial_t \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) \\ -i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) &= 0 & -i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) &= \left(\frac{n}{c}\right)^2 \partial_t \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) \end{aligned}$$

(1 Punkt)

- (b) Im unbegrenzten Material sind die elektromagnetischen Felder festgelegt durch ihre Anfangswerte $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t = 0)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t = 0)$. Bestimmen Sie $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t > 0)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t > 0)$ mit Verwendung der Fourier-transformierten Maxwell'schen Gleichungen.

Hinweis: Zeigen Sie, dass ebene, monochromatische und transversale Wellen obige Gleichungen lösen und eindeutig durch $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t = 0)$ und $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t = 0)$ festgelegt sind. Bestimmen Sie diese Anfangsamplitude und zuletzt $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ durch Superposition (inverse Fourier-Transformation).

(2 Punkte)

- (c) Für einen elektrischen Leiter mit der Leitfähigkeit σ gelte das Ohm'sche Gesetz $\mathbf{j}^{\text{int}} = \sigma \mathbf{E}$. Außerdem gelten die konstituierenden Gleichungen $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{j}^{\text{int}}$ und $\mathbf{H} = \mu_0^{-1} \mathbf{B}$ ($\mu = 1$). Zur Zeit $t = 0$ sei im Leiter eine Ladungsverteilung $\rho_0(\mathbf{r})$ vorhanden. Bestimmen Sie mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen die zeitliche Entwicklung von $\rho(\mathbf{r}, t)$. Was ist die charakteristische Zeitskala τ , so dass für $t \gg \tau$ die Näherung $\rho = 0$ gilt, und was folgt im Grenzfall des idealen Leiters ($\sigma \rightarrow \infty$)? Was gilt insbesondere im Fall $\rho_0(\mathbf{r}) = 0$?

(1 Punkt)

- (d) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen je eine geschlossene Gleichung für die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} in einem ungeladenen Ohm'schen Metall ab. (Welche Gleichung erhalten Sie im Grenzfall $\sigma \rightarrow 0$?)

Hinweis: Verwenden Sie die Identität $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$. (1 Punkt)

- (e) Verwenden Sie als Lösungsansatz ebene, monochromatische Wellen: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$. Was folgt damit als Lösbarkeitsbedingung oder Dispersionsrelation?

(2 Punkte)

12. (Lorentz'sches Atommodell; 10 Punkte)

Dem Materiemodell des polarisierbaren Dielektrikums liegen verschiedene Modelle gebundener Punktladungen zugrunde. Dies soll in der folgenden Aufgabe diskutiert werden.

Aus der Vorlesung sind Ihnen die Maxwellgleichungen ohne äußere Ladungen und Ströme in folgender Form bekannt:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D}.$$

Bei einem polarisierbaren Dielektrikum werden diese noch durch folgende Materialgleichungen ergänzt:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu \mu_0} \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

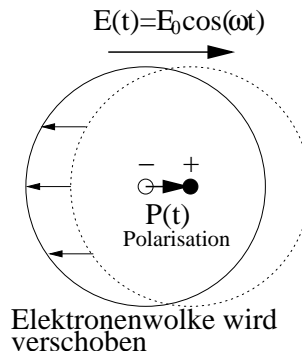
Die aus der Vorlesung bekannte Bewegungsgleichung für die Polarisation soll im Folgenden (erweitert durch einen Dämpfungsterm) abgeleitet werden.

$$\partial_t^2 \mathbf{P} + \omega_0^2 \mathbf{P} = \epsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E}$$

- (a) Leiten Sie das Modell des polarisierbaren Dielektrikums aus dem Lorentz'schen Oszillator Modell ab. Betrachten Sie dazu ein einzelnes Elektron (Ladung $-e$, Masse m_e), welches durch eine Feder (mit Federkonstanten D) fest gebunden ist. Erweitern Sie die Bewegungsgleichung für die Auslenkung $x(t)$ des Elektrons um einen Newtonschen Dämpfungsterm $-m_e \gamma \partial_t x$, sowie eine äußere Kraft durch eine elektromagnetische Welle mit der Frequenz ω .

Zur Lösung der Differentialgleichung machen Sie dabei folgenden Ansatz:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(\omega) e^{i\omega t}.$$



Die frequenzabhängige Polarisation ist dann gegeben durch:

$$\mathbf{P}_0(\omega) = -eN\mathbf{x}_0(\omega).$$

Mit der Elementarladung e und Elektronendichte N .

Was ergibt sich für die Parameter ω_0 und ω_P ? Welcher neue Term tritt in Folge der Dämpfung auf? Geben Sie die Maxwellgleichungen in Abhängigkeit der Felder \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{P} sowie die Bewegungsgleichung für \mathbf{P} an.

(2 Punkte)

- (b) Dieses gekoppelte Differenzialgleichungssystem soll mit Hilfe ebener monochromatischer Wellen der Form:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{A} \in \{\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{P}\}.$$

zu algebraischen Gleichungen vereinfacht werden.

(1 Punkt)

- (c) Für die weitere Rechnung wird benötigt, dass sich jeder Vektor \mathbf{A}_0 in eine Komponente \mathbf{A}_0^{\parallel} parallel zu \mathbf{k} und eine senkrechte, \mathbf{A}_0^{\perp} , zerlegen lässt:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0^{\parallel} + \mathbf{A}_0^{\perp},$$

$$\mathbf{A}_0^{\parallel} = (\mathbf{A}_0 \cdot \hat{\mathbf{k}})\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{A}_0^{\perp} = (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_0) \times \hat{\mathbf{k}}.$$

Mit $\hat{\mathbf{k}}$ auf Eins normierten Vektor in \mathbf{k} Richtung. Zeigen Sie diese Relation der Vektoranalysis, und zerlegen Sie damit die algebraischen Gleichungen in longitudinale und transversale. Was ist der Vorteil dieser Zerlegung?

(2 Punkte)

- (d) Aus der Kombination der longitudinalen Anteile erhält man eine Bestimmungsgleichung für ω . Wie lautet diese? Machen Sie eine Fallunterscheidung, indem Sie Annahmen über die Größe der Dämpfung, verglichen mit ω_0 und ω_P , machen. Welches zeitliche Verhalten ist dabei immer dasselbe? Wenn man die Bestimmungsgleichung für ω als Dispersionsrelation auffasst, erhält man eine etwas unerwartete Eigenschaft für diese Art der Anregung (Exziton aus der Festkörperphysik).

(2 Punkte)

- (e) Die Dielektrizitätskonstante ε des polarisierbaren Dielektrikums kann man aus $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ bestimmen. Geben Sie diese als Funktion der Frequenz ω an (getrennt in Real- $\varepsilon'(\omega)$ und Imaginärteil $\varepsilon''(\omega)$). Stellen Sie diese Funktionen graphisch dar. Wie wirkt sich die Stärke der Dämpfung auf den Real- und Imaginärteil aus?

Die Dielektrizitätskonstante tritt auch bei der Bestimmung der Dispersionsrelation für die transversalen Anteile auf. Bestimmen Sie $\omega(k)$ und stellen Sie diese graphisch (ohne Dämpfung, d.h. $\gamma = 0$) dar. Zeichnen Sie auch das Ergebnis für den longitudinalen Fall ein. Wie lässt sich $\omega(k)$ graphisch mit Hilfe von $\varepsilon(k)$ bestimmen?

(3 Punkte)