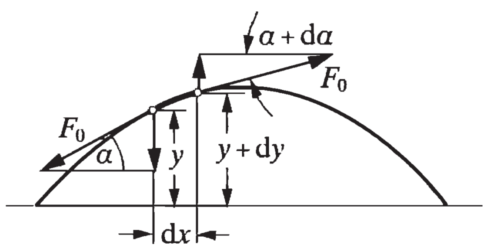
UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Alfred Leitenstorfer (Experimentalphysik)
Raum P 809, Tel. (07531)88-3818
E-mail: Alfred.Leitenstorfer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 06/07

Übungsblatt 0, Ausgabe 17.10.2006, abzugeben am 24.10.2006
Besprechung in den Übungen vom 25.-27.10.2006

1. **Seilwellen; (5 Zusatzpunkte)**
Die Bewegungsgleichung für die Auslenkung $y(x,t)$ eines Seilstücks mit der (infinitesimalen) Länge ds, der Querschnittsfläche A, der Massendichte ρ und dem Gewicht $dm = \rho A\, ds$, welches in x-Richtung gespannt wird, soll gefunden werden.
Hinweis: Verwenden Sie, dass an ein mit der Spannung σ gespanntes Seil an jedem Punkt eine Kraft $F_0 = \sigma A$ angreift, die entlang der Tangente an diesem Punkt gerichtet ist.
Durchgehend soll angenommen werden, dass die Auslenkung y klein und glatt ist, so dass z.B. die Länge ds genähert werden kann durch $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2} dx \doteq dx$



a) Zeigen Sie, dass die resultierende Kraft $d\mathbf{F}$ auf das Massenelement mit der Auslenkung $y(x,t)$ betragsmäßig lautet

$$dF \doteq F_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

und (ungefähr) senkrecht zum Seil gerichtet ist.
Hinweis: siehe Bild (2 Punkte)

b) Leiten Sie mit den Newtonschen Gleichungen die Wellengleichung für die Auslenkung ab:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

Was ist c? (1 Punkt)

c) Zwei Seilstücke unterschiedlicher Massedichten ρ_1 und ρ_2 seien bei $x = a$ verknüpft. Begründen Sie, dass am Ort $x = a$ die Auslenkung y stetig und stetig differenzierbar ist, $y(x = a-) = y(x = a+)$ und $\frac{\partial y}{\partial x} |_{x \to a-} = \frac{\partial y}{\partial x} |_{x \to a+}$ (2 Punkte)

2. **Fourier Reihe; (7 Zusatzpunkte)**
Eine reelle Funktion $f(x)$, die quadrat integrabel im Bereich $-l \leq x \leq l$ ist, d.h. $\int_{-l}^{l} dx \mid f(x) \mid^2 < \infty$, soll durch eine Summe

$$\tilde{f}_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \, \varphi_n(x)$$

angenähert werden, wobei die Funktionen φ_n orthonormiert sind, d.h.

$$\int_{-l}^{l} dx \, \varphi_n^{\star}(x) \, \varphi_m(x) = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & sonst \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \, e^{ikx}$$

mit $k = \frac{\pi}{l} n$ und $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ orthonormiert sind. (1 Punkt)

b) Als Maß für den Fehler der Näherung soll verwendet werden

$$\delta_N^2 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} dx \, \mid f(x) - \tilde{f}_N(x) \mid^2$$

Zeigen Sie, dass δ_N^2 als Funktion der Entwicklungskoeffizienten c_n minimal wird, wenn diese erfüllen:

$$c_n = \int_{-l}^{l} dx \, \varphi_n^*(x) \, f(x)$$

(2 Punkte)

Hinweis: Um das Minimum von δ_N^2 als Funktion der komplexen c_n zu finden, bietet es sich an, die c_n durch Amplitude und Phase auszudrücken, und δ_N^2 als Funktion dieser $2N$ reellen Größen zu minimieren.

c) Verwenden Sie, dass $f(x)$ reell ist, um die Summe $\tilde{f}_N(x)$ umzuschreiben zu:

$$\tilde{f}_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=N} \left[a_n \, \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + b_n \, \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \right]$$

Wie lauten die a_n und b_n? Was kann gefolgert werden, wenn $f(x)$ symmetrisch (d.h. $f(-x) = f(x)$) oder antisymmetrisch (d.h. $f(-x) = -f(x)$) ist? (2 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Fourierreihe $\tilde{f}(x)$, die sich für $N \to \infty$ ergibt durch $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_\infty(x)$, für die Funktionen:

$$f_1(x) = \begin{cases} A \, \left(1 - \frac{x}{l}\right) & 0 < x \leq l \\ f_1(-x) & -l \leq x < 0 \end{cases}$$

und

$$f_2(x) = \begin{cases} A \, \left(1 - \frac{x}{l}\right) & 0 < x \leq l \\ -f_2(-x) & -l \leq x < 0 \end{cases} ,$$

und vergleichen Sie das Verhalten der Fourierkoeffizienten für Größe n. (2 Punkte)

3. **Nabla-Kalkül; (5 Zusatzpunkte)**
$\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ seien Vektorfelder, $\phi(\mathbf{r})$ ein Skalarfeld und $f(r)$ eine skalare Funktion, die nur von $r = \mid \mathbf{r} \mid$ abhängt. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B} + (\mathbf{B} \times \nabla) \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \phi(\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \nabla \phi.$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla^2 f(r) = (\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r) f(r)$$