UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Alfred Leitenstorfer (Experimentalphysik)
Raum P 809, Tel. (07531)88-3818
E-mail: Alfred.Leitenstorfer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 06/07

Übungsblatt 13, Ausgabe 30.01.2007, abzugeben am 06.02.2007
Besprechung in den Übungen vom 07.02.-09.02.2007

53. **Barometer; (4 Punkte)**
In einer am Ende zugeschmolzenen Glaskapillare von überall gleichem Querschnitt A ist durch einen Quecksilberfaden der Länge $l_0 = 15$ cm ein Luftvolumen abgeschlossen. Wenn das abgeschmolzene Ende des vertikal gehaltenen Röhrchens nach oben zeigt, hat die eingeschlossene Luftsäule die Länge $l_1 = 37,5$ cm, wenn das abgeschmolzene Ende nach unten weist, dann ist die Luftsäule $l_2 = 25$ cm lang.

    (a) Wie groß ist der atmosphärische Druck? (2 Punkte)

    (b) Wie lange wird die Luftsäule sein, wenn das Röhrchen unter einem Winkel $\varphi = 60°$ gegen die Vertikale geneigt ist? (2 Punkte)

54. **Heißluftballon; (7 Punkte)**
Ein nach unten offener Heißluftballon hat eine Masse von $m = 200$ kg (ohne eingeschlossene Luft) und ein Volumen $V = 2200$ m^3. Der Luftdruck im Inneren und außerhalb des Ballons entspreche dem Normaldruck (1 bar) bei einer Außentemperatur von $T = 17$ °C.

    (a) Wieviel Mol Luft befinden sich bei dieser Temperatur im Ballon, wenn die Luft als ideales Gas angenommen wird? (1 Punkt)

    (b) Zum Aufsteigen wird die Luft im Inneren des Ballons mit einem Brenner erhitzt. Welcher Temperaturunterschied zwischen dem Inneren des Ballons und der Umgebung muss erreicht werden, damit der Ballon steigt? Verwenden Sie hierzu die molare Masse von Luft von 28.8 g/mol und vernachlässigen Sie das Volumen der Ballonhaut. (2 Punkte)

    (c) Schätzen Sie mit Hilfe der barometrischen Höhenformel ab, wie hoch der Ballon maximal steigt, falls die eingeschlossene Luft auf eine Temperatur von 42.4 °C erhitzt wird. Nehmen Sie hierzu an, dass die Umgebungsluft eine von der Höhe unabhängige Temperatur von 17 °C besitzt. Begründen Sie qualitativ, in welche Richtung die tatsächlich erreichbare Höhe von der hier durchgeführten Abschätzung abweicht. (Ergebnis: $h_{max} = 500$ m) (2 Punkte)

    (d) Infolge der Druckabnahme mit steigender Höhe über dem Erdboden strömt Luft aus der inelastischen Ballonhülle. Berechnen Sie, wieviel Mol erwärmter Luft am Punkt der maximalen Steighöhe aus dem Ballon entwichen sind verglichen mit dem bereits erhitzten Ballon am Boden. (2 Punkte)

55. **Legendre-Transformation; (6 Punkte)**
Die Legendre-Transformation wird in der Physik an verschiedenen Stellen verwendet: der Übergang von Lagrangescher zu Hamiltonscher Mechanik geschieht durch Legendre-Transformation bezüglich der Geschwindigkeitskoordinaten. Weiterhin wechselt man in der Thermodynamik von einer Fundamentalform zu einer anderen mittels einer Legendre-Transformation. In dieser Aufgabe sollen ein paar wesentliche Eigenschaften der Legendre-Transformation zusammengestellt werden.
Sei f eine strikt konvexe glatte Funktion, $f''(x) > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x;p) = xp - f(x)$ für gegebenes p ein eindeutiges Maximum $x(p)$ hat.
Die Legendre-Transformation g ist nun der Wert von F an der Stelle des Maximums, also $g(p) = p \cdot x(p) - f(x(p))$. (1 Punkt)

(b) Sei g die Legendre-Transformation von f. Zeigen Sie, dass dann $g(p/\alpha)$ die Legendre-Transformation von $f(\alpha x)$ ist, für $\alpha \neq 0$. (1 Punkt)

(c) Zeigen Sie die Youngsche Ungleichung $f(x) + g(p) \geq xp$. (1 Punkt)

(d) Zeigen Sie, dass auch $g(p)$ strikt konvex ist.
Hinweis: Satz von der Umkehrfunktion auf f' anwenden. (1 Punkt)

(e) Zeigen Sie die Involutivität der Legendre-Transformation, also dass die Legendre-Transformation von $g(p)$ wieder $f(x)$ ergibt. (1 Punkt)

(f) Berechnen Sie die Legendre-Transformation der folgenden Funktionen

$$
\begin{aligned}
1.\ f(x) &= \frac{1}{2}x^2 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}, \\
2.\ f(x) &= \frac{1}{\alpha}x^\alpha \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und } \alpha > 1, \text{ damit } f \text{ konvex ist.}
\end{aligned}
$$

Welche (bekannten?) Ungleichungen ergeben sich in diesen Beispielen aus der Youngschen Ungleichung? (1 Punkt)

56. **Virialsatz; (6 Punkte + 2 Zuzatzpunkte)**
Betrachten Sie ein System von N Massenpunken mit Potential $U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ und der Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) \tag{1}$$

Über die Bewegung der Massenpunkte soll bekannt sein, daß sie auf ein endliches Raumgebiet (und auch Phasenraumgebiet) beschränkt ist.

(a) Zeigen Sie, daß folgende Beziehung für den zeitlichen Mittelwert der kinetischen Energie T gilt:

$$2\overline{T} = \sum_{i=1}^{N} \overline{\mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}} \tag{2}$$

Die rechte Seite der Gleichung (2) wird als das *Virial* des Systems bezeichnet. Der Mittelwert für eine Funktion der Zeit $f(t)$ sei dabei folgendermassen definiert:

$$\overline{f} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt\, f(t) \tag{3}$$

(2 Punkte)

Hinweis: Betrachten Sie die Zeitableitung von $G(t) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i$ und verwenden Sie, dass $\overline{\frac{d}{dt}G(t)} = 0$ gilt, wenn die Funktion $G(t)$ beschränkt ist. (Warum können Sie das annehmen?)

(b) Nun sei angenommen, daß U eine *homogene* Funktion n-ten Grades ist. Das heisst, daß für jede Konstante λ gilt:

$$U(\lambda \mathbf{r}_1, \lambda \mathbf{r}_2, \ldots, \lambda \mathbf{r}_N) = \lambda^n U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N). \tag{4}$$

Beweisen Sie erstmal das sogenannte Eulertheorem für homogene Funktionen:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = nU. \tag{5}$$

Hinweis: Leiten Sie Beziehung (4) nach λ ab.
Damit nimmt Gleichung (2) die folgende Form an:

$$2\overline{T} = n\overline{U} \tag{6}$$

Diese Beziehung wird als *Virialsatz* bezeichnet und hat Anwendungen in der Mechanik selbst sowie in der statistischen Mechanik. Einige von ihnen sollen im Folgenden betrachtet werden. (2 Punkte)

(c) Mit Hilfe der Beziehung (2) kann man die Bedeutung der Grösse "Druck" diskutieren. Dazu betrachte man ein System mit dem Potential $U = U_{in} + U_w$, wobei U_{in} bzw. U_w die Wechselwirkung der Teilchen untereinander bzw. die Wechselwirkung der Teilchen mit der Wand beschreiben soll. Der Beitrag des U_w kann mit dem Druck P auf die Wand in Verbindung gebracht werden. Das Ergebnis lautet:

$$PV = \frac{2}{3}\overline{T} - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N} \overline{\mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial U_{in}}{\partial \mathbf{r}_i}}, \tag{7}$$

wobei V das vom System eingenommene Volumen ist. Dies ist eine allgemeine *Zustandsgleichung*. (2 Punkte)
Hinweis: Nehmen Sie sinnvollerweise an, dass sich U_w nur in unmittelbarer Nähe der Wand bemerkbar macht und nutzten Sie den Gauss-Satz aus, in dem Sie die Summe in (7) als Oberflächenintegral interpretieren. Sie können verwenden, dass der Druck an jedem Punkt der Wand gleich ist, und sich als Kraft pro Fläche ergibt.

(d) Der Virialsatz wird in der Astrophysik verwendet z.B. um Massenverteilungen entfernter Galaxien zu bestimmen. Betrachten Sie als einfaches Beispiel das Kepler-Problem. Wenn man für die geschlossenen Bahnen die Bahngleichung in Polarkoordinaten

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\phi} \tag{8}$$

als bekannt voraussetzt, kann man mit Hilfe des Virialsatzes, des Drehimpulssatzes und des Energiesatzes eine Beziehung zwischen der Periode der Bewegung und der Länge der großen Halbachse herleiten (das dritte Keplersche Gesetz). (2 Zusatzpunkte)
Hinweis: Sie dürfen alle bekannten Eigenschaften der Ellipse benutzen. Das Integral $\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1+e\cos\phi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}$ könnte nützlich sein.