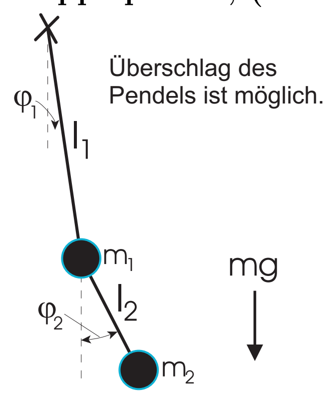
UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Alfred Leitenstorfer (Experimentalphysik)
Raum P 809, Tel. (07531)88-3818
E-mail: Alfred.Leitenstorfer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 06/07

Übungsblatt 12, Ausgabe 23.01.2007, abzugeben am 30.01.2007
Besprechung in den Übungen vom 31.01.-02.02.2007

49. **Doppelpendel; (8 Punkte + 4 Zusatzpunkte)**



Gegeben sei ein Doppelpendel (siehe Zeichnung) bestehend aus zwei masselosen Stangen der Länge l_1 und l_2 an deren Enden die Massen m_1 und m_2 angebracht sind. Das erste Pendel sei an einem fixen Punkt befestigt, während das zweite Pendel an der Spitze des ersten hängt. Bitte verwenden Sie die in der Zeichnung benutzten Bezeichnungen.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen ab.

(2 Punkte)

(b) Stellen Sie die Hamiltonfunktion auf und geben Sie die generalisierten Impulse an.

(2 Punkte)

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Schwingungen um die stabile Ruhelage. Für diese und alle weiteren Berechnungen gehen Sie von folgendem Spezialfall aus $m_1 = m_2$ und $l_1 = l_2$. Geben Sie außerdem alle Fixpunkte an, an denen die Pendel ruhen können.

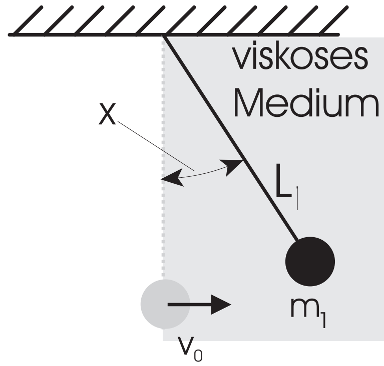
(2 Punkte)

(d) Schalten Sie die Gravitation aus (setzen Sie $g = 0$. Dies lässt sich z.B. dadurch erreichen, dass Sie das ganze Pendel in die Horizontale kippen). Zeigen Sie mit Hilfe des Noether-Theorems, dass in diesem Fall der Gesamtdrehimpuls eine Erhaltungsgröße ist und geben Sie diesen an. (2 Punkte)

(e) Gehen Sie in ein Bezugssystem, welches mit ω rotiert. Finden Sie die Fixpunkte im rotierenden Bezugssystem. (2 Zusatzpunkte)

(f) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen der kleinen Schwingungen um den stabilen Fixpunkt im mit Frequenz ω rotierenden Bezugssystem.
Hinweis: Bestimmen Sie die Rotationsfrequenz ω aus dem Gesamtdrehimpuls und dem Trägheitsmoment für diesen Fall. (2 Zusatzpunkte)

50. **Überdämpfter harmonischer Oszillator; (3 Punkte + 3 Zusatzpunkte)**
Gegeben sei ein Pendel. Schlägt dieses Pendel zur einen Seite aus, so soll es von einem viskosen Medium umgeben sein, welches für die Dämpfung sorgt. Das Pendel soll aus der Ruhelage $x(t=0)=0$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 starten. Zur Vereinfachung werde das Pendel als harmonischer Oszillator genähert: $\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0$. Der Fall sehr großer Reibungskonstanten γ werde betrachtet.



(a) Anschauliche Beschreibung der Bewegung. Wie kehrt das Pendel in seine Ruhelage zurück? Versuchen Sie die Physik in Worte zu fassen. Versuchen Sie eine naive Lösung. Tip: Lösung für gedämpfte Schwingung passt nicht mit den Anfangsbedingungen zusammen. Woher rührt dieses Problem. (3 Punkte)

(b) Um die Gleichung zu lösen setzen Sie eine Entwicklung für kurze Zeiten und eine für lange Zeiten an. Die hierbei relevanten Zeitskalen sind: $\tau_-=\gamma t$ und $\tau_+=\frac{\omega_0^2 t}{\gamma}$. Nutzen Sie diese Zeitskalen in Verbindung mit einer Reihenentwicklung. Überlegen Sie sich, dass der kleine Parameter des Problems $\epsilon=(\omega_0/\gamma)^2$ lautet. Bestimmen Sie die Lösung bis einschliesslich linearer Ordnung in ϵ.

$$x(t)=\bar{x}_0(\tau_-)+\epsilon\bar{x}_1(\tau_-)+\epsilon^2\bar{x}_2(\tau_-)+\cdots$$

(Kurzzeitentwicklung) um die Differentialgleichung für kurze Zeiten zu entwickeln. Betrachten Sie das Verhalten dieser Lösung für $\tau_-\to\infty$. (1 Zusatzpunkt)

(c) Setzen Sie für lange Zeiten

$$x(t)=\bar{x}_0(\tau_+)+\epsilon\bar{x}_1(\tau_+)+\epsilon^2\bar{x}_2(\tau_+)+\cdots.$$

Bestimmen Sie die Lösung bis einschliesslich linearer Ordnung in ϵ, und entwickeln Sie die Lösung für kleine τ_+. (1 Zusatzpunkt)

(d) Vergleichen und skizzieren Sie die beiden Lösungen wenn Sie nur x_0 und wenn Sie höhere Terme mitnehmen. (1 Zusatzpunkt)

51. **Hamiltonsche Mechanik; (15 Punkte)**

(a) i. Die Hamiltonfunktion für ein freies Teilchen im Schwerefeld der Erde laute vereinfacht:

$$H=\frac{p^2}{2m}+mgq.$$

Belegen Sie mit einer Symmetrieüberlegung, dass die Energie erhalten ist. Nutzen sie diese Tatsache, um eine Gleichung für den Impuls als Funktion der Ortsvariablen aufzustellen. (1 Punkt)

ii. Nehmen Sie nun zwei Anfangsimpulse $0<p^-<p^+$ als gegeben an und skizzieren Sie im Phasenraum die Trajektorien für beide. Alle möglichen Teilchentrajektorien, die sich zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 zwischen beiden Impulsen in einem Interval Δz befinden stellen ein Phasenraumvolumen dar. Das *Liouville-Theorem* sagt aus, dass dieses Volumen eine konstante Größe ist. Skizzieren Sie das Volumen zu verschiedenen Zeitpunkten. (1 Punkt)

(b) i. Zeigen Sie die Leibnizsche Produktregel für die Poisson-Klammer

$$\{F, GK\} = \{F, G\}\, K + G\, \{F, K\}\,.$$

(1 Punkt)

ii. Zeigen Sie, dass eine Funktion $A(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ die mit der Zeit variiert, weil $\mathbf{q}(t)$ und $\mathbf{p}(t)$ Lösungen zur autonomen Hamiltonschen Funktion $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sind, der Gleichung genügt

$$\frac{d}{dt} A(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \{A, H\}$$

(1 Punkt)

iii. Wenden Sie diese Formel auf $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ und H selber an. Wann ist eine Funktion A zeitlich konstant entlang des Flusses im Phasenraum gegeben durch $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$? (1 Punkt)

iv. Eine Verallgemeinerung der Noetherschen Theoreme erhält man durch infinitesimale ($\alpha \to 0$) Verschiebungen des Systems generiert durch eine Funktion $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, genannt "Erzeugende",

$$\left.\begin{array}{l} Q_i = q_i + \alpha \frac{\partial G}{\partial p_i} \\ P_i = p_i - \alpha \frac{\partial G}{\partial q_i} \end{array}\right\} \text{für } \alpha \to 0\,,\ i = 1, \ldots, f$$

Welche Bedingung muss eine Funktion $A(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ erfüllen, damit sie in linearer Ordnung in α invariant bleibt unter dieser Verschiebung?
Folgern Sie, dass die Konstanten der Bewegung die Erzeugenden infinitesimaler Verschiebungen sind, die die Hamiltonsche Funktion invariant lassen. (1 Punkt)

v. Beweisen Sie, dass der n-dimensionale entartete harmonische Oszillator, gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \frac{m\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i^2$$

die Erhaltungsgrößen

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_i p_j}{m} + m\omega^2 q_i q_j\right)$$

besitzt. (1 Punkt)

(c) i. Für ein Zentralpotential (vergleiche z.B. Keplerproblem) mit der Lagrangedichte

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

finden Sie die Hamiltonfunktion und drücken Sie diese in Polarkoordinaten der Ebene aus. Zeigen Sie, dass der Runge-Lenz Vektor

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\gamma \frac{\mathbf{r}}{r}$$

in Polarkoordinaten folgende Form annimt:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{p_\phi^2}{r} - \gamma m\right)\hat{\mathbf{e}}_r - p_r p_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi.$$

(2 Punkte)

ii. Nutzen Sie die Poissonklammer, um sich zu verdeutlichen, dass

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{p_\phi}{mr^2}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_r = -\hat{\mathbf{e}}_r \frac{p_\phi}{mr^2}$$

. (1 Punkt)

iii. Machen Sie sich mit diesen Ergebnissen klar, dass $\{\mathbf{A}, H\} = 0$ gilt. (2 Punkte)
Hinweis: Die Produktregel aus Aufgabenteil b) kann hier nützlich sein.

(d) i. Studieren Sie folgendes einfache Hamiltonsche System:

$$H(Q, P) = \omega P$$

Welche auffällige Erhaltungsgröße existiert, wie lauten die Bahnen? (1 Punkt)

ii. Es sei folgende kanonische Transformation gegeben:

$$p = \sqrt{2m\omega P}\cos Q \quad \text{und} \quad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Poissonklammer, dass q und p *kanonische* Variablen sind. Wie lautet $H(p, q)$? Geben sie die Lösung für $q(t)$ an. Was für ein physikalisches System beschreiben die Gleichungen in diesen Koordinaten? (2 Punkte)

52. **Adiabatische Invariante; (6 Sonderpunkte)**
Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator, dessen Eigenfrequenz ω sich langsam ändert. Das heisst, diese Änderung geschieht auf einer Zeitskala, die wesentlich grösser ist als diejenige der Schwingung. Solch eine Störung nennt man *adiabatisch*. Als Beispiel diene ein Pendel, dessen Faden langsam verkürzt/verlängert wird. Somit lautet die Bewegungsgleichung mit $\epsilon \ll 2\pi/\omega$:

$$\ddot{x} + \omega(\epsilon t)x = 0,$$

(a) Führen Sie zur Vereinfachung die neue Variable $\tau = \epsilon t$ ein und untersuchen Sie den Ansatz

$$x(t) = A(\tau)\exp\left[\frac{i}{\epsilon}\int_0^\tau ds y(s)\right],$$

indem Sie für einen Augenblick $y(s) = y_0$ (eine Konstante) setzen. Was für eine Lösung erhalten Sie? Welcher Zeitskala muss sich $y(s)$ zuordnen lassen, damit der Ansatz plausibel ist? (1 Punkt)

(b) Überzeugen Sie sich davon, dass

$$\dot{x}(t) = \frac{A'}{A}x + \frac{i}{\epsilon}xy.$$

Im Weiteren formen Sie die Bewegungsgleichung in folgende Gleichung um: (1 Punkt)

$$\epsilon^2 A'' + i\epsilon 2A'y - Ay^2 + i\epsilon Ay' + A\omega^2 = 0$$

(c) Entwickeln Sie diese Gleichung mit der Expansion (2 Punkte)

$$y = y_0 + \epsilon y_1 + \ldots \quad \text{und} \quad A = A_0 + \epsilon A_1 + \ldots$$

bis zur ersten Ordnung in ϵ, so dass Sie $y_0(\tau)$ und $A_0(\tau)$ bestimmen können. Beweisen Sie, dass $A_0^2\omega$ in dieser Näherung konstant ist.
Hinweis: Betrachten Sie den realen und imaginären Anteil getrennt.

(d) Die Wirkungsvariable ist folgendermassen definiert:

$$J = \oint dxp = \int_0^{T=\frac{2\pi}{\omega}} dt\dot{x}p.$$

Nutzen Sie den reelen Teil der gefundenen Lösung,

$$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{\omega}}\cos\left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^\tau ds\omega(s)\right),$$

und vernachlässigen Sie alle Terme der Ordnung ϵ: Begründen Sie, warum auf der Zeitskala $0 \leq t \leq T$ die Kreisfrequenz als Konstante betrachtet werden kann und lösen Sie das Integral der Wirkungsvariablen J. (2 Punkte)

Bemerkung: Diese Methode entspricht formal der WKB-Näherung in der Quantenmechanik. Dort ist die eindimensionale Schrödingergleichung von der Form $\psi'' + [V(x) - E]\psi = 0$ und man betrachtet $V(x) - E$ als schwach vom Ort x abhängig, genau wie hier ω^2 schwach von t abhängt.