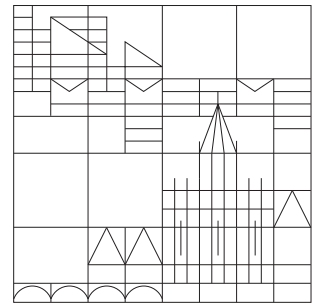


UNIVERSITÄT KONSTANZ
 Fachbereich Physik
 Prof. Dr. Alfred Leitenstorfer (Experimentalphysik)
 Raum P 809, Tel. (07531)88-3818
 E-mail: Alfred.Leitenstorfer@uni-konstanz.de
 Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
 Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
 E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

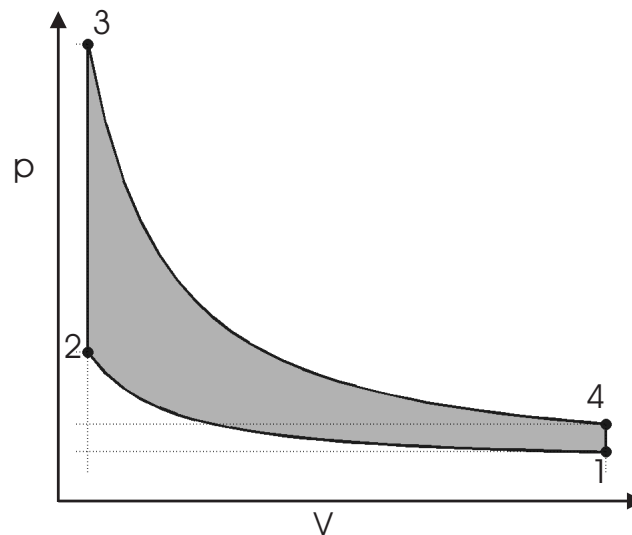


**Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
 Wintersemester 06/07**

Übungsblatt 14, Ausgabe 06.02.2007, abzugeben am 13.02.2007
 Besprechung in den Übungen vom 14.02.-16.02.2007

57. Benzinmotor; (7 Punkte)

Betrachten Sie den Kreisprozeß für einen idealen Benzinmotor (Ottomotor). Das Benzin/Luft-Gemisch (Näherung als ideales 2-atomiges Gas) tritt im Punkt 1 des Zustandsdiagramms (siehe Abbildung) ein und wird adiabatisch komprimiert ($1 \rightarrow 2$). Nach der Zündung heizt sich das Gas durch die explosionsartige Verbrennung auf und der Druck erhöht sich bei konstantem Volumen ($2 \rightarrow 3$). Bei diesem Arbeitstakt wird die Wärmemenge Q_W zugeführt. Darauf folgt eine adiabatische Expansion ($3 \rightarrow 4$). Während der anschließenden Abkühlung bei konstantem Volumen ($4 \rightarrow 1$) wird die Wärmemenge $|Q_k|$ abgegeben (Auspufftakt und Ansaugen des neuen Gemischs).



- (a) Berechnen Sie die aufgenommene und die abgegebene Wärmemenge Q_W und Q_k und zeigen Sie, dass der Wirkungsgrad der Gleichung

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

folgt.

(2 Punkte)

- (b) Bei der adiabatischen Expansion oder Kompression eines idealen Gases ist $TV^{\kappa-1} = \text{const}$ mit dem Adiabatenindex κ . Zeigen Sie, dass damit

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}$$

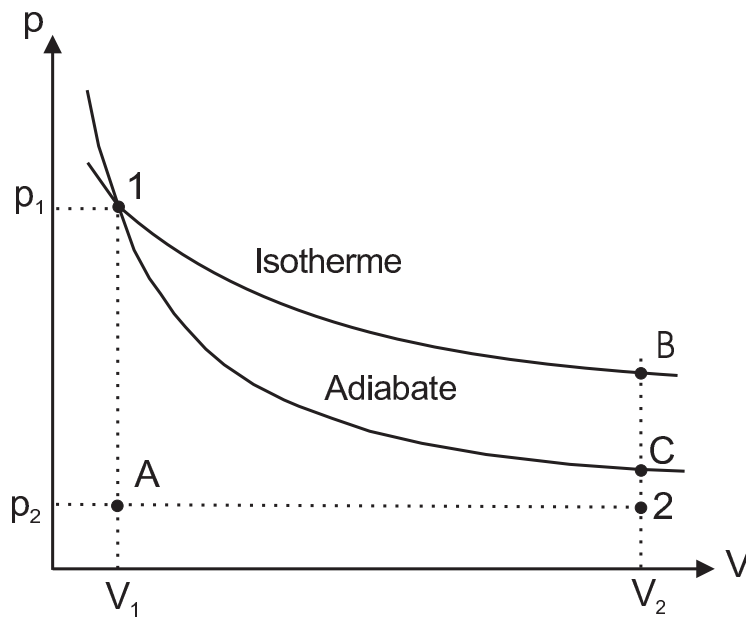
folgt. (2 Punkte)

- (c) Der Quotient V_1/V_2 heißt Verdichtungsverhältnis. Berechnen Sie mit $\kappa = 1.4$ den Wirkungsgrad dieses Kreisprozesses für ein bei Benzinmotoren typisches Verdichtungsverhältnis von 8. (1 Punkt)
- (d) Begründen Sie, wieso der Adiabatenindex durch 1.4 genähert werden kann. (1 Punkt)
- (e) Erklären Sie, warum der tatsächliche Wirkungsgrad eines Ottomotors viel geringer als der oben errechnete ist. (1 Punkt)

58. **Zustandsänderungen;(6 Punkte)**

Ein ideales Gas wird aus dem Anfangszustand (p_1, V_1, T_1) durch quasistatische Prozesse auf drei verschiedenen Wegen in den Endzustand (p_2, V_2, T_2) gebracht:

- (a) Zustandsänderung von 1 nach 2 über A (isochor und isobar). (2 Punkte)
- (b) von 1 nach 2 über Zustand B (isotherm und isochor). (2 Punkte)
- (c) von 1 nach 2 über Zustand C (adiabatisch und isochor). (2 Punkte)



Berechnen Sie für alle drei Wege (a), (b) und (c), um welchen Betrag sich die innere Energie ändert. Berechnen Sie analog für jeden Weg die Arbeit, die am System zu leisten ist und die Wärmemenge, die zugeführt werden muss. Nehmen Sie C_V als konstant an und drücken Sie Ihre Ergebnisse durch die Zustandsgrößen (p_i, V_i, T_i) , $i = 1, 2$ und C_V aus.

59. Eindimensionale Diffusionsgleichung; (5 Punkte)

- (a) Diffundierende Teilchen seien zu einem Zeitpunkt ($t = 0$) auf ein enges Gebiet um $x = x_0$ konzentriert. (Denken Sie an die Farbpartikel eines Tropfens Tinte, der in Wasser gespritzt wurde. Im folgenden soll beschrieben werden, wie der Tintentropfen auseinanderläuft und sein Durchmesser mit der Zeit zunimmt.)

Lösen Sie hierzu als Modell die Diffusionsgleichung in einer Dimension

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x, t) \quad \text{für } t > 0$$

mit der (vereinfachenden) Anfangsbedingung $n(x, t = 0) = N_0 \delta(x - x_0)$. N_0 ist die Anzahl der diffundierenden Teilchen, $\delta(x)$ die Dirac- δ -Verteilung.

Hinweis: Verwenden Sie die Fouriertransformation

$$\tilde{n}(k, t) = \int dx e^{ikx} n(x, t) \quad n(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-ikx} \tilde{n}(k, t)$$

Sie erhalten dann eine gewöhnliche Differentialgleichung, die leicht lösbar ist, und deren unbekannte Parameter aus der Anfangsbedingung folgen. Die auftretende Fourier-Rücktransformation haben Sie schon mal durchgeführt. (2 Punkte)

- (b) Zeichnen Sie die Lösung für verschiedene Zeitpunkte.

(1 Punkt)

- (c) Bestimmen Sie das mittlere Verschiebungsquadrat

$$\langle (x - x_0)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx n(x, t) (x - x_0)^2$$

und zeichnen Sie seine Zeitabhängigkeit. Es ist ein Maß für die Ausbreitung des Tropfens der diffundierenden Teilchen. Warum ist $\langle (x - x_0) \rangle = 0$? (2 Punkte)

60. Adiabatische Entmagnetisierung; (7 Punkte)

Viele Anwendungen der Thermodynamik beruhen auf mathematischen Umformungen von Funktionen mehrerer Variablen. Diese Aufgabe soll an einige der mathematischen Techniken erinnern.

- (a) i. Sei $z(x, y)$ eine Funktion von x und y , die an einem Punkt sowohl nach x als auch nach y auflösbar sei. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial y(x, z)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial x(y, z)}{\partial z} \right) = -1$$

Hinweis: $\left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right) = 1 / \left(\frac{\partial y(x, z)}{\partial z} \right)$

- ii. Die Legendre-Transformation wurde detailliert in Aufgabe 55 besprochen. Betrachten Sie zur Rekapitulation eine Funktion $f(x, y)$, für die gelte $df(x, y) = pdx + qdy$. Die 'konjugierten' Variablen p (zu x) und q (zu y) sind definiert durch $p = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)$ und $q = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)$. Zeigen Sie durch Definition einer neuen Funktion $g = f - qy$, dass $dg = pdx - ydq$. Wir können also g (die Legendre Trafo von f) als Funktion von x und q betrachten.
- iii. Da die Reihenfolge von Ableitungen vertauschbar ist, gelten gewisse Beziehungen. Wie zum Beispiel:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right).$$

Mit $f(x, y) = pdx + qdy$ zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}$$

gilt. Solche Beziehungen heißen in der Thermodynamik 'Maxwell Relationen'.

- (b) Wir verwenden jetzt die obigen mathematischen Ideen, um einfache Thermodynamische Probleme zu lösen. Die Gibbssche Fundamentalform, die eine Beziehung zwischen den Änderungen von E (Innere Energie), T (Temperatur), S (Entropie), P (Druck) und V (Volumen) gibt, lautet

$$dE = TdS - PdV.$$

Zeigen Sie, dass aus $F = E - TS$ folgt $dF = -S(T, V)dT - p(T, V)dV$. Für ein ideales Gas, mit Zustandsgleichung $PV = Nk_B T$, zeigen Sie, dass $\frac{\partial E(T, V)}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} (F(T, V) + S(T, V)T) = 0$ gilt. Überrascht Sie dies?

- (c) Wir betrachten jetzt ein einfaches magnetisches Material. Die Magnetisierungsarbeit pro Volumen eines Körpers mit dem magnetischen Moment pro Volumen M beträgt HdM . Geben Sie eine anschauliche Erklärung hierfür. Seine Entropie S ist mit der zu- oder abgeführten Wärme verknüpft über TdS . Führen Sie eine Legendretransformation der Gibbs'schen Fundamentalform der Energie $dE = TdS + HdM$ auf die Funktion $F = F(T, M)$ der unabhängigen Variablen T und M durch.

- i. Als Zustandsgleichung einer idealen paramagnetischen Substanz findet man in guter Näherung das Curie-Gesetz: $M = AH/T$ (A Curie-Konstante). Zeigen Sie, dass $\partial E(T, M)/\partial M = 0$ folgt. Wie interpretieren Sie das Ergebnis?

Hinweis: Verfolgen Sie den selben Weg wie in (b). Betrachten Sie wie $H(T, M)$ aus $F(T, M)$ durch Differentiation folgt und verwenden Sie dann die Zustandsgleichung

(2 Punkte)

- ii. Zeigen Sie, dass aus i folgt, $S(T, M) = S(M = 0, T) - \frac{M^2}{2A}$. Begründen Sie somit, dass wärmeisolierte, (d.h. adiabatische, isentrope, $dS = 0$) Zustandsänderungen durch Kurven konstanter Magnetisierung gegeben sind, wenn man die Temperaturabhängigkeit der Entropie des unmagnetisierten Körpers vernachlässigen darf, $S(M = 0, T) = S_0$.

(2 Punkte)

- iii. Zeichnen Sie einen Carnot-Prozess im H - M - und im T - S -Diagramm.

Hinweis: Ein Carnotprozess besteht aus einer Abfolge von 4 Teilschritten, von denen je zwei adiabatisch und zwei isotherm verlaufen.

(1 Punkt)

- iv. Zeigen Sie, dass sich der paramagnetische Körper durch einen isothermen und einen anschließenden isentropen Prozess abkühlen lässt (adiabatische Entmagnetisierung).

(1 Punkt)

- v. Wie lassen sich die Prozesse in (d) experimentell realisieren?

(1 Punkt)