UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Alfred Leitenstorfer (Experimentalphysik)
Raum P 809, Tel. (07531)88-3818
E-mail: Alfred.Leitenstorfer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

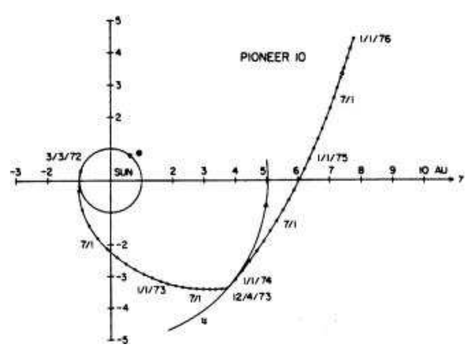
Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 06/07

Übungsblatt 11, Ausgabe 16.01.2007, abzugeben am 23.01.2007
Besprechung in den Übungen vom 24.-26.01.2007

45. **Swing-by Verfahren (6 Punkte)**
Am 4. Dezember 1973 passierte die Raumsonde Pioneer 10 Jupiter, um das Sonnensystem in Richtung des Sterns Aldebaran (im Sternbild Stier) zu verlassen. Um die nötige Fluchtgeschwindigkeit zu erreichen, wurde das sogenannte Swing-by oder Gravitational Assist Verfahren angewendet. Dabei kann die Sonde beim Vorbeiflug an einem Planeten Schwung gewinnen und ihre kinetische Energie vergrößern.

(a) Bestimmen Sie die Lagrangedichte $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ des Systems mit $\mathbf{r}$ als Positionsvektor von Pioneer 10 im Heliozentrischen System. Beachten Sie hierbei nur die Gravitationsanziehung vom Jupiter, dessen Position $\mathbf{R}(t)$ laute. Für die Zeit des Vorbeiflugs der Sonde soll die Geschwindigkeit des Jupiters $\mathbf{v}$ als konstant angenommen werden. (2 Punkte)

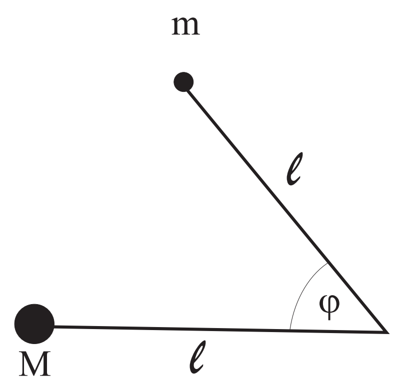
(b) Ermitteln Sie die Gesamtenergie der Raumsonde. Ist sie erhalten? Führen Sie die neue Variable $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{R}(t)$ ein und bestimmen Sie ein erstes Integral der Bewegung. Wie lautet der Zusammenhang zur Gesamtenergie? (2 Punkte)



(c) Betrachten Sie zwei beliebige Positionen auf der Bahn der Sonde, die jedoch gleich weit vom Jupiter entfernt sind.(Warum?) Schätzen Sie den Wert für die Winkeländerung der Bahn von Pioneer 10 aus der Graphik ab. Dabei sei die Geschwindigkeit der Sonde vor dem Swing-by Manöver $|\dot{\mathbf{r}}| = 9.8$ km/s und die des Jupiters $|\mathbf{v}| = 13.5$ km/s. Um das Sonnensystem in der Nähe des Jupiters zu verlassen, ist eine Fluchtgeschwindigkeit von mindestens 18.7 km/s nötig. Wird diese erreicht und wie könnte man die Geschwindigkeit weiter erhöhen? Um welchen Faktor vervielfacht sich die kinetische Energie der Sonde?

(2 Punkte)

46. **Die stark abstrahierte Katze; (8 Punkte)**
Wir abstrahieren die Katze als zwei Massen (M für den Körper und m für den Schwanz). Die beiden Teile können sich in der Ebene frei bewegen und sind an einem Punkt miteinander verbunden (in der Abstraktion mittels zweier masseloser Stangen der Länge ℓ, sprich Schwanz und Körper seien gleich lang), wobei zwischen den Stangen der Winkel φ frei einstellbar ist.



(a) Formulieren Sie die Lagrangedichte L, die gleich der kinetischen Energie sei $L = T$ (d.h. kein Potential wirke) und die homogenen Zwangsbedingungen für dieses isotrope und translationsinvariante System. (2 Punkte)

(b) Begründen Sie mit dem Theorem von Noether, dass der Gesamtimpuls $\mathbf{P}$ und der Gesamtdrehimpuls L_z Erhaltungsgrößen der Bewegung sind. Zur Vereinfachung werde angenommen, dass beide zum Zeitpunkt t_0 verschwinden. Folgern Sie, dass dann auch der Schwerpunktsvektor $\mathbf{R}(t)$ eine Erhaltungsgröße ist. (2 Punkte)
Hinweis: Es ist ausreichend zu diskutieren, dass die erforderlichen Symmetrietransformationen die Lagrangedichte L und die Zwangsbedingungen invariant lassen.

(c) Bestimmen Sie den Gesamtdrehimpuls L_z explizit und daraus die Drehung des Körpers in der Zeit $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}$ wenn der Winkel $\varphi(t)$ variiert wie $\varphi(t) = \omega t$. (2 Punkte)

(d) Eine durchschnittliche Katze hat eine Masse M von etwa 2.5 kg mit einem Schwanz von etwa 0.25 kg. Schwanz und Körper sind beide etwa 0.5 m lang. Ausserdem kann eine Katze ihren Schwanz mit einer Winkelgeschwindigkeit von grob $2\pi s^{-1}$ bewegen. Aus welcher Höhe kann man also eine Katze an den Füßen fallen lassen, dass sie sich noch durch geschicktes Wedeln mit dem Schwanz auf die Füße drehen kann? Eine reale Katze kann sich noch aus einer Höhe von 10 cm drehen. Kann Sie das auch über eine Rotation des Schwanzes erreichen? Welche andere Möglichkeiten hat sie? (2 Punkte)

47. **Teilchenbahnen in gekreuzten elektromagnetischen Feldern; (9 1/2 Punkte)**
Gesucht wird die Bahnkurve eines Teilchens mit Ladung q und Masse m in homogenen statischen elektrischen $\mathbf{E}$ und magnetischen $\mathbf{B}$ Feldern, welche senkrecht aufeinander stehen, $\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{y}}$ und $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$.
Die Lagrangefunktion für das Teilchen lautet

$$L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 - q\,\phi(\mathbf{r}) + q\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})$$

mit den elektromagnetischen Potentialen, aus denen die statischen Felder folgen durch

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}\,.$$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für das Teilchen lautet

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Wahl $\phi = -E\,y$ und $\mathbf{A} = -B\,y\,\hat{\mathbf{x}}$ zu den gewünschten elektromagnetischen Feldern führt.
Wie lautet dann die Lagrangefunktion? (1 Punkt)
Hinweis: Alle folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden. Die angegebene Reihenfolge wird empfohlen.

(b) Zeigen Sie mit dem Euler-Lagrange Formalismus, dass die Lagrangefunktion von Teilaufgabe a) auf dieselben Bewegungsgleichungen führt wie die Newtonschen für diesen Spezialfall. (1 1/2 Punkte)

(c) Welche zyklischen Variablen liegen vor und welche zeitlich erhaltenen Größen folgen daraus? (2 1/2 Punkte)

(d) Bestimmen Sie mit dem Noetherschen Theorem (NT) ein *weiteres* Integral der Bewegung (d.h. eine weitere Erhaltungsgröße).
Hinweis: Das NT liefert für jede Symmetrie der Lagrangefunktion, d.h.

$$\tilde{L}(\mathbf{r}', \mathbf{v}', \alpha) = L(\mathbf{r}', \mathbf{v}') + \frac{d}{dt} F(\mathbf{r}', t, \alpha),$$

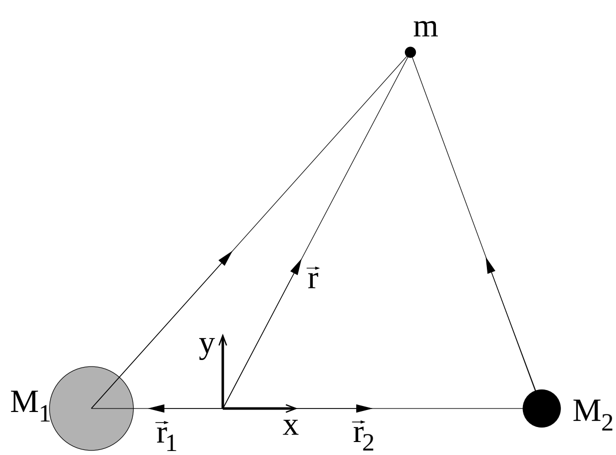
eine Erhaltungsgröße

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) \Bigg|_{\alpha=0}.$$

(1 1/2 Punkte)

e) Berechnen Sie die Bahnkurven $\mathbf{r}(t)$ für ein Teilchen, das zum Zeitnullpunkt am Ursprung ist und in $\hat{\mathbf{x}}$-Richtung fliegt, d.h. $\mathbf{r}(0) = 0$ und $\mathbf{v}(0) = \mathrm{v}_0\hat{\mathbf{x}}$.
Hinweis: Die komplexe Hilfsvariable $\zeta(t) = x(t) + i\,y(t)$ kann zur Lösung der Differentialgleichung nützlich sein. (3 Punkte)

48. **Lagrangesche Punkte; (8 Punkte)**
Das klassische Dreikörperproblem ist im allgemeinen nicht lösbar, da es chaotische Dynamik aufweist. Aber schon Lagrange fand spezielle Lösungen im sogenannten „eingeschränkten zirkulären Dreikörperproblem“, die heute für die Positionierung von Satelliten eine Rolle spielen. Es sind dies die fünf Lagrangeschen Punkte (oder Librationspunkte), welche Gleichgewichtspunkte für leichte Objekte in der Nähe von zwei rotierenden Massen (z.B. Sonne und Erde) darstellen. Die Lagrangeschen Punkte $L_1, \ldots, L_5$ rotieren mit den Körpern mit und halten feste Abstände zu beiden ein. Im Punkt L_1 ist seit 1995 das Sonnenobservatorium SOHO stationiert.



a) Formulieren Sie die allgemeinste Lagrange Funktion für drei verschiedene Massenpunkte M_1, M_2 und m, die ein abgeschlossenes (Newtonsches) System bilden (d.H. Energie, Impuls und Drehimpuls seien erhalten) und nur Paarwechselwirkungen aufweisen. (1 Punkt)

b) Es sollen nur Gravitationskräfte wirken. Mit der Annahme, dass die Masse m so klein sei, dass sie die Bewegung der anderen beiden Massen M_1 und M_2 nicht beeinflusse, erhält man das 'eingeschränkte Dreikörperproblem'.
Lösen Sie das Keplerproblem für die beiden größeren Massen M_1 und M_2 unter der Annahme, dass die Keplerellipse zu einem Kreis entarte ('zirkuläres Problem').
Hinweis: Führen Sie eine Schwerpunkts- und eine Relativkoordinate ein. Stellen Sie die Lagrange Funktion für die Relativkoordinate im Schwerpunktsystem auf und transformieren Sie diese in Polarkoordinaten (Aufgabe 40, Blatt 9). Wie lautet die Bewegung der Relativkoordinate für eine Kreisbahn? Bestimmen Sie anhand des mittleren Radius $R = 1\text{AU} = 1.5\,10^8$ km und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/\text{Jahr}$ für das System Sonne-Erde die Summe der Massen $M_1 + M_2$. (2 Punkte)

c) Die Bewegung der leichten Masse m ($m \ll M_2, M_1$) werde im rotierenden Bezugssystem beschrieben, wobei die x-Achse vom Schwerpunkt zur Erde zeige und die y-Achse senkrecht dazu stehe (s. Skizze). (Da die Bewegung von M_1 und M_2 von m unabhängig ist, genügt es, in der Lagrangefunktion L nur die Terme zu betrachten, in denen m explizit auftaucht.)
Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten von m im rotierenden Bezugssystem lauten

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} - \frac{1}{m}\frac{\partial\bar{U}}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x} - \frac{1}{m}\frac{\partial\bar{U}}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\ddot{z} = -\frac{1}{m}\frac{\partial\bar{U}}{\partial z}, \tag{3}$$

wobei das effektive Potential gegeben ist durch

$$\bar{U} = -m\left[\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{\gamma M_1}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}_1 \mid} + \frac{\gamma M_2}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}_2 \mid}\right]. \tag{4}$$

(γ ist die Gravitationskonstante). (2 Punkte)

d) Welche Erhaltungsgröße ist offensichtlich? (Sie heißt Jacobi Integral.) (1 Punkt)

e) Identifizieren Sie die Scheinkräfte in den Bewegungsgleichungen, die aufgrund der Rotation des Bezugssystems auftreten. (1 Punkt)

f) Welche drei Gleichungen legen die Lagrangeschen Punkte der konstanten Positionen von m relativ zur Erde und Sonne fest? (1 Punkt)