UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Alfred Leitenstorfer (Experimentalphysik)
Raum P 809, Tel. (07531)88-3818
E-mail: Alfred.Leitenstorfer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 06/07

Übungsblatt 10, Ausgabe 09.01.2007, abzugeben am 16.01.2007
Besprechung in den Übungen vom 17.-19.01.2007

41. **Relativistische Hamiltonfunktion in elektromagnetischen Feldern; (5 Punkte + 2 Zusatzpunkte)**

(a) Die relativistische Lagrangefunktion mit einem Potential $U(r)$ und ohne elektromagnetische Felder lautet:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} - U(r).$$

Ermitteln Sie die relativistische Hamiltonfunktion H gemäss der Definition von H aus der Vorlesung, und leiten Sie daraus die Einsteinsche Energie-Impuls-Beziehung für ein freies Teilchen $H = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ ab. (1 Punkt)

(b) Die nicht-relativistische Lagrangefunktion in allgemeinen zeitabhängigen Feldern lautet für ein Teilchen mit der Ladung q:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\Phi(\mathbf{r},t) + q\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t).$$

Zeigen Sie, dass sich bei diesem Problem der verallgemeinerte Impuls $\mathbf{p}$ vom kinetischen ("normalen") Impuls unterscheidet. Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion für ein Teilchen der Ladung q im elektromagnetischen Feld. Schreiben Sie das Resultat einmal als Funktion von $\{\mathbf{p},\Phi,\mathbf{A}\}$ und ein zweites mal als Funktion von $\{\mathbf{v},\Phi\}$. Erklären Sie anschaulich, warum die Gesamtenergie nur vom elektrischen Feld, nicht aber vom Magnetfeld abhängt. (2 Punkte)

(c) Nun kombinieren wir die beiden vorigen Lagrangefunktion, um jene für ein relativistisches Teilchen der Ladung q im elektromagnetischen Feld zu erhalten:

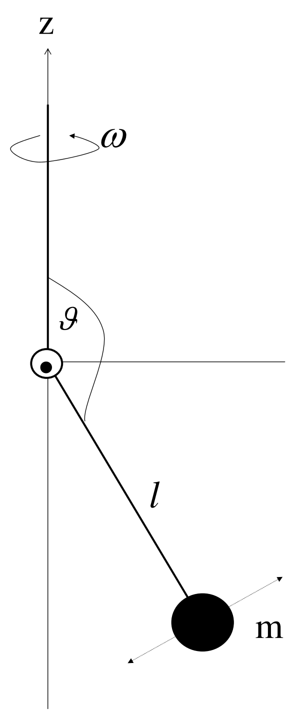
$$L = -mc^2\sqrt{1-\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} - q\Phi(\mathbf{r},t) + q\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t).$$

Berechnen Sie die entsprechende Hamiltonfunktion. Schreiben Sie das Resultat einmal als Funktion von $\{\gamma,\Phi\}$ und ein zweites mal als Funktion von $\{\mathbf{p},\Phi,\mathbf{A}\}$. (2 Punkte)
Hinweis: Im zweiten Fall lautet das Resultat $H = c\sqrt{m^2c^2 + (\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2} + q\Phi$.

(d) Betrachten Sie nun ein relativistisches Teilchen der Ladung q in einem konstanten Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, wobei $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Überlegen Sie sich zunächst, dass die Energie des Teilchens zeitlich konstant ist. Stellen Sie dann die Hamiltonschen Gleichungen auf, und berechnen Sie die Bahn des Teilchens. Anfangsbedingungen: $\mathbf{r}(t = 0) = (0, r_0, 0)$, $\dot{\mathbf{r}}(t = 0) = (v, 0, w)$. (2 Zusatzpunkte)

Hinweis: Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind für dieses Problem 6 lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, von denen 2 trivial und 4 gekoppelt sind. Ein möglicher Lösungsweg der 4 gekoppelten Gleichungen besteht darin, zuerst p_x und p_y zu eliminieren und dann eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Hilfsgröße $\zeta(t) = x(t) + iy(t)$ aufzustellen.

42. **Rotierendes Schwerependel; (6 Punkte)**



Die horizontale Achse der Aufhängung eines ebenen Pendels rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine vertikale Achse.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf für Schwingungen des Pendels um seine horizontale Aufhängungsachse im Schwerefeld. Wählen Sie dafür Kugelkoordinaten.

(2 Punkte)

(b) Diskutieren Sie die Gleichgewichtslagen als Funktion von ω.

(2 Punkte)

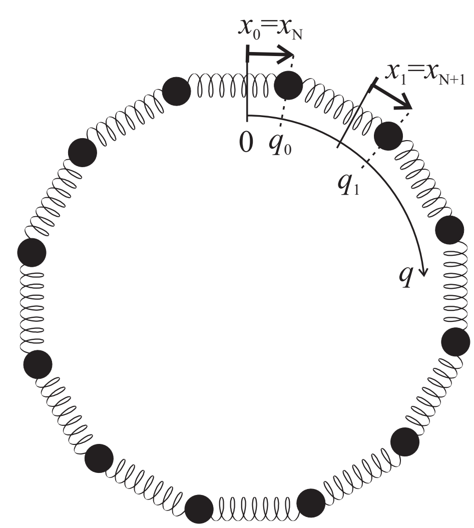
(c) Diskutieren Sie kleine Schwingungen des Pendels um seine Gleichgewichtslage als Funktion von ω.

(2 Punkte)

43. **Schwingungen in kreisförmiger Kette; (6 Punkte)**

N identische Teilchen der Masse m werden mit N identischen Federn (die nicht notwendigerweise ein lineares Kraftgesetz aufweisen) zu einem Adventskranz verbunden. Die Koordinaten längs des Rings seien q_j ($j = 0, \ldots, N-1$).

a) Setzen Sie eine potentielle Energie $u(q_{j+1} - q_j)$ zwischen jedem Paar von benachbarten Teilchen an (Formel geeignet modifiziert für „Ringschluss"), wobei die Funktion u ein Minimum $u(a) = u_0$ besitzt. Welche Ruhelage $q_j^{(0)}$ der N Teilchen wird sich einstellen?



Den so gefundenen Ringumfang halten wir nun fest und erlauben den Teilchen nur noch eindimensionale Bewegung entlang des Kreises (s. Skizze), die wir durch die Auslenkungen $\mathbf{x}$ aus der Ruhelage $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 - q_0^{(0)} \\ \vdots \\ q_{N-1} - q_{N-1}^{(0)} \end{pmatrix}$ beschreiben.

Die *periodischen Randbedingungen* erlauben uns dabei, $x_{j+N} \equiv x_j$ zu identifizieren. Zeigen Sie durch Taylorentwicklung der potentiellen Energie, dass sich die Lagrangefunktion ergibt zu

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathcal{A}\dot{\mathbf{x}} - \frac{D}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathcal{B}\mathbf{x}.$$

Welche Form haben die Matrizen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, was ist die Konstante $\mathcal{D}$? (1 Punkt)

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her. Schreiben Sie sie in Matrixschreibweise und komponentenweise. (1 Punkt)

c) Um die Bewegungsgleichungen zu entkoppeln, ist bei einem solchen Problem mit periodischen Randbedingungen die *diskrete Fouriertransformation* geeignet. Hierbei wird das Muster der Auslenkungen als die folgende Superposition angesetzt:

$$x_j(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_n(t) \exp(ik_n ja)$$

Welche Bedingung müssen die Wellenzahlen k_n erfüllen und warum durchläuft n gerade den Bereich $0 \ldots N-1$? Welchen Bereich durchläuft k_n? Weisen Sie nach, dass sich die Fourierkoeffizienten $\tilde{x}_n$ bestimmen lassen durch

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x_j \exp(-ik_n ja)$$

(2 Punkte)

d) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für die sogenannten *Normalkoordinaten* $\tilde{x}_n(t)$ her und führen Sie in geeigneter Weise Kreisfrequenzen ω_n ein. Skizzieren Sie die Abhängigkeit $\omega_n(k_n)$, die man *Dispersionsrelation* nennt. (2 Punkte)

44. **Larmortheorem; (4 Punkte)**
Beweisen Sie das Larmortheorem:
Ein Teilchen der Ladung e bewege sich unter dem Einfluss eines Potentials $V(\mathbf{r})$ und einem konstanten Magnetfeld $\mathbf{B}$. $V(\mathbf{r})$ sei drehinvariant um die Richtung des Magnetfeldes. Dann ist die Bewegung dieselbe (im Rahmen der Newton'schen Mechanik) wie diejenige eines Teilchens im Potential $V^* = V(\mathbf{r}) + \frac{m}{8}\omega_c^2\,\rho^2$ ohne Magnetfeld, falls die Bewegung in einem mit Frequenz $\frac{1}{2}\,\omega_c$ um die Magnetfeldachse rotierenden KS betrachtet wird. ω_c ist die Zyklotronfrequenz, ρ ist der Abstand von der Drehachse. In welchem Fall kann man davon sprechen, man habe durch den Wechsel ins rotierende System das Feld "wegtransformiert"?
Hinweis: Wählen Sie für das elektromagnetische Vektorpotential $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{B} \times \mathbf{r})$ und transformieren Sie auf Zylinderkoordinaten.