

# Skript

## Vorlesung zu Physik III - Integrierter Kurs

Fachbereich Physik an der Universität Konstanz  
gelesen von PROF. DR. ALFRED LEITENSTORFER und PROF. DR. MATTHIAS FUCHS  
bearbeitet von MARCEL WUNRAM

Stand: 4. Februar 2007

---

---

Dieses Skript ist eine Mitschrift der Vorlesung Physik III: Integrierter Kurs an der Universität Konstanz (Wintersemester 2006/2007) gelesen von Prof. A. Leitenstorfer (Experimentalphysik) und Prof. M. Fuchs (theoretische Physik). Es basiert auf einem Skript der selben Vorlesung aus dem Wintersemester 2004/2005 vorgetragen von Prof. G. Maret (Experimentalphysik) und Prof. M. Fuchs (theoretische Physik), das von Marcel Indlekofer, Thomas Laueremann, Vincent Peikert und Raphael Straub geschrieben worden ist. Die Autoren erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Richtigkeit. Lob, Kritik und Anregung bitte per Mail an:

[Marcel.Wunram@uni-konstanz.de](mailto:Marcel.Wunram@uni-konstanz.de)



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Optik</b>	<b>7</b>
1.0 Wiederholung der Elektrodynamik	7
1.0.1 Maxwell-Gleichungen	7
1.0.2 Die Lorentzkraft	10
1.0.3 Materialgleichungen	10
1.0.4 Superposition und Komplexifizierung	12
1.0.5 Energie der elektromagnetischen Felder	13
1.1 Die elektromagnetische Wellengleichung	14
1.1.1 Lichtgeschwindigkeit $c$	14
1.1.2 Exkurs: skalare Wellengleichung	14
1.1.3 Transversalität elektromagnetischer Wellen	18
1.1.4 Polarisierung ebener, monochromatischer Wellen	19
1.1.5 Oszillierender Dipol als Quelle von elektromagnetischer Strahlung	20
1.1.6 Lichtwelle - Photonenfeld	21
1.1.7 Frequenzspektrum der elektromagnetischen Strahlung	22
1.2 Mathematischer Einschub -Fouriertransformationen	22
1.2.1 Definition der Fouriertransformation (FT)	22
1.2.2 Differentiation und Multiplikation	24
1.2.3 Faltungstheorem	25
1.2.4 Umkehrung der FT und Parseval-Gleichung	25
1.3 Brechungsindex und Dispersion	26
1.3.1 Huygens'sches Prinzip	26
1.3.2 Dielektrische Funktion: Lorenz Modell	27
1.3.3 Brechungsindex	27
1.3.4 Absorption von Licht	28
1.3.5 Brechungsindex und Absorption von Metallen: Drude-Modell	29
1.4 Optisch anisotrope Medien: Doppelbrechung	30
1.4.1 Grundlagen	30
1.4.2 Lichtausbreitung in doppelbrechenden Medien	30
1.4.3 optisch einachsige Kristalle	31
1.5 Reflexion und Brechung	32
1.5.0 Einführende Versuche	32
1.5.1 Wiederholung: Feldverhalten an Grenzflächen	32
1.5.2 Energiefluss durch Grenzflächen	34
1.5.3 Brechungs- und Reflexionsgesetze	36
1.6 Geometrische Optik	47
1.6.1 Begriffe	47
1.6.2 Fermat'sches Prinzip	48
1.6.3 Strahlableitung durch ein Prisma	50
1.6.4 Optische Abbildungen	51
1.6.5 Abbildungsfehler und Aberrationen	54
1.7 Instrumente der geometrischen Optik	55
1.7.1 Projektionsapparat	55
1.7.2 Fotografische Kamera	56
1.7.3 menschliches Auge	56
1.7.4 Vergrößernde optische Instrumente	57
1.8 Interferenz	58
1.8.1 Interferenz zweier Punktquellen	58
1.8.2 Michelson-Interferometer	58
1.8.3 Interferenzen dünner Schichten	59
1.8.4 Vielfachinterferenzen	61
1.8.5 Kohärenz und Wellengruppen	62

1.9	Mathematischer Einschub: Green'sche Funktionen	66
1.9.0	Motivation	66
1.9.1	Die inhomogenen Wellengleichungen	66
1.9.2	Die Green'sche Funktion der Helmholtzgleichung	67
1.9.3	Randwertprobleme	70
1.10	Beugung	71
1.10.1	Beugung von Wellen	71
1.10.2	Kirchhoffsche Ableitung des Hygenschen Prinzips	72
1.10.3	Fraunhofer-Beugung	73
1.11	Streuung	77
1.11.1	Phänomen der Streuung von Wellen	77
1.11.2	Streuquerschnitte	77
1.11.3	Erinnerung Dipolstrahlung	79
1.11.4	Rayleigh-Streuung	82
<b>2</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>83</b>
2.1	Einschub: Konzepte und Definitionen	83
2.1.1	(kartesische) Koordinaten	83
2.1.2	Minkowski-Raum	83
2.1.3	Definition der Lorentz-Transformationen	84
2.1.4	Tensoren	85
2.2	Newton'sche Mechanik	87
2.2.1	Widerspruch der Galilei-Invarianz zu Maxwell-Gleichungen	88
2.3	Relativitätsprinzip und Lorentztransformation	88
2.3.1	Einstein'sches Relativitätsprinzip	88
2.3.2	Konstanz von Lichtgeschwindigkeit in Vakuum	88
2.3.3	Die spezielle Lorentz-Transformation	89
2.3.4	Elementare Folgerungen	91
2.3.5	Weltlinien und Eigenzeit	93
2.4	Lorentz-invariante Formulierung physikal. Gesetze	93
2.5	Relativistische oder Einstein'sche Mechanik	94
2.5.1	Vierergeschwindigkeit	94
2.5.2	Viererimpuls	95
2.5.3	Einstein'sche Bewegungsgleichung	96
<b>3</b>	<b>Analytische Mechanik</b>	<b>99</b>
3.0	Variationsrechnung	99
3.1	Grundzüge der Variationsrechnung	99
3.1.1	Motivation und klassische Beispiele	99
3.1.2	Die Euler'schen Gleichungen	100
3.1.3	Klassisches Beispiel: Die Brachystochrone	104
3.2	Lagrange Mechanik	106
3.2.1	Prinzip von Hamilton	106
3.2.2	Elementare Beispiele	110
3.2.3	Axiome und Grundbegriffe der Lagrange-Mechanik	115
3.2.4	Hamilton'sche Funktionen	116
3.2.5	Zwangsbedingungen	118
3.3	Mathematischer Einschub	122
3.3.0	Motivation	122
3.3.1	Karten und Koordinaten	123
3.3.2	Koordinatentransformationen	126
3.3.3	Koordinatentransformation zur Eliminierung von Zwangsbedingungen	126
3.3.4	Differenzierbare Mannigfaltigkeit	128
3.4	Symmetrien und Erhaltungssätze	128
3.4.1	Bahndeterminismus	128
3.4.2	Kovarianz	129
3.4.3	Kovarianz unter holonomen Zwangsbedingungen	130
3.4.4	Eichinvarianz	131
3.4.5	Das Noether-Theorem	131

3.5	Hamilton'sche Mechanik II	136
3.5.0	Motivation	136
3.5.1	Phasenraum	136
3.5.2	Satz von Liouville	137
3.5.3	Poisson-Klammern	138
3.5.4	Symmetrietransformation	140
3.5.5	Kanonische Transformation	141
3.6	Näherungsverfahren und Störungstheorie	142
3.6.1	Asymptotische Entwicklungen und O- Symbol	142
3.6.2	Multiskalenverfahren	143
3.6.3	Fast kreisförmige Bahn in Zentralpotential	144
3.6.4	Reguläre Störungstheorie	145
<b>4</b>	<b>Thermische Physik</b>	<b>147</b>
4.1	Einleitung	147
4.2	Die Temperatur	148
4.2.1	Das Gay-Lussac-Thermometer	148
4.3	Das ideale Gas	149
4.3.1	Ideales-Gas-Gesetz	149
4.3.2	Barometrische Höhenformel	151
4.3.3	Mikroskopisches Modell des idealen Gases	152
4.4	Reale Gase	156
4.4.1	Stoßquerschnitt und mittlere freie Weglänge	157
4.4.2	Diffusion als Beispiel für einen Transportprozess	158
4.4.3	Van-der-Waals'sche Zustandsgleichungen	158
4.5	Thermische Eigenschaften der Materie	160
4.5.1	Spezifische Wärme	160
4.6	8	161
<b>A</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>163</b>
<b>B</b>	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>165</b>
	<b>Stichworte</b>	<b>167</b>



# 1 Optik

In dieser Vorlesung wird Optik im Sinne der Betrachtung von Licht als elektromagnetischer Welle behandelt. Es findet keine Diskussion der Erzeugung oder Absorption von Licht statt. Dazu wären Kenntnisse der Quantenmechanik nötig. Ebenfalls werden die physiologischen Aspekte wie z.B. die Datenübertragung im Auge oder Gehirn hier nicht behandelt.

## 1.0 Wiederholung der Elektrodynamik

### 1.0.1 Maxwell-Gleichungen

Die MAXWELL-Gleichungen sind partielle Differentialgleichungen für Vektorfelder. Durch sie werden die elektromagnetischen Phänomene beschrieben, einschließlich der Optik.

#### Vektorfeld

$$\underbrace{\mathbf{B}}_{\text{Vektor}} \left( \underbrace{\mathbf{r}}_{\text{Ortsvektor}}, \underbrace{t}_{\text{Zeit}} \right) \quad \text{magnetisches Feld}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad \text{magnetische Erregung}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \text{elektrisches Feld}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \quad \text{elektrische Verschiebung}$$

Partielle Ableitungen:

$$\underbrace{\nabla}_{\substack{\text{Nabla} \\ \text{Operator}}} = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{array} \right)$$

Vektoroperator in kartesischen Koordinaten

#### 1.0.1.1 homogene Maxwell-Gleichungen

Beschreiben Bedingungen, die elektromagnetischen Felder erfüllen müssen.

#### A) Magnetfeld ist divergenzfrei

$$\boxed{\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0} \quad (1.1)$$

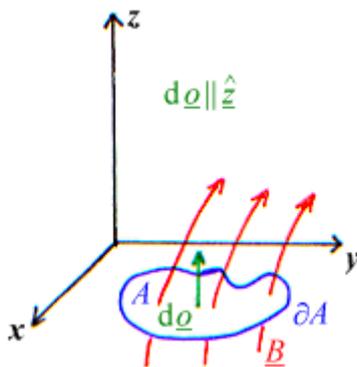
$$\text{differenzielle Form: } = \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Integrale Form: Volumenintegral über ein beliebiges aber festes Volumen mit geschlossener Oberfläche  $\partial V$ . Dabei ist  $\mathbf{d}\mathbf{o}$  der Normalenvektor zur Oberfläche.

$$0 = \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{Gauß'scher Satz}}{=} \oint_{\partial V} \mathbf{d}\mathbf{o} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

*Flächenintegral über geschlossene Oberfläche*

Bemerkung: Magnetischer Fluss durch Fläche  $A$



$$\int_A \mathbf{d}\mathbf{o} \cdot \mathbf{B} = \int_A \mathbf{d}\mathbf{o} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \int dx dy B_z(\mathbf{r}, t)$$

Fazit:

Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche  $\partial V$  eines beliebigen Volumens  $V$  verschwindet. Das  $\mathbf{B}$ -Feld ist quellenfrei!

**B) Faraday'sches Induktionsgesetz:** Das FARADAY'sche Induktionsgesetz besagt, dass ein elektrisches Feld durch ein sich zeitlich veränderliches  $\mathbf{B}$ -Feld oder durch die Bewegung einer Drahtschleife im  $\mathbf{B}$ -Feld induziert wird. Dazu lautet die differentielle Form:

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1.2)$$

Bei einer beliebigen, aber konstanten Fläche  $A$  (mit geschlossenem Rand  $\partial A$ ) gilt folgende Relation:

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{d}\mathbf{o} \cdot \dot{\mathbf{B}} &= \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{d}\mathbf{o} \cdot \mathbf{B} \\ &= - \int_A \mathbf{d}\mathbf{o} \nabla \times \mathbf{E} \\ &= - \oint_{\partial A} \mathbf{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

bei der letzten Umformung wurde der STOKES'sche Satz verwendet.

Ein zeitlich veränderlicher magnetischer Fluss durch die Fläche  $A$  induziert ein elektrisches Feld entlang des geschlossenen Randes  $\partial A$ . Das negative Vorzeichen lässt sich mit der LENZ'schen Regel erklären.

**Elektromagnetische Potentiale** Zum Lösen dieser beiden MAXWELL-Gleichungen kann man sie miteinander verbinden. Dazu führt man ein *skalares Potential* ( $\phi(\mathbf{r}, t)$ ) sowie ein *Vektorpotential* ( $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ ) ein. Die beiden MAXWELL-Gleichungen (1.1) und (1.2) sind erfüllt, wenn das  $\mathbf{E}$ - und das  $\mathbf{B}$ -Feld durch die Potentiale in folgender Art und Weise bestimmt sind:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \dot{\mathbf{A}} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.4)$$

Den Beweis hierfür erhält man mit:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} &= \underbrace{-\nabla \times (\nabla\phi)}_{=0} - \underbrace{\nabla \times \dot{\mathbf{A}} + \partial_t \nabla \times \mathbf{A}}_{=0 \text{ da beide Terme identisch}} = 0 \end{aligned}$$

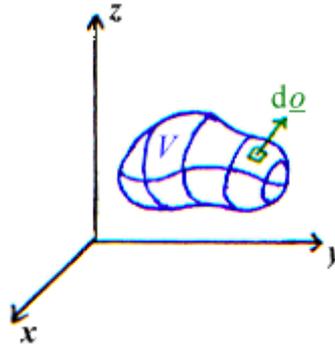
### 1.0.1.2 inhomogene Maxwell-Gleichungen

Beschreiben, wie  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{H}$  aus „externen,, (freien, experimentell kontrollierbaren) Ladungsdichten  $\rho^{\text{ext.}}(\mathbf{r}, t)$  und Stromdichten  $\mathbf{j}^{\text{ext.}}(\mathbf{r}, t)$  erzeugt werden.

**A) elektrische Ladungen:** Die „*elektrische Erregung*“ oder auch „*elektrische Verschiebungsdichte*“  $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$  wird durch eine „externe“ (freie, wahre) Ladungsdichte  $\rho^{\text{ext.}}(\mathbf{r},t)$  erzeugt. Es folgt die differentielle Form:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho^{\text{ext.}} \quad (1.5)$$

für die integrale Form folgt:



$$\int_V d^3 \rho^{\text{ext.}} = Q^{\text{ext.}}$$

$$\int_V d^3 r \nabla \cdot \mathbf{D} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_{\partial V} d\mathbf{o} \cdot \mathbf{D} = Q^{\text{ext.}}$$

dabei ist  $Q^{\text{ext.}}$  die externe Ladung in dem konstanten Volumen  $V$ . Ladungen in einem Volumen  $V$  erzeugen elektrischen Fluss durch die geschlossene Oberfläche  $\partial V$  (Ladungen sind Quellen des  $\mathbf{D}$ -Feldes).

**B) Maxwell'sches Verschiebungsgesetz:** Das MAXWELL'sche Verschiebungsgesetz sagt aus, dass die „*magnetische Erregung*“  $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$  durch externe Ströme  $\mathbf{j}^{\text{ext.}}$  und durch den MAXWELL'schen Verschiebungsstrom  $\dot{\mathbf{D}}$  erzeugt wird. Es ergibt sich eine ebenfalls inhomogene MAXWELL-Gleichung in differentieller und integraler Form:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}^{\text{ext.}} + \dot{\mathbf{D}} \quad (1.6)$$

$$\int_A d\mathbf{o} (\mathbf{j}^{\text{ext.}} + \dot{\mathbf{D}}) = \int_A d\mathbf{o} \nabla \times \mathbf{H} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial A} ds \cdot \mathbf{H}$$

Anschaulich ist die Aussage der integralen Form, dass bei einem Leiter, der von einem Kondensator un-

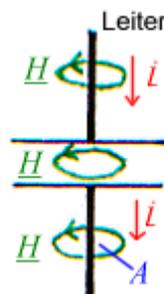


Abbildung 1.1: H-Feld im Kondensator

terbrochen wird (im Kondensator ist ein  $\dot{\mathbf{D}}$ -Feld), auch in dem Bereich, in dem kein Draht (kein Strom) ist, also im Kondensator, ein  $\mathbf{H}$ -Feld existiert sofern bei den beiden Leiterstücken ein  $\mathbf{H}$ -Feld existiert (Abb. 1.1).

Bemerkung: Die MAXWELL-Gleichungen sind 8 gekoppelte, lineare, partielle Differentialgleichungen für 12 Feldkomponenten bei gegebenen  $\varrho$  und  $\mathbf{j} \Rightarrow$  MAXWELL-Gleichungen sind nicht geschlossen, d.h. sie legen die Felder nicht eindeutig fest.

Der Zusammenhang  $\varrho, \mathbf{j} \Rightarrow \phi, \mathbf{A}$  folgt später

### 1.0.2 Die Lorentzkraft

Elektromagnetische Felder üben die Kraft:

$$\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t)) \quad (1.7)$$

auf ein Punktteilchen mit Ladung  $q$ , Position  $\mathbf{r}(t)$  und Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  aus.

### 1.0.3 Materialgleichungen

Die Beschreibung der internen Ladungen, die in Materie vorliegen, ist zu schwierig. Das mikroskopische Verständnis erfolgt erst bei der genaueren Betrachtung der Festkörperphysik.

Deshalb gibt es sogenannte *Materialgleichungen*. Sie sind Annahmen um dieses mikroskopische Problem zu umgehen. Durch sie werden Zusammenhänge zwischen den Feldern  $\mathbf{H}$  bzw.  $\mathbf{D}$  und den Feldern  $\mathbf{E}$  bzw.  $\mathbf{B}$  geliefert.

Materie enthält interne Ladungen und Ströme, die Polarisations- und Magnetisierungseffekte liefern. Man teilt auf:

$$\begin{aligned} \varrho^{\text{tot.}} &= \varrho^{\text{ext.}} + \varrho^{\text{int.}} \\ \mathbf{j}^{\text{tot.}} &= \mathbf{j}^{\text{ext.}} + \mathbf{j}^{\text{int.}} \end{aligned}$$

wobei die „mikroskopischen“ MAXWELL-Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\varrho^{\text{tot.}}}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \left( \mathbf{j}^{\text{tot.}} + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \right) \mu_0 \end{aligned}$$

Dabei ist  $\varepsilon_0$  die Vakuum Polarisierbarkeit und  $\mu_0$  die Vakuum Permeabilität.

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} + \mathbf{M} \end{aligned}$$

Dabei ist  $\mathbf{P}$  die Polarisationsdichte und  $\mathbf{M}$  die Magnetisierungsdichte, die beide von  $\varrho^{\text{int.}}$  bzw.  $\mathbf{j}^{\text{int.}}$  erzeugt werden:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{P} &= -\varrho^{\text{int.}} \\ \nabla \times \mathbf{M} + \dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{j}^{\text{int.}} \end{aligned}$$

**Fazit:** Die Materialgleichungen geben die Zusammenhänge

$$\varrho^{\text{int.}}; \mathbf{j}^{\text{int.}} \leftrightarrow \mathbf{P}; \mathbf{M} \leftrightarrow \mathbf{D}; \mathbf{H} \leftrightarrow \mathbf{E}; \mathbf{B}$$

#### 1.0.3.1 Vakuum

Im Vakuum gibt es keine internen Ladungen ( $\varrho^{\text{int.}} = 0 = \mathbf{j}^{\text{int.}}$ ;  $\varrho = \varrho^{\text{ext.}}$ ;  $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{\text{ext.}}$ ). Unter diesen Voraussetzungen gilt (ohne Näherung):

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu diesen beiden Materialgleichungen sind alle anderen Materialgleichungen Näherungen aus einfachen Modellen, die für gemittelte Felder gelten.

### 1.0.3.2 unmagnetische Materialien

In unmagnetischen Materialien gilt mit der *magnetischen Permeabilität* ( $\mu$ ):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \cdot \mathbf{B} \quad (1.8)$$

Unmagnetische Materialien sind dadurch charakterisiert, dass ihre Permeabilität nahezu 1 ist. ( $\mu \approx 1$ )  
Materialien mit  $\mu < 1$  wie z.B. Wasser oder Kupfer werden **diamagnetisch** genannt.  
Materialien mit  $\mu > 1$  wie z.B. Sauerstoff oder Platin werden **paramagnetisch** genannt.

### 1.0.3.3 Leiter

In Leitern existieren freie, interne Ladungen. Wir betrachten verschiedene Modelle für Leiter:

- **Modell des idealen Leiters:**  
Innerhalb des idealen Leiters gibt es kein elektrisches Feld, somit gilt  $\mathbf{E} \equiv 0$  innerhalb des Leiters.
- **Modell des Ohm'schen Leiters:**  
Mit der Leitfähigkeit  $\sigma$  gilt:

$$\boxed{\mathbf{j}^{\text{int.}} = \sigma \cdot \mathbf{E}} \quad (1.9a)$$

und wegen  $\mathbf{M} = 0$  und  $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{j}^{\text{int.}}$ :

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{D}} = \varepsilon\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}} = \varepsilon\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}} + \sigma\mathbf{E} \quad (1.9b)$$

Bei Leitern sinkt die Leitfähigkeit mit der Temperatur bei Halbleitern hingegen nimmt die Leitfähigkeit bei einer Temperaturzunahme stark zu; für Isolatoren gilt:  $\sigma \approx 0$ .

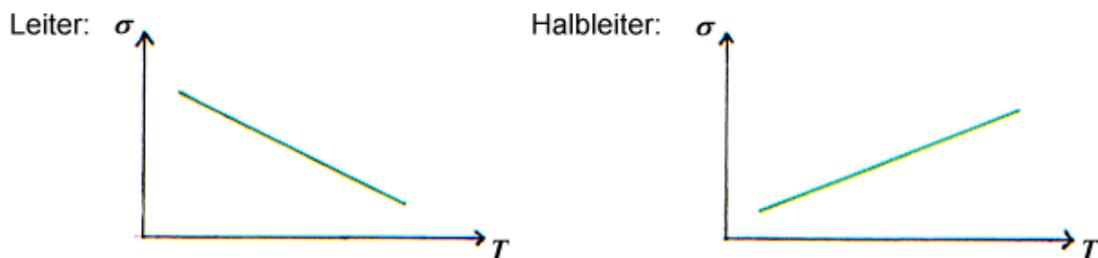


Abbildung 1.2: Leitfähigkeit in Abhängigkeit der Temperatur a) Leiter b) Halbleiter

### 1.0.3.4 Isolatoren / Dielektrika

In einem Dielektrikum sind alle Ladungen gebunden, es gibt keine freien Ladungen. Wieder unterscheiden wir verschiedene Modelle:

- **Modell des idealen Dielektrikums:**  
Mit der *relativen Dielektrizitätskonstante*  $\varepsilon$  gilt im idealen Dielektrikum:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} \quad (1.10)$$

- **Modell des polarisierbaren Dielektrikums:**  
Hier gilt mit der Polarisationsdichte  $\mathbf{P}$ , der Frequenz der gebundenen harmonischen Bewegung der Ladungen  $\omega_0$  und der Plasmfrequenz  $\omega_P$ :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.11a)$$

$$\ddot{\mathbf{P}} + \omega_0^2\mathbf{P} = \varepsilon_0\omega_P^2 \cdot \mathbf{E} \quad (1.11b)$$

• **Modell des anisotropen Dielektrikums:**

Bei anisotropen Dielektrikum gilt wie analog zum idealen Dielektrikum (1.10):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}$$

Dabei ist  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  jedoch ein Tensor zweiter Stufe (Matrix):

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

**Bemerkung:** Ableitungen der Materialmodelle in der Festkörperphysik. Lineare Relation  $\mathbf{D} \sim \mathbf{E}$  nur in Näherung, allgemein gilt  $\varepsilon = \varepsilon(E^2)$ , aber die lineare Näherung ist gut für kleine Felder.

#### 1.0.4 Superposition und Komplexifizierung

Natürliche Folgerung, da die MAXWELL-Gleichungen linear sind. Zur Vereinfachung betrachten wir die Gleichungen im Vakuum (vgl. 1.0.3.1). Sind nun  $\mathbf{E}_n$  und  $\mathbf{B}_n$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$  Lösungen zu MAXWELL-Gleichungen zu  $\varrho_n$  und  $\mathbf{j}_n$ , d.h. gilt:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{E}_n &= \frac{\varrho_n}{\varepsilon_0} & \nabla \mathbf{B}_n &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}_n &= \mu_0 \cdot (\mathbf{j}_n + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_n) & \nabla \times \mathbf{E}_n + \dot{\mathbf{B}}_n &= 0 \end{aligned}$$

und sind  $c_n \in \mathbb{C}$ , so gelten für die **Superpositionen**  $\mathbf{E} = \sum_n c_n \mathbf{E}_n$  und  $\mathbf{B} = \sum_n c_n \mathbf{B}_n$  wieder die MAXWELL-Gleichungen mit den Quellen  $\varrho = \sum_n \varrho_n$  und  $\mathbf{j} = \sum_n \mathbf{j}_n$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \text{nach (1.6):} \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times \sum_n c_n \mathbf{B}_n \\ &= \sum_n c_n \nabla \times \mathbf{B}_n \\ &= \sum_n c_n \left[ \mu_0 \cdot (\mathbf{j}_n + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_n) \right] \\ &= \mu_0 \sum_n c_n \mathbf{j}_n + \varepsilon_0 \mu_0 \sum_n c_n \dot{\mathbf{E}}_n \\ &= \mu_0 \cdot (\mathbf{j} + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}) \end{aligned}$$

Das Superpositionsprinzip folgt aus der Linearität der MAXWELL-Gleichungen.

Seien  $\mathbf{E}_1$  und  $\mathbf{E}_2$  und  $\mathbf{B}_1$  und  $\mathbf{B}_2$  Lösungen der MAXWELL-Gleichungen zu  $\varrho_1, \varrho_2$  und  $\gamma_1, \gamma_2$  so sind  $E = E_1 + iE_2$  und  $B = B_1 + iB_2$  Lösungen zu  $\varrho = \varrho_1 + i\varrho_2$  und  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + i\mathbf{j}_2$ .

**Beweis:** s.o. mit  $c_1 = 1$  und  $c_2 = i$

**Anwendungsbeispiel:** reelle Felder, die lauten

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

werden dargestellt mit komplexen Feldern.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_{0,c} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \in \mathbb{C} \quad \text{mit } \mathbf{E}_{0,c} \in \mathbb{C} \\ \text{über } \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_c^*) = \text{Re} \{ \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \} \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Häufig wird  $\text{Re} \{ \dots \}$  nicht geschrieben.

### 1.0.5 Energie der elektromagnetischen Felder

Aus der LORENTZkraft folgt die Leistung der elektromagnetischen Felder an freien (externen) Ladungen  $q_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, N$  im Volumen  $V$ . Dies ergibt als Änderung der Energie der Materie, d.h. der freien Ladungen in  $V$ . Die Leistung erhält man per *Kraft mal Geschwindigkeit*:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{d}{dt} U_{\text{Mat.}} = \sum_i^N \mathbf{v}_i(t) q_i \underbrace{(\mathbf{E}(\mathbf{r}_i(t)) + \mathbf{v}_i(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i(t)))}_{\text{Lorentz-Kraft}} \\
 &= \sum_i^N q_i \mathbf{v}_i \mathbf{E}(\mathbf{r}_i(t), t) \\
 &= \int_V d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \underbrace{\sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))}_{\text{mikroskop. Ausdruck für } \mathbf{j}^{\text{ext.}}} \\
 &\Rightarrow P = \int_V d^3r \mathbf{j}^{\text{ext.}} \cdot \mathbf{E}
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die JOULE'sche Wärme (Leistung pro Volumen) zu  $\mathbf{j}^{\text{ext.}} \cdot \mathbf{E}$ . Dabei bezeichnet  $\delta$  den DIRAC-Delta-Spike. Die freien Ladungen / Ströme generieren wiederum elektromagnetische Felder. Mit den MAXWELL-Gleichungen (MAXWELL'sches Verschiebungsgesetz (1.6) und FARADAY'sches Induktionsgesetz(1.2)) folgt weiter:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}^{\text{ext.}} &= \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}}) \\
 &= -\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \\
 &= -\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} - \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\
 &\Rightarrow \frac{d}{dt} U_{\text{Mat.}} + \int_V d^3r (\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})) = 0
 \end{aligned}$$

Das Prinzip der Energieerhaltung erlaubt die elektromagnetische Energie zu bestimmen:

$$U_{\text{em}} = \int_V d^3r u_{\text{em}}(\mathbf{r}, t)$$

Dabei ist  $u_{\text{em}}$  die elektromagnetische *Energiedichte*. Man betrachtet ein beliebiges Volumen  $V$ , das aber konstant gehalten wird. Außerdem ist es wichtig, dass die felderzeugenden Komponenten (Leiter, Kondensatoren etc.) weit entfernt sind, so dass die Felder außerhalb des Volumens als gegeben angenommen werden können. Damit folgt mit Hilfe des Gauss'schen Satz:

$$\frac{d}{dt} U_{\text{Mat}} + \frac{d}{dt} U_{\text{em}} + \underbrace{\oint_{\partial V} d\mathbf{o} \cdot \mathbf{S}}_{\text{Oberflächenintegral}} = 0$$

wobei

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}} \quad (1.12)$$

der **Poynting-Vektor** (die Energiestromdichte der elektromagnetischen Felder) ist. Im Folgenden wird der Spezialfall untersucht, dass die Materie im Volumen  $V$  ein unmagnetisches, ideales Dielektrikum ist:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} &= \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2} \partial_t \mathbf{E}^2 \\
 \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} &= \frac{\mu \mu_0}{2} \partial_t \mathbf{H}^2 \\
 \Rightarrow u_{\text{em}} &= \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{\mu \mu_0}{2} H^2
 \end{aligned}$$

Die zeitliche Änderung der gesamten Energie  $U = U_{\text{Mat}} + U_{\text{em}}$  der freien, externen Ladungen und der elektromagnetischen Felder im Volumen  $V$  ist gegeben durch den elektromagnetischen Energiefluss durch die Oberfläche  $\partial V$  von  $V$ .

Da das Volumen beliebig ist, folgt für die differentielle Form der *Poynting-Satz*:

$$\mathbf{j}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{E} + \partial_t u_{\text{em}} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$

## 1.1 Die elektromagnetische Wellengleichung

Nach MAXWELL und Faraday induzieren sich elektrische und magnetische Felder wechselseitig.

### 1.1.1 Lichtgeschwindigkeit $c$

Im ungeladenen (unmagnetischen) Dielektrikum ( $\varrho^{\text{ext}} = \mathbf{j}^{\text{ext}} = 0$ ;  $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$ ;  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\mathbf{B}$ ) gilt zunächst mit dem FARADAY'schen Induktionsgesetz (1.2):

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{\nabla(\nabla\mathbf{E})}_{=0 \text{ da } \varrho=0} - \nabla^2 \mathbf{E} + \mu\mu_0 \underbrace{(\nabla \times \dot{\mathbf{H}})}_{=j^{\text{ext}} + \varepsilon\varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\nabla^2 \mathbf{E} + \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \ddot{\mathbf{E}} &= 0 \end{aligned}$$

Man definiert die *Vakuumlichtgeschwindigkeit*  $c$  sowie den *Brechungsindex*  $n$  als:

$$c := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad n := \sqrt{\varepsilon\mu}$$

Daraus ergibt sich die *homogene Wellengleichung* des elektrischen Feldes:

$$\left[ \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.13a)$$

$v = \frac{c}{n}$  ist die Lichtgeschwindigkeit im Dielektrikum.

Über das MAXWELL'sche Verschiebungsgesetz (1.6) erhält man die homogene Wellengleichung des magnetischen Feldes:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon\varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}) \\ &= \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{B} \frac{1}{\mu\mu_0} \right) - \nabla^2 \mathbf{B} \frac{1}{\mu\mu_0} - \varepsilon\varepsilon_0 \ddot{\mathbf{B}} \\ \Leftrightarrow 0 &= \left[ \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \right] \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1.13b)$$

In Luft ist beispielsweise  $n \approx 1,000294$  und  $\sqrt{\varepsilon\mu} \approx 1,000295$ .

In Wasser hingegen ist  $n \approx 1,33$  und  $\sqrt{\varepsilon\mu} \approx 9$ .

Die Erklärung dafür liefert die Dispersion.

### 1.1.2 Exkurs: skalare Wellengleichung

Die Wellengleichung für ein Skalarfeld  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  lautet:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \right) \cdot \varphi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.14)$$

### Verschiedene Lösungstypen:

**A) ebene Wellen nach d'Alembert** Behauptung:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = f_+(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t) + f_-(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

mit dem festen Vektor  $\mathbf{k}$  der Länge  $k = |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{v}$  und  $f_+, f_- \in C^2$  ist Lösung der skalaren Wellengleichung für beliebige (zwei Mal stetig differenzierbare) Funktionen  $f_{\pm}$ .

Dabei ist  $f_{\pm} = f_{\pm}(\varphi_{\pm})$  wobei

$$\varphi_{\pm} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t$$

als „Phase“ der Funktion bezeichnet wird. Häufig wird allerdings nur

$$\varphi = \varphi_- = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \quad (1.15)$$

als Phase bezeichnet.

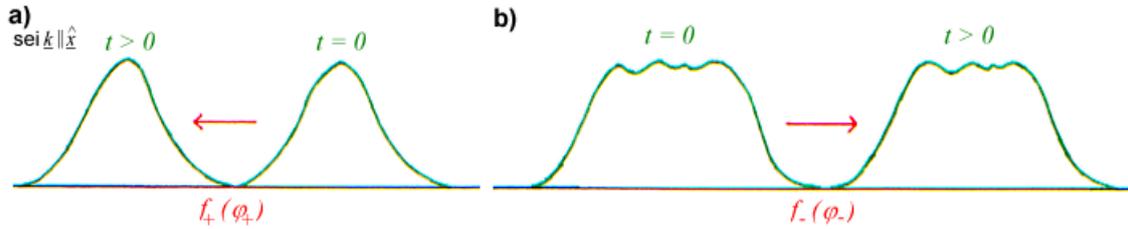


Abbildung 1.3: Ausbreitung der Welle **a)** mit  $\varphi_+$  nach  $-\mathbf{k}$  laufender und **b)** mit  $\varphi_-$  nach  $+\mathbf{k}$  laufender Erregung.

Wählt man  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{x}}$ , so wird  $\varphi_{\pm} = kx \pm \omega t$  und man erhält die in Abbildung 1.3 dargestellte Situation.  $f_+$  beschreibt eine nach  $-\mathbf{k}$  (links) laufende Welle (Erregung, Signal),  $f_-$  eine nach  $+\mathbf{k}$  (rechts) laufende, da:

$\varphi_{\pm}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t + \Delta t) = \varphi_{\pm}(\mathbf{r}, t)$  gilt für:

$$\mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{r} = \mp \omega \Delta t$$

Mit der Wahl von  $\mathbf{k}$  in x-Richtung ergibt dies:

$$\Delta x = \mp \frac{\omega}{k} \Delta t$$

Im Folgenden soll bewiesen werden, dass dies eine Lösung der Wellengleichung ist:

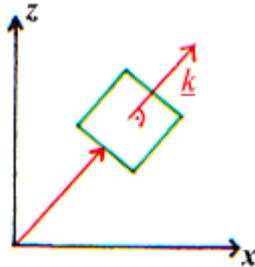
$$\begin{aligned} \partial_t^2 f_{\pm}(\varphi_{\pm}(\mathbf{r}, t)) &= \partial_t \left( \frac{\partial f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}} \dot{\varphi}_{\pm} \right) \\ &= \partial_t \left( \pm \omega \cdot \frac{\partial f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}} \right) \\ &= (\pm \omega)^2 \cdot \frac{\partial^2 f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}^2} \\ \nabla^2 f_{\pm}(\varphi_{\pm}(\mathbf{r}, t)) &= \nabla \cdot \left( \frac{\partial f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}} \cdot \nabla \varphi_{\pm}(\mathbf{r}, t) \right) \\ &= \nabla \cdot \left( \frac{\partial f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}} \mathbf{k} \right) \\ &= k^2 \cdot \frac{\partial^2 f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}^2} \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die homogene skalare Wellengleichung, so sieht man, dass sie genau dann erfüllt ist, wenn man die beiden oberen Gleichungen gleichsetzt und dabei die linke Seite noch durch  $v^2$  dividiert:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}^2} &= k^2 \cdot \frac{\partial^2 f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}^2} \\ \Leftrightarrow k^2 &= \frac{\omega^2}{v^2} \end{aligned}$$

$\left(k^2 - \left(\frac{\omega}{v}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0$  ist erfüllt, wenn  $\omega^2 = k^2 v^2$  für  $\ddot{f}_{\pm} \neq 0$ .

- $\mathbf{k}$  heißt *Wellenvektor* und gibt die Ausstrahlungsrichtung
- Die Relation  $\omega = \pm kv$  heißt *Dispersionsrelation*. Sie muss erfüllt sein, damit homogene (quellenfreie) Wellengleichung eine nichttriviale Lösung besitzt
- $\varphi$  ist ebene Welle, weil für  $t = t_0$  die Flächen (Wellenfronten) auf denen  $\varphi = \text{const.}$  gilt. Ebenen sind bestimmt durch  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const.} \Leftrightarrow \varphi_{\pm}(\mathbf{r}, t = t_0) = \text{const.}$ . Wellenfronten sind senkrecht zu  $\mathbf{k}$



- Wellenfront  $\varphi_{\pm} = \text{const.}$  bewegen sich mit konstanter „Phasengeschwindigkeit“  $\pm v$  wobei  $\mathbf{v} = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{v}} = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k}$  in  $\mp \mathbf{k}$  Richtung  
 $\Rightarrow \Delta F = \mp \mathbf{v} \Delta t = \mp \frac{\omega}{k^2} \Delta t$
- Signaltransport:  
 Wähle Koordinatensystem  $(ks)\hat{\mathbf{x}} \parallel \hat{\mathbf{v}}$  sodass 1-dimensionale Wellengleichung folgt

$$\Rightarrow \left( \partial_x^2 - \frac{1}{V^2} \partial_t^2 \right) \varphi(x, t) = 0$$

Wie bewegt sich ein „Signal“ (Wellenpaket), das zum Zeitpunkt  $t = 0$  lautet  $\phi(x, 0) = \phi_0(x)$ ,  $\dot{\phi}(x, t = 0) = v_0(x)$  Anfangswerte für  $t > 0$ ?

D'ALAMBERT:  $\phi(x, t) = f_+(x + vt) + f_-(x - vt)$

→ Anfangsbedingungen (i)  $\phi_0(x) = f_+(x) + f_-(x)$  mit  $\partial_+ f(x + vt) = \pm \frac{\partial f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}} \pm v f'_{\pm}$  Ableitung nach Argument von  $f_{\pm}$

$$\Rightarrow v_0(x) = (f'_{\pm}(x) - f'_{\mp}(x))v$$

integrieren:

$$(ii) f_+(x) - f_-(x) = \frac{1}{v} \int dx' v_0(x')$$

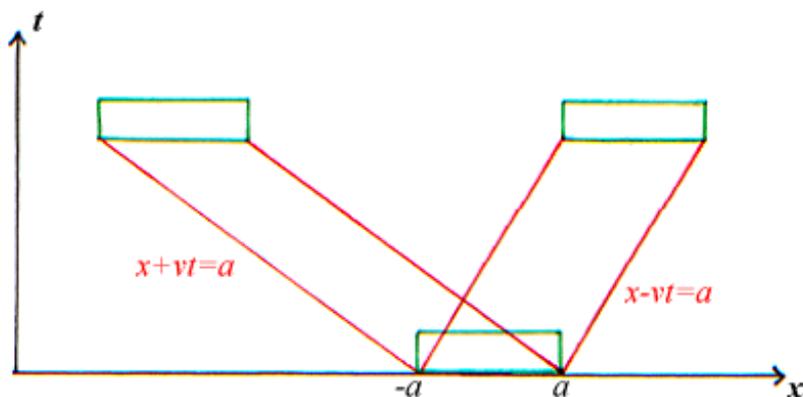
$$\Rightarrow f_{\pm}(x) = \frac{1}{2} (\phi_0(x) \pm \frac{1}{v} \int dx'' v_0(x''))$$

$$\Rightarrow \phi(x, t) = \frac{1}{2} (\phi_0(x + vt) + \phi_0(x - vt)) + \frac{1}{v} \int_{x-vt}^{x+vt} dx' v_0(x')$$

eindeutige und einzige Lösung des Anfangsproblems

Beispiel:

$$\text{wähle } v_0(x) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Werte  $\phi(|x| > v(t_0 - t), t)$  haben auf  $\phi(x = 0, t_0)$  keinen Einfluss.

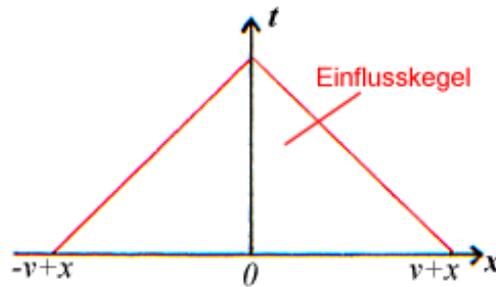


Abbildung 1.4: Der s.g. Lichtkegel trennt Bereiche in  $(x,t)$ , die zum Signal bei  $\varphi(x=0,t)$  beitragen. Einflussbereich des Punktes  $a$  für  $t > 0$ .

**B) Kugelwellen** Im dreidimensionalen Raum werde  $\phi(\mathbf{r},t) = \phi(r = |\mathbf{r}|,t)$  angenommen. Dabei ist  $\mathbf{r} = 0$  der Ursprung des Koordinatensystems (o.b.d.A.).

$$\begin{aligned} \text{aus (1.14): } \Rightarrow 0 &= \left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \right) \tilde{\phi}(r,t) \\ &= \left( \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \right) \tilde{\phi}(r,t) \end{aligned}$$

Man wähle den Ansatz  $\tilde{\phi}(r,t) = \frac{1}{r} \cdot g(r,t)$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_r \frac{1}{r} g &= \frac{1}{r} g' - \frac{1}{r^2} g \\ \Leftrightarrow \partial_r^2 \frac{1}{r} g &= \partial_r \left( \frac{1}{r} g' - \frac{1}{r^2} g \right) \\ &= -\frac{2}{r^2} g' + \frac{1}{r} g'' + \frac{2}{r^3} g \\ \Rightarrow \frac{1}{r} \left( \partial_r^2 - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \right) g(r,t) &= 0 \end{aligned}$$

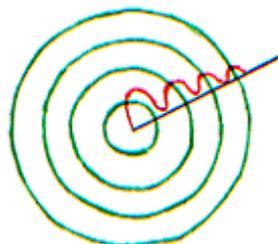
für  $r > 0$  folgt die eindimensionale Wellengleichung.

Wenn  $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(r,t)$  gilt, so ergibt sich  $\varphi$  aus der d'Alembert Lösung der radialen Gleichung für  $g = r \cdot \tilde{\varphi}$ :

$$\boxed{\phi(r,t) = \frac{1}{r} (g_+(r+vt) + g_-(r-vt))}$$

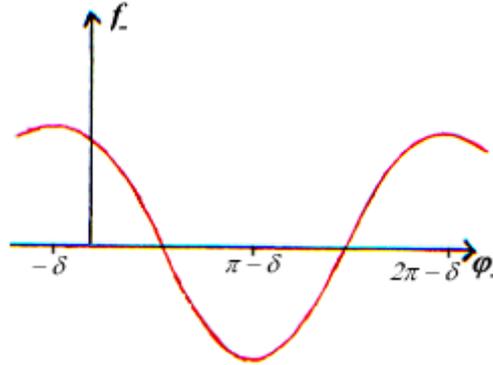
**Bemerkungen:**

- $g_+$  ist die einlaufende und  $g_-$  die auslaufende Kugelwelle
- $g_{\pm}$  ergeben sich aus den Anfangsbedingungen mit der *Formel von Poisson*
- Bei Kugelwellen sind Wellenfronten Kugelschalen im Ursprung
- Die Amplitude skaliert mit  $\frac{1}{r}$
- Ob ebene Welle oder Kugelwelle verwendet wird, hängt von der Symmetrie des Problems ab.



**C) ebene monochromatische Wellen** Die ebenen monochromatischen Wellen sind ein sehr wichtiger Spezialfall der oben behandelten ebenen Wellen, bei denen  $f_{\pm}$  periodisch ist. Hier gilt:

$$\begin{aligned} f_{\pm}(\varphi_{\pm}) &= A_{\pm} \cos(\varphi_{\pm}(\mathbf{r}, t) + \delta_{\pm}) \\ &= A_{\pm} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t + \delta_{\pm}) \end{aligned}$$



für festes  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  gilt, dass  $f_{\pm}(\mathbf{r}_0, t + mT) = f_{\pm}(\mathbf{r}_0, t)$  periodisch (für  $m = 0, 1, 2, \dots$ ) in  $t$  ist. Die Periode ist dabei  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$ .

$\nu = \frac{1}{T}$  ist die Frequenz mit der Einheit Hertz und  $\omega = 2\pi\nu$  wird mit *Kreisfrequenz* bezeichnet. Außerdem gilt für festes  $t = t_0$ , dass  $\varphi_{\pm}$  periodisch ist im Raum:

$$f_{\pm}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t_0) = f_{\pm}(\mathbf{r}, t_0)$$

$f_{\pm}$  ist periodisch in  $\mathbf{r}$  für  $\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} = 2\pi m$  mit  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Wählt man  $\mathbf{k} \parallel \hat{\mathbf{x}}$ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta x &= m \cdot \frac{2\pi}{k} = m \cdot \lambda \\ \lambda &= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} v = \frac{v}{\nu} \\ v &= \lambda \cdot \nu \\ v \cdot T &= \lambda \end{aligned}$$

$\lambda$  ist die sogenannte *Wellenlänge*

### 1.1.3 Transversalität elektromagnetischer Wellen

Im ungeladenen, unmagnetischen idealen Dielektrikum betrachten wir eine komplexifizierte ebene monochromatische Welle:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cdot e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}_0 \cdot e^{i\varphi} \quad (1.16a)$$

mit  $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3$  als konstantem Amplitudenvektor und  $\varphi$  als Phase. Physikalisch relevant ist nur der Realteil von  $\mathbf{E}$ .

Nun soll untersucht werden, ob diese Welle die MAXWELL-Gleichungen erfüllt:

Betrachten wir Gleichung (1.5) für  $\rho^{\text{ext}} = 0$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \Leftrightarrow -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 \underbrace{e^{i\varphi}}_{\neq 0} &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 &= 0 \end{aligned}$$

Als nächstes untersuchen wir Gleichung (1.2):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}} &= -\nabla \times \mathbf{E} = -i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i\varphi} \\ &= \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \partial_t e^{i\varphi} \end{aligned}$$

und durch Integration folgt weiter:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cdot e^{i\varphi} + \underbrace{\mathbf{B}^{\text{stat}}(\mathbf{r})}_{\equiv 0 \text{ o. B. d. A.}} \quad (1.16b)$$

$$\text{mit: } \mathbf{B}_0 = \frac{1}{\omega} \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0$$

Die MAXWELL-Gleichung (1.1) ist mit diesen Bedingungen erfüllt:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 e^{i\varphi} = -\frac{i}{\omega} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) e^{i\varphi} = 0$$

Es bleibt noch zu untersuchen, ob auch Gleichung (1.6) für  $\mathbf{j}^{\text{ext}} = 0$  erfüllt ist:

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{D}} + \nabla \times \mathbf{H} &= -i\varepsilon\varepsilon_0\omega\mathbf{E}_0 e^{i\varphi} - \frac{1}{\mu\mu_0} \frac{i}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) e^{i\varphi} \\ &= -\frac{1}{\mu\mu_0} \frac{i}{\omega} \left( \frac{n^2}{c^2} \omega^2 \mathbf{E}_0 + \underbrace{\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)}_{=0} - k^2 \mathbf{E}_0 \right) e^{i\varphi} \\ &= -\frac{1}{\mu\mu_0} \frac{i}{\omega} \left[ \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 - k^2 \right] \underbrace{\mathbf{E}_0 e^{i\varphi}}_{\neq 0} \end{aligned}$$

Damit wir also eine nicht-triviale Lösung ( $\mathbf{E}_0 \neq 0$ ) haben, muss die sogenannte *Dispersionsrelation*  $\omega^2 = k^2 v^2$  erfüllt sein.

Als Fazit erhalten wir, dass ebene monochromatische Wellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i\varphi} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i\varphi} \\ \text{mit: } -\varphi &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \quad kv = \omega = k \frac{c}{n} \end{aligned}$$

lösen die MAXWELL-Gleichungen in idealen Dielektriken und sind Transversalwellen:

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{E}_0 \quad (1.16c)$$

und es gilt:

$$|\mathbf{B}_0| = \frac{1}{v} |\mathbf{E}_0| \quad (1.16d)$$

Ihre *Energiestromdichte* ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{\mu\mu_0} (\text{Re} \{ \mathbf{E} \} \times \text{Re} \{ \mathbf{B} \}) \\ &= \frac{1}{4\mu\mu_0} \left[ (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \times \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \right] \\ &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 v^2}{4\omega} [(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)] \mathbf{k} \\ &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} [|\mathbf{E}|^2 + \text{Re} \{ E^2 \}] v \hat{\mathbf{k}} \\ &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} [|\mathbf{E}_0|^2 + \text{Re} \{ \mathbf{E}_0^2 e^{2i\varphi} \}] v \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Dabei gilt:  $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$  und  $|\mathbf{E}|^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$ .

#### 1.1.4 Polarisation ebener, monochromatischer Wellen

$\hat{\mathbf{k}}$  bildet mit den Einheitsvektoren, die auf  $\mathbf{k}$  senkrecht sind ( $\hat{\mathbf{e}}_1$  und  $\hat{\mathbf{e}}_2$ ) (sie erfüllen also  $\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$  und  $\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = 0$ ) ein (rechtshändiges) Orthogonalsystem. Damit ist  $\mathbf{E}_0$  schreibbar als:

$$\mathbf{E}_0 = \alpha \hat{\mathbf{e}}_1 + \beta \hat{\mathbf{e}}_2$$

mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

**A) lineare Polarisation** Wenn (i)  $\alpha = 0$ , (ii)  $\beta = 0$  oder (iii) der Quotient  $\frac{\alpha}{\beta}$  reell ist (d.h.  $\alpha = Ae^{i\delta}$  und  $\beta = Be^{i\delta}$  mit  $A, B, \delta \in \mathbb{R}$ ), dann schwingt  $\mathbf{E}$  in fester Richtung:

$$\alpha = Ae^{i\delta} \quad \beta = Be^{i\delta}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = (A\hat{\mathbf{e}}_1 + B\hat{\mathbf{e}}_2) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta)$$

In allen anderen Fällen rotiert die Polarisationsrichtung mit der Phase  $\varphi$

**B) zirkulare Polarisation** Wenn der Quotient  $\frac{\alpha}{\beta} = \pm i$  also rein imaginär ist und die Länge 1 hat, d.h.  $\alpha = Ae^{i\delta}$  und  $\beta = \pm iAe^{i\delta}$  ( $A, \delta \in \mathbb{R}$ ), dann durchläuft  $\mathbf{E}$  einen Kreis:

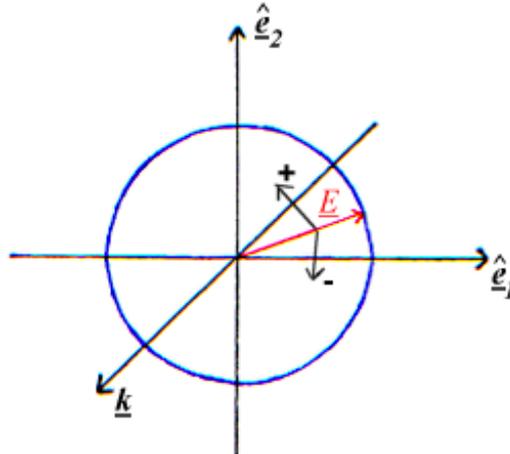


Abbildung 1.5: zirkulare Polarisation

$$\mathbf{E}_{\pm} = A(\hat{\mathbf{e}}_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \mp \hat{\mathbf{e}}_2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta)) \hat{=} \begin{pmatrix} \text{rechts} \\ \text{links} \end{pmatrix} \text{zirkulare Polarisation}$$

Dies ist eine Superposition zweier senkrechter linear polarisierter Wellen (mit  $\Delta\text{Phase} = 90^\circ$ ). Bei einer Umlaufrichtung im Uhrzeigersinn spricht man von links zirkular polarisiert und im Gegenuhrzeigersinn von rechts zirkular polarisiert. Eine zirkular polarisierte Welle ist eine Superposition zweier linear polarisierter Wellen. Analog ist die linear polarisierte Welle Superposition zweier gegenläufiger zirkular polarisierter Wellen.

**C) elliptische Polarisation** In allen anderen Fällen durchläuft  $\mathbf{E}$  eine Ellipse und ist im Allgemeinen immer noch eine Superposition zweier linear polarisierter Wellen.

### 1.1.5 Oszillierender Dipol als Quelle von elektromagnetischer Strahlung

- fundamental für zwei Aspekte der Optik
  - Emission von Licht (Sender)  $\rightarrow$  IK4
  - Licht-Materie-Wechselwirkung  $\rightarrow$  1.3.ff., IK4
- Beispiele: Resonanzfrequenz  $\nu_0$ 
  - Stabantenne MHz-GHz
  - Gitterschwingungen in Festkörpern 10THz
  - Molekülschwingungen 100THz, 1THz =  $10^{12}$ Hz
  - Atomare Übergänge 500THz
- wichtige Aspekte der Dipolstrahlung
  - Retardierung  $E(t) + \frac{r}{c} \sim \frac{\partial}{\partial t}(t)$

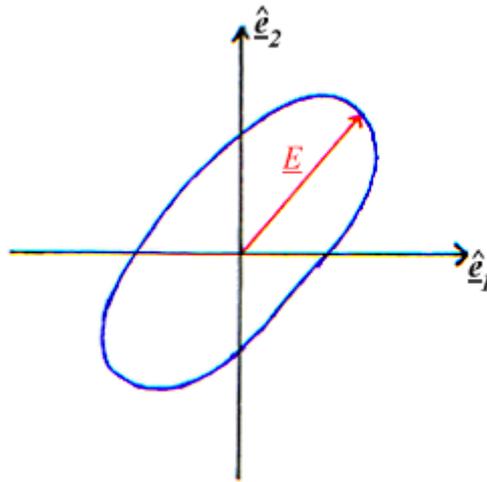


Abbildung 1.6: elliptische Polarisation

maximale Abstrahlung der Ebene senkrecht zur Achse (Äquatorebene)

minimale Abstrahlung der Achse parallel zu Dipol

Fernfeld:  $E \sim \frac{1}{r}$  für  $r > \lambda$

Nahfeld:  $E \sim \frac{1}{r^2}$  für  $r \ll \lambda$

- wichtige Größen

makroskopisches Dipolmoment  $\mathbf{p} = e \cdot \mathbf{xEM}$  mit  $e$ : verschobene Ladung und  $\mathbf{x}$ : Abstand Schwerpunkte positiver-negativer Ladungsverteilung

Polarisationsdichte:  $\mathbf{P} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{p} dV$

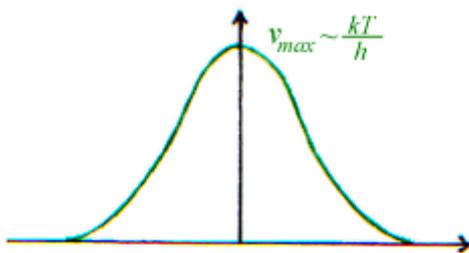
Potential Rückstellkraft  $V(\mathbf{x})$ : z.B.  $V(\mathbf{x}) = \frac{k}{2}x^2$

reduzierte Masse der verschobenen Ladungen z.B.  $m_e$

Resonanzfrequenz (für kleine Auslenkungen) z.B.  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}}$

### 1.1.6 Lichtwelle - Photonenfeld

M. PLANCK (1900)



PLANCK'sche Konstante:

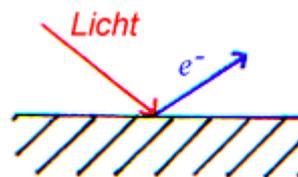
$$h = 6026 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Lichtquant: Photon

A. EINSTEIN (1905)

Photoeffekt



- Energie  $E = h\nu = \hbar\omega$

- Ruhemasse des Photons  $m = 0$

- Impuls im Vakuum des Photons  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  (komplexer Zusammenhang in Materie)

Lichtquelle	Photonenfluss in $\frac{1}{sm^2}$
fs-Laser 100GW, Fluss durch $20\mu m$	$10^{39}$
cw-Laser 10W	$10^{29}$
pralle Sonne	$10^{22}$
Laserpointer 1mW bei 2mm	$10^{21}$
Arbeitsraum	$10^{19}$
Vollmondnacht	$10^{16}$
sternenklare Nacht	$10^{14}$

### 1.1.7 Frequenzspektrum der elektromagnetischen Strahlung

Sichtbares Licht bei 400-800nm

## 1.2 Mathematischer Einschub -Fouriertransformationen

**Motivation:** Ebene, monochromatische Felder

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_0 e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right\}$$

sind spezielle Lösungen der MAXWELL-Gleichungen, die nützlich sind, weil ein beliebiges Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  mit ihnen als Linearkombination (Superposition) geschrieben werden kann.

Thema ist, in wieweit die Diskussion der ebenen, monochromatischen Wellen ausreicht, um allgemeine Felder zu beschreiben.

### 1.2.1 Definition der Fouriertransformation (FT)

Mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , einem Vektor im d-dimensionalen Raum und sei  $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}$  stückweise stetig und absolut integabel, d.h.

$$\int d^d x |f(\mathbf{x})| < \infty$$

Mit  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$  ist die (d-dim) FT definiert durch:

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) := \int_{\mathbb{R}^d} d^d x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad (1.17a)$$

**Bemerkung:** Elementare Eigenschaften

- FT ist lineare Abbildung  $f \rightarrow \tilde{f}$

$$f \rightarrow \tilde{f} = \text{FT}[f(\mathbf{x})](\mathbf{k})$$

mit  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  konstant.

$$\text{FT}[\lambda_1 f_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 f_2(\mathbf{x})](\mathbf{k}) = \lambda_1 \tilde{f}_1 + \lambda_2 \tilde{f}_2$$

- 

$$(\tilde{f}(\mathbf{k}))^* = \tilde{f}(\mathbf{k})^* = \int d^d x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f^*(\mathbf{x}) = \tilde{f}^*(-\mathbf{k})$$

- falls  $f$  reell, d.h.  $f(\mathbf{x})^* = f(\mathbf{x})$

$$\Rightarrow (\tilde{f}(\mathbf{k}))^* = \tilde{f}^*(\mathbf{k}) = \tilde{f}(-\mathbf{k})$$

- falls  $f(\mathbf{x})$  (antisymmetrisch) symmetrisch, d.h.  $f(-\mathbf{x}) = \pm f(\mathbf{x}) \Rightarrow \tilde{f}(\mathbf{k}) = \pm \tilde{f}(-\mathbf{k})$

- Verschiebungssätze: mit  $\mathbf{a}$  als festen Vektor und  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}$ :

$$\text{FT}[f(\mathbf{x} + \mathbf{a})](\mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}} \tilde{f}(\mathbf{k})$$

$$\text{FT}[e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} f(\mathbf{x})](\mathbf{k}) = \tilde{f}(\mathbf{k} + \mathbf{p})$$

Bsp.: Gauß-Funktion  $f_G(\mathbf{x}) = e^{-\gamma x^2}$  mit  $\text{Re}\{\gamma\} > 0$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_G(\mathbf{k}) &= \int d^d x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{-\gamma x^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 e^{ik_1 x_1 - \gamma x_1^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 e^{ik_2 x_2 - \gamma x_2^2} \cdot \dots \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx_d e^{ik_d x_d - \gamma x_d^2} \end{aligned}$$

Nebenrechnung: (Eindimensional)

$$\begin{aligned} f_{G1}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx - \gamma x^2} \\ \frac{\partial}{\partial k} \tilde{f}_{G1}(k) &\stackrel{\text{abs.int.}}{=} \int dx \partial_k e^{ikx} f_{G1}(x) \\ &= \int dx i x e^{ikx - \gamma x^2} \\ &= \int dx \frac{\partial}{\partial x} \left( \underbrace{e^{ikx - \gamma x^2}}_* \right) \cdot \left( \frac{-i}{2\gamma} \right) - \frac{k}{2\gamma} e^{ikx - \gamma x^2} \end{aligned}$$

\* (Randterme) gibt integriert 0, da  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} e^{ikx - \gamma x^2} \rightarrow 0$ .

$$= \frac{-k}{2\gamma} \tilde{f}_{G1}(k)$$

$$\Rightarrow \partial_k \tilde{f}_{G1}(k) + \frac{k}{2\gamma} \tilde{f}_{G1}(k) = 0$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung:

$$\tilde{f}_{G1}(k) = A e^{\frac{-k^2}{4\gamma}}$$

wobei

$$\begin{aligned} A = \tilde{f}_{G1}(k=0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\gamma x^2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \end{aligned}$$

Multidimensional:

$$\Rightarrow \tilde{f}_G(\mathbf{k}) = \left( \frac{\pi}{\gamma} \right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{k^2}{4\gamma}}$$

Dies ist wiederum eine Gauß-Glocke (Spezialfall!)

Bemerkung: Die Breiten  $\Delta x$  und  $\Delta k$  sind umgekehrt proportional  $\Delta x \cdot \Delta k = 2$  (unabhängig von  $\gamma$ ).

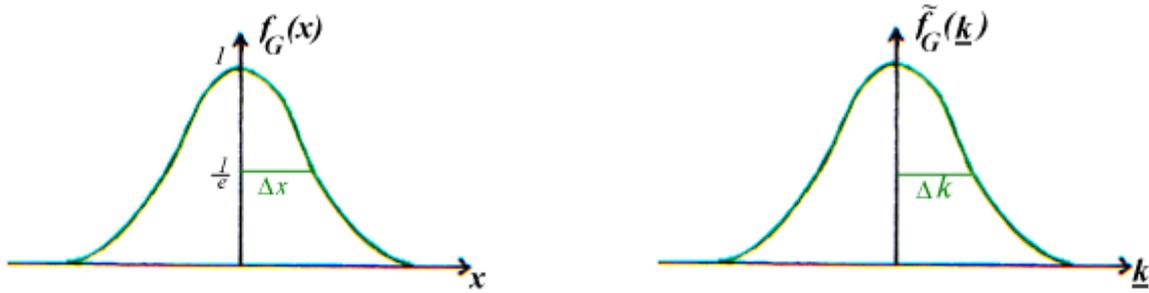


Abbildung 1.7: FOURIERtransformation am Beispiel einer GAUSS-Glocke;  $\Delta x = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ . In der transformierten Kurve ist das Maximum bei  $\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$  und im Abstand  $\Delta k = 2\sqrt{\gamma}$  ist die Funktion  $\tilde{f}$  bei  $\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \frac{1}{e}$ .

### 1.2.2 Differentiation und Multiplikation

**A) Differentiation** Sei  $f(\mathbf{x})$  nach  $x_i$  (partiell) differenzierbar, und sei  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \partial_{x_i} f(\mathbf{x}) = \partial_i f(\mathbf{x})$  absolut integabel, dann

$$\boxed{\text{FT}[\partial_{x_i} f(\mathbf{x})](\mathbf{k}) = -i k_i \tilde{f}(\mathbf{k})} \quad (1.18)$$

Bew.:

$$\int d^d x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{part.int.}}{=} - \int d^d x f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

+Randterme im " unendlichen", = 0, da  $f(|x| \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  damit  $f$  absolut integabel

$$\begin{aligned} &= -i k_i \int d^d x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ &= -i k_i \tilde{f}(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

Analog gilt:

$$\text{FT}[\partial_i \partial_j f(\mathbf{x})](\mathbf{k}) = (-i k_i)(-i k_j) \tilde{f}(k) \quad \text{usw.}$$

- **Nutzen der FT:**

Differentiation (nach  $\mathbf{x}$ ) im Urbildraum wird Multiplikation (mit  $\mathbf{k}$ ) im FOURIERraum.

- weiter gilt:

$$\text{FT}[\text{grad} f(x) = \nabla f(\mathbf{k})](x) = -i \mathbf{k} \tilde{f}(\mathbf{k})$$

$$\text{FT}[\text{div} \mathbf{B}(x) = \nabla \cdot \mathbf{B}(x)](\mathbf{k}) = -i \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k})$$

$$\text{FT}[\text{rot} \mathbf{B}(x) = \nabla \times \mathbf{B}(x)](\mathbf{k}) = -i \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k})$$

$$\text{FT}[\Delta f(x) = \nabla^2 f(\mathbf{k})](x) = -k^2 \tilde{f}(\mathbf{k})$$

**B) Multiplikation** falls  $|\mathbf{x}|^n f(\mathbf{x})$  absolut integabel:

$$\text{FT}[e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})](\mathbf{k}) = \tilde{f}(\mathbf{k} + \mathbf{p})$$

$$\begin{aligned} \text{Taylor LS} &= \int d^d x \sum_n \frac{i^n}{n!} (\mathbf{x}\mathbf{p})^n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ &= \tilde{f}(\mathbf{k}) + \mathbf{p} \frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} + \frac{1}{2} (\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}})^2 \tilde{f}(\mathbf{k}) + \dots \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Potenzen in  $\mathbf{p}$ :

$$\text{FT}[\mathbf{x} f(\mathbf{x})](\mathbf{k}) = -i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{k}} \quad \text{usw.}$$

### 1.2.3 Faltungstheorem

Sei

$$h(\mathbf{x}) = \int d^d y g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})$$

$h$  heißt Faltung von  $g$  mit  $f$  (im Ortsraum). mit  $\mathbf{y}' = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ :

$$h(\mathbf{x}) = \int d^d \mathbf{y}' g(\mathbf{y}') f(\mathbf{x} - \mathbf{y}')$$

dann gilt :

$$\tilde{h}(\mathbf{k}) = \tilde{g}(\mathbf{k}) \tilde{f}(\mathbf{k})$$

Eine Faltung im Ortsraum wird Produkt im FT-Raum.

Beweis:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\mathbf{k}) &= \int d^d x \int d^d y e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{y}} f(\mathbf{y}) \\ &= \int d^d \zeta \int d^d y e^{i\mathbf{k}\zeta} g(\zeta) e^{i\mathbf{k}\mathbf{y}} f(\mathbf{y}) \\ &= \tilde{g}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{f}(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

wobei:  $\zeta = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ ; da Integrationsgrenzen  $-\infty, \infty$  sind  $\Rightarrow$  Integrationen unabhängig.

Bemerkung: Zweiter Nutzen der FT, siehe Dispersion später

### 1.2.4 Umkehrung der FT und Parseval-Gleichung

**A)  $FT^{-1}$**  Idee: Verwende  $\tilde{f}_G(\mathbf{k} - \mathbf{p})$  als „DIRAC- $\delta$ -Funktion“ für  $\gamma \rightarrow 0$  mit einer Faltung, Wobei

$$\tilde{f}_G(\mathbf{k} - \mathbf{p}) = FT [e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} f_G(\mathbf{x})] (\mathbf{k})$$

mit

$$f_G(\mathbf{x}) = e^{-\gamma x^2}$$

**Hilfs-Satz:**

$$\int d^d u \tilde{f}_1(\mathbf{u}) f_2(\mathbf{u}) = \int d^d u f_1(\mathbf{u}) \tilde{f}_2(\mathbf{u})$$

Beweis: LS (linke Seite), RS (rechte Seite)

$$LS = \int d^d \mathbf{u} \int d^d \mathbf{x} = e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}} f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{u}) = RS$$

damit:

$$\begin{aligned} y &= \int d^d k \tilde{f}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot g(\mathbf{k}) \\ \text{mit Hs: } y &= \int d^d x e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} f_G(\mathbf{x}) \tilde{g}(\mathbf{x}) \\ \xrightarrow{y \rightarrow 0} y &= \int d^d x e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \tilde{g}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

explizit:

$$y = \int d^d k \underbrace{\left( \frac{\pi}{\gamma} \right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}{4\gamma}}}_{\text{schnell veränderlich}} g(\mathbf{k})$$

⇒ TAYLOR-Entwicklung um  $\mathbf{k} = \mathbf{p}$ :

$$\begin{aligned} y &= g(\mathbf{p}) \int d^d k \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{d}{2}} \cdot e^{-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}{4\gamma}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} g(\mathbf{p}) \underbrace{\int d^d z \sqrt{\gamma} \pi^{\frac{d}{2}} e^{-z}}_{\substack{\gamma \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0}} \\ &= g(\mathbf{p}) \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{d}{2}} (4\pi\gamma)^{\frac{d}{2}} \\ &= g(\mathbf{p})(2\pi)^d \end{aligned}$$

mit  $z = \frac{\mathbf{k}-\mathbf{p}}{\sqrt{\gamma}}$

damit folgt das Umkehrtheorem:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathbf{k}) &= \int d^d x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ f(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{f}(k) \end{aligned} \quad (1.17b)$$

Bemerkung:  $f \rightarrow \tilde{f}$  ist eindeutige Abbildung mit

$$\begin{aligned} \tilde{f} &\xrightarrow{FT} f \\ FT^{-1} : f &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{f}(k) \end{aligned}$$

Jedes beliebige (abs. integabel) Feld  $f(\mathbf{x})$  lässt sich darstellen als Superposition von Fourier-Moden  $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}$  mit  $\tilde{f}(\mathbf{k})$  als Gewichten.

### (B) Parseval-Beziehung

$$\boxed{\int d^d x f^*(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{f}^*(\mathbf{k})\tilde{g}(\mathbf{k})} \quad (1.19)$$

Beweis mit Hilfssatz:

$$\begin{aligned} \text{RS} - \int d^d u \tilde{f}_1(\mathbf{u})\tilde{f}_2(\mathbf{u}) &= \int d^d \mathbf{u} f^*(\mathbf{u})g(\mathbf{u}) \\ &\stackrel{\text{HS}}{=} \int d^d \mathbf{u} \tilde{f}^*(\mathbf{u}) FT^{-1}[g](\mathbf{u}) \\ &= \int d^d \mathbf{u} \tilde{f}^*(\mathbf{u}) \frac{1}{(2\pi)^d} \tilde{g}(-\mathbf{u}) \end{aligned}$$

## 1.3 Brechungsindex und Dispersion

- Ausbreitung von Licht:  $n(\omega)$
- $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu} \approx \sqrt{\epsilon}$

### 1.3.1 Huygens'sches Prinzip

- galitatives Bild für Lichtpropagation in polarisierbaren Medien
- $\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \Rightarrow$  Polarisationsdichte  $\mathbf{P}(\mathbf{x},t)$   
 $\Rightarrow$  Re-Emission sekundärer Welle  $\mathbf{E}_s(\mathbf{x},t)$

für  $n \neq 1$ :

- eventuell Phasenversatz

- durch Resonanzen des harmonischen Oszillators

### C. HUYGENS (1690)

Ausbreitung einer Wellenfront dadurch, dass von jedem Punkt im Raum eine Kugelwelle ausgeht.

Superposition  $\Rightarrow$  neue Wellenfront

Amplitude + Phasenversatz

$\mathbf{E}_s(\mathbf{x}, t) \rightarrow$  lokale Eigenschaften des Mediums

### 1.3.2 Dielektrische Funktion: Lorentz Modell

- Elektrodynamik:  $\varepsilon = \text{const.}$
- aber z.B.  $\text{H}_2\text{O}$ :  $\sqrt{\varepsilon(\omega=0)} = 8,96$  und  $n(598) = 1,33$
- einfaches Modell für  $\varepsilon(\omega)$  in Systemen mit gebundenen Ladungen bzw. Elektronen (Dielektrika)
- Atome: negativ geladene Elektronen  $e^-$  mit  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$  und Ladung  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  gebunden an positiven Kern mit  $m_k = \infty$

$\Rightarrow$  Bewegungsgleichungen für Dipolmoment  $\mathbf{p} = -g\mathbf{x}$ . Dabei ist  $\mathbf{p}$  die makroskopische Polarisation aus  $\mathbf{p} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\mathbf{E}$  (MAXWELL-Gleichungen treibende Kraft  $\mathbf{F}(t)$  auf  $e^-$ :

$$\mathbf{F}(t) = -e\mathbf{E}(t) = -e\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$$

$\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{x}$ , reell

$\mathbf{x}(t)$ : Auslenkung eines 1-dimensionalen harmonischen Oszillators mit Resonanzfrequenz  $\omega_0$  und Dämpfungskonstante  $\gamma \ll \omega_0$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t) = -\frac{e}{m} E_0 e^{i\omega t}$$

$$x(t) = -\frac{e}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} E_0 e^{i\omega t}$$

$$p(t) = qx(t) = -ex(t)$$

$$P(t) = -ex(t)N = e^2 N \frac{1}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} E(t) \\ = (\varepsilon(\omega) - 1) \varepsilon_0 E(t)$$

Dabei ist  $N$  die Teilchendichte

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

### 1.3.3 Brechungsindex

- allgemein aus der Wellengleichung:  $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$
- verdünnte Medien:  $\varepsilon(\omega) = 1 + \Delta\varepsilon$  mit  $\Delta\varepsilon \ll 1$

$$(\varepsilon - 1) = (n^2 - 1) = (n + 1)(n - 1) \approx 2(n - 1)$$

$$(n - 1) \approx \frac{1}{2} (\varepsilon(\omega) - 1) = e^2 N \frac{1}{2\varepsilon_0 m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

$$n(\omega) = n_R(\omega) + in_I(\omega)$$

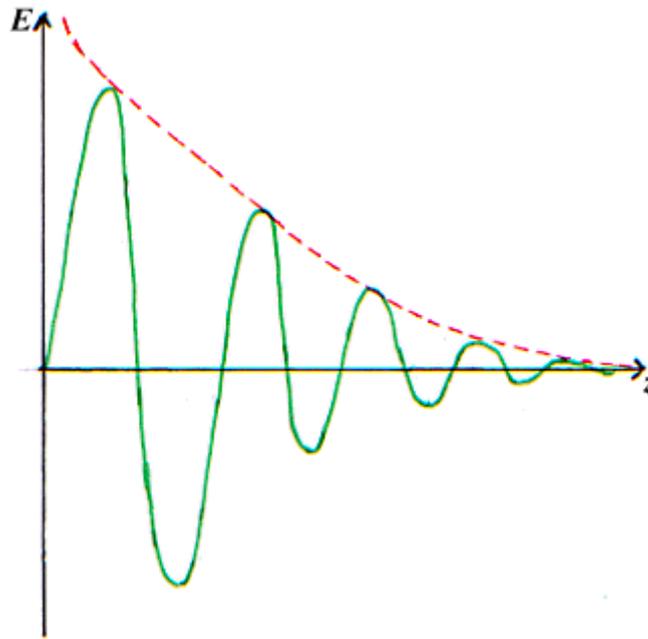
$$n_R = 1 + \frac{e^2 N}{2\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$$N_I = \frac{e^2 N}{2\varepsilon_0 m} \frac{-\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

### 1.3.4 Absorption von Licht

- Ausbreitung ebener Welle in z-Richtung
- Medium mit  $n = n_R + in_I$
- Wellenvektor  $k = \frac{n\omega}{c}$

$$\begin{aligned} E(z,t) &= E_0 e^{[i\omega t - ikz]} \\ &= E_0 e^{[i\omega t - i\frac{\omega n_R}{c}z + \frac{\omega n_I}{c}z]} \\ &= E_0 \exp\left[\frac{\omega n_I}{c}z\right] \cdot \exp\left[i\omega t - i\frac{\omega n_R}{c}z\right] \end{aligned}$$



Intensität:

$$\begin{aligned} I(z) &= I(0) e^{\frac{2\omega n_I z}{c}} = I(0) e^{-az} \\ \text{mit } a &= -\frac{2\omega n_I}{c} = -\frac{4\pi n_I}{\lambda} \end{aligned}$$

#### Lambert-Beer-Gesetz

$a$ : Extinktionskoeffizient

LORENZ:

$$a = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m c} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

thermische Gleichgewicht  $n_I < 0$ ;

Laser:  $n_I > 0$

Transmission

$$T = \frac{I(z)}{I(0)} = e^{az}$$

Einzelne Atome bzw. Oszillationen:  $N$

$$I(z) = I(0) e^{-\sigma N z}$$

$$I(z) = I(0) 10^{-\varepsilon c z} \quad \text{optische Dichte}$$

mit  $\sigma$ : Absorptionsquerschnitt

$c$ : Konzentration in  $\frac{\text{Mol}}{\text{l}}$

$\varepsilon$ : molarer Extinktionskoeffizient

### 1.3.5 Brechungsindex und Absorption von Metallen: Drude-Modell

Leiter: freie Elektronen

→ Rückstellkraft → 0

→ transversale Resonanzfrequenz:  $\omega_0 = 0$ , Dämpfung vernachlässigt, also  $\gamma = 0$

⇒  $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$  mit der Plasmafrequenz  $\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}}$

$\omega > \omega_p$  :  $\varepsilon > 0$ ,  $n$  reell

$\omega < \omega_p$ ;  $\varepsilon < 0$ ,  $n$  imaginär

Beispiel: Ag

$$N_{Ag} = 6 \cdot 10^{22} \text{cm}^{-3} \quad \omega_p = 1,38 \cdot 10^{16} \text{s}^{-1} (\text{UV})$$

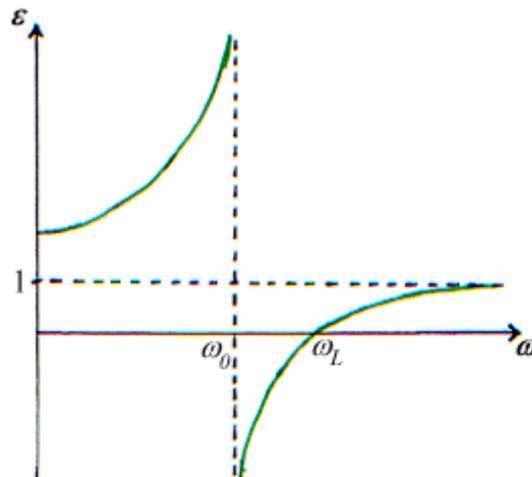
grünes Licht  $\lambda = 500 \text{nm} \rightarrow \omega = 3,76 \cdot 10^{15} \text{s}^{-1}$

$$n_I = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = -3,53$$

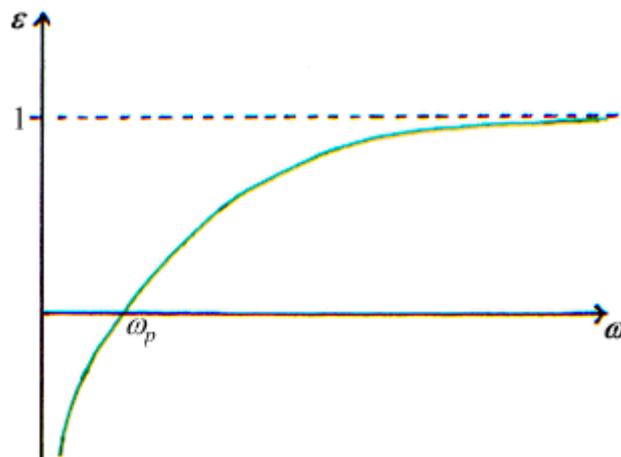
Eindringtiefe  $\frac{1}{a} = -\frac{\lambda}{4\pi n_I} = 11,3 \text{nm}$

jetzt:  $\gamma = 0$

LORENZ:



DRUDE



$$\nabla \mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \nabla \mathbf{E} = 0$$

für  $\varepsilon = 0 \Rightarrow$  longitudinale Eigenmoden möglich!

## 1.4 Optisch anisotrope Medien: Doppelbrechung

### 1.4.1 Grundlagen

anisotroper Kristall

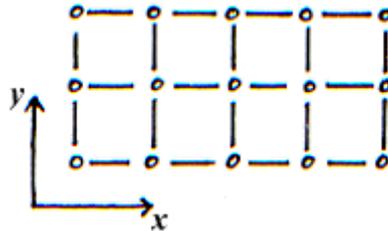
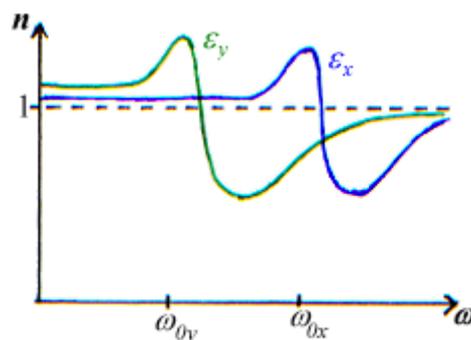


Abbildung 1.8: anisotroper Kristall

$$e^- : \omega_{0x} \neq \omega_{0y} \Rightarrow \varepsilon_x(\omega) \neq \varepsilon_y(\omega)$$



allgemein:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{\text{Tensor}} \mathbf{E}; \quad D_i = \varepsilon_0 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} E_k \quad i = 1,2,3$$

aus Symmetrie:

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i; \quad E_i = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_i} D_i$$

Hauptachsenform:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

3 Fälle:

- 1) optisch isotrope Medien:  $\varepsilon_i = \varepsilon$   
Bsp: Gläser, Flüssigkeiten, Gase, kubische Kristalle
- 2) optisch einachsige Kristalle:  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{\perp}, \varepsilon_z = \varepsilon$   
z-Achse: optische Achse
- 3) optisch zweiachsige Kristalle  $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z \neq \varepsilon_x$   
→ zwei optische Achsen

### 1.4.2 Lichtausbreitung in doppelbrechenden Medien

- MAXWELL-Gleichung  $\Rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$
- ebene Welle:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{D} = 0 &\Rightarrow \mathbf{k} \mathbf{D} = 0; & \mathbf{k} \perp \mathbf{D} \\
\nabla \mathbf{B} = 0 &\Rightarrow \mathbf{k} \mathbf{B} = 0; & \mathbf{k} \perp \mathbf{B} \\
\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &\Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}; & \mathbf{B} \perp \mathbf{E} \\
\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &\Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\mu_0 \omega \mathbf{D}; & \mathbf{B} \perp \mathbf{D} \\
\Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \frac{-\omega^2}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{D}
\end{aligned}$$

Energiefluss:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad \mathbf{S} \perp \mathbf{E}; \mathbf{S} \perp \mathbf{B}$$

Spezialfall:  $\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_x}{2} = \frac{1}{2}$

$\mathbf{E}_0$  :

45° zur x-Achse

$$\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 \\ 0 & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \\ \frac{E_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \varepsilon_0 E_x \begin{pmatrix} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \\ \frac{E_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

allgemein:  $\mathbf{D} \nparallel \mathbf{E}; \mathbf{k} \nparallel \mathbf{S}$

Spitze von  $\mathbf{D}_0$  auf Ellipse mit Achsenabschnitt  $\varepsilon_0 \varepsilon_x E_0$  und  $\varepsilon_0 \varepsilon_y E_0$

Strategie für Berechnung der Lichtausbreitung:

- Richtung  $\mathbf{k}$  :  $\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$
- Richtung  $\mathbf{E} \Rightarrow$  lineares, homogenes Gleichungssystem:

$$\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_k \times \mathbf{E} + \frac{1}{n^2} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \mathbf{E} \equiv \underline{\underline{\underline{G}}} \mathbf{E} = 0$$

lösbar, falls  $\det(\mathbf{G}) = 0$

$\Rightarrow$  Gleichung 2. Grades in  $n^2$

$\Rightarrow$  2 Werte von  $n > 0$ , verknüpft mit 2 Polarisationsrichtungen

$\Rightarrow$  Richtung von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D}$  festlegen

### 1.4.3 optisch einachsige Kristalle

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{\perp}, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_{\parallel}$$

$$\mathbf{k} \parallel z \Rightarrow \det(\mathbf{G}) = 0 \Rightarrow n = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$$

$\Rightarrow$  keine Doppelbrechung

$$\mathbf{k} \parallel x \Rightarrow n_{ao} = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}, n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$$

$n_{ao}$  : außerordentlicher Brechungsindex,  $\mathbf{E} \parallel z$

$n_o$  : ordentlicher Brechungsindex,  $\mathbf{E} \parallel y$

allgemein: Winkel  $\theta$  zwischen  $\mathbf{k}$  und optischer Achse  $\mathbf{z}$ :

$$\frac{1}{n_{ao}(\theta)^2} = \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_{\parallel}}; \quad n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$$

2 Polarisationsrichtungen:

- ordentlicher Strahl:  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D} \perp \mathbf{z}$  folgt dem SNELLIUS'schen Brechungsgesetz
- außerordentlicher Strahl: polarisiert in der Ebene durch die optische Achse  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{k}$ . Diese Ebene nennt man den Hauptschnitt des Kristalls. Er folgt SNELLIUS'schen Brechungsgesetz nicht.

Strahlenellipsoid für Phasengeschwindigkeit  $v_0$  und  $v_{ao}$ :

ordentlicher Strahl: Kugel  
 außerordentlicher Strahl: Ellipsoid

Achenabschnitte:

$$v_{ao} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}} = \frac{c}{n_{ao}}$$

$$v_o = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} = \frac{c}{n_o}$$

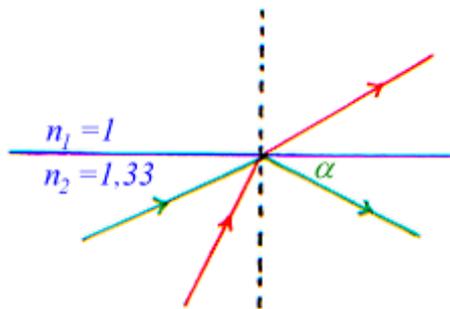
für  $v_{ao} > v_o$ ;  $n_{ao} < n_o$  :  
 $n_{ao} > n_o$  :

negativ einachsrig  
 positiv einachsrig

Brechung an optisch einachsrigem Medium  
 → HUYGEN'sches Prinzip

## 1.5 Reflexion und Brechung

### 1.5.0 Einführende Versuche



- Brechung an Grenzfläche Wasser-Luft  
 Licht wird zum dichteren Medium hin gebrochen  
 $\alpha$  Grenzwinkel der Totalreflexion  
 Reflexion. einfallswinkel = Ausfallswinkel
- Brewster-Winkel

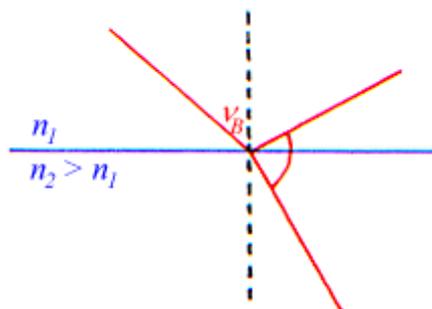


Abbildung 1.9: Brewsterwinkel

### 1.5.1 Wiederholung: Feldverhalten an Grenzflächen

Ziel:

bisher: Wellen in unedlichem Medium

nun: Übergang von elektromagnetischen Wellen zwischen Medien mit unterschiedlichen Materialparametern

Problem: Makroskopische MAXWELL-Gleichungen und Materialgleichungen gelten nur nach Mittelung über räumliche Bereiche, die einige polarisierbare Atome enthalten.

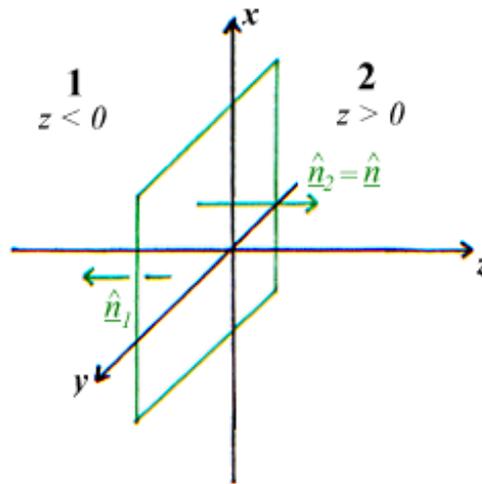
MAXWELL-Gleichungen gelten für Bereiche, wo Materialparameter  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  etc. stetig sind.

Material 1 und 2 seien beschrieben durch unterschiedliche Materialgleichungen. Eine Grenzfläche wird durch Grenzsicht mit Dicke  $\delta h$ , wo  $\mu$ ,  $\sigma$  ... schnell veränderlich, aber stetig moelliert.

Problem: Führe Grenzübergang  $\delta h \rightarrow 0$  durch um mit einfacher Grenzfläche arbeiten zu können. Material 1 und 2 haben unterschiedliche Materialparameter und Grenzsicht der Dicke  $\delta h$  trennt beiden. Für  $\delta h \rightarrow 0$  erhält man Grenzfläche.

**Annahme:** Für  $\delta h \rightarrow 0$  bleiben alle Felder und ihre zeitliche Ableitung endlich. (klappt nicht für zu stark vereinfachte Materialmodelle)

Geometrie



Definiere:  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_2$

$$\mathbf{A}^{\parallel} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in x-y-Ebene heißt Tangentialvektor oder parallel}$$

$\Rightarrow$  Zerlegung eines beliebigen Vektors  $\mathbf{A}$

$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\parallel} + \mathbf{A}^{\perp}$ ;  $\mathbf{A}^{\perp}$  Vektor senkrecht zur Grenzfläche.

$$\mathbf{A} = \underbrace{(\mathbf{A} \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}}_{\mathbf{A}^{\perp}} + \underbrace{\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A})}_{\mathbf{A}^{\parallel}}$$

- Maxwell-Gleichungen 1: (1.1)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (1.20a)$$

Die Normalkomponente von  $\mathbf{B}$  ist immer stetig

- Maxwell-Gleichungen 2: (1.2)

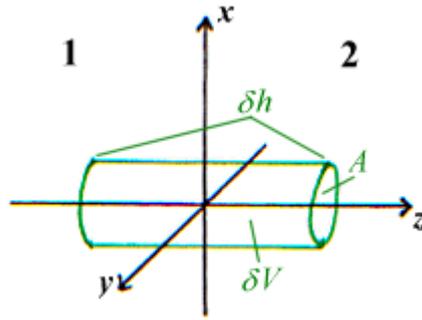
$$\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (1.20b)$$

die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}$  sind immer stetig.

- Maxwell-Gleichungen 3: (1.5)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho^{\text{ext.}} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(1)}) = \varrho^F \quad (1.20c)$$

die Normalkomponente  $\mathbf{D}$  ist stetig, springt um  $\varrho^F$ , wenn  $\varrho^F = 0$  keine Lösung der MAXWELL-Gleichungen und Materialgleichung liefert.



$$\rho_F = \lim_{\delta h \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int_{\delta V} d^3r \rho(\mathbf{x})$$

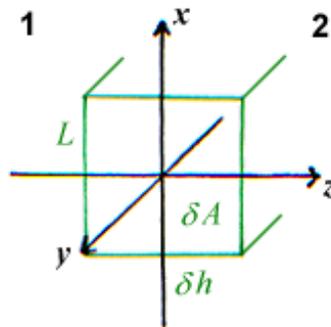
$$[\rho^F] = \frac{C}{m^2} \quad \text{Flächenladungsdichte}$$

- Maxwell-Gleichungen 4: (1.6)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}^{\text{ext.}} + \dot{\mathbf{D}} \Rightarrow \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) = \mathbf{j}^F \quad (1.20d)$$

die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{H}$  ist stetig, oder falls dies keine Lösung der MAXWELL-Gleichungen und Materialgleichungen erlaubt, springt sie um Oberflächenstromdichte  $\mathbf{j}^F$

$$\int_{\partial A} d\mathbf{o} \rightarrow \int_L ds \mathbf{j}_F$$

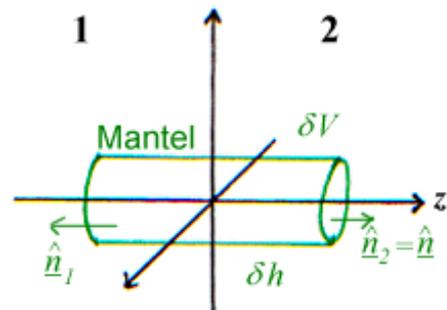
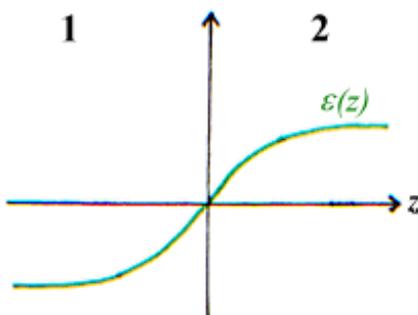


$$\mathbf{j}^F = \lim_{\delta h \rightarrow 0} \frac{1}{L} \int_{\delta A} d\mathbf{o} \mathbf{j}$$

$$[\mathbf{j}^F] = \frac{A}{m^2}$$

### 1.5.2 Energiefluss durch Grenzflächen

Wichtig für die Optik ist das Verhalten von Poyntingvektor  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  an Grenzflächen. Betrachte Energie in Zylinder Höhe:=  $\delta h$ , Volumen:=  $\delta V = A\delta h$



Energieerhaltung im Volumen  $\delta V$  (1.0.5)

$$\begin{aligned} \int_{\delta V} d^3r (\dot{u} + \mathbf{j}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{E}) &= \oint_{\partial \delta V} d\mathbf{o} \mathbf{S} \\ &= \int_{\text{Mantel}} d\mathbf{o} \mathbf{S} + \int_{A_1} d\mathbf{o} \hat{\mathbf{n}}_1 \mathbf{S} - \int_{A_2} d\mathbf{o} \hat{\mathbf{n}}_2 \mathbf{S} \end{aligned}$$

Postulate für den Grenzübergang  $\delta h \rightarrow 0$ :

- Die Felder und ihre zeitlichen Ableitungen seien endlich  
 $\int_{\delta V} d^3r \dot{u}_{em} \rightarrow 0$  und  $\int_{\text{Mantel}} d\mathbf{o} \cdot \mathbf{S} \rightarrow 0$  für  $\delta h \rightarrow 0$
- Die Tangentialkomponente von  $\mathbf{E}$  ist stetig.
- Oberflächenstrom entlang der Oberfläche ist möglich für spezielle Materialien, d.h.

$$\int_{\delta V} d^3r \mathbf{j}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{E} \xrightarrow{\delta h \rightarrow 0} \mathbf{E}^{\parallel} \cdot \int_A d\mathbf{o} \mathbf{j}^F$$

wobei  $A = A_1 = A_2$  für  $\delta h \rightarrow 0$  ist; typischerweise ist  $\mathbf{j}^F$  aber 0.

- $\Rightarrow \oint d\mathbf{o} \mathbf{S} \rightarrow \int_A d\mathbf{o} \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)})$

$$\mathbf{E}^{\parallel} \cdot \int_A d\mathbf{o} \mathbf{j}^F = \int_A d\mathbf{o} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)})$$

Da die kleine Fläche  $A$  beliebig ist, folgt:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)}) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}^F$$

d.h. die Normalkomponente von  $\mathbf{S}$  ist stetig. Falls  $\mathbf{j}^F$  zur Lösung der MAXWELL- und der Materialgleichungen nötig ist, macht sie einen Sprung um die JOULE'sche Wärme des Oberflächenstromes.

Bemerkung: Alternativer Beweis:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}^{(2)} \times \mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)} \times \mathbf{H}^{(1)}) = \mathbf{E}^{(2)} \cdot (\mathbf{H}^{(2)} \times \hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{E}^{(1)} \cdot (\mathbf{H}^{(1)} \times \hat{\mathbf{n}})$$

Da die Tangentialkomponente von  $\mathbf{E}$  stetig ist und die Klammer jeweils tangential zur Oberfläche ist, so gilt:

$$\mathbf{E}^{\parallel} \cdot (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) \times \hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{E}^{\parallel} \cdot \mathbf{j}^F$$

**Bemerkung:** Zeitlich gemittelter Energiefluss  $\langle \mathbf{S} \rangle$  monochromatischer Wellen, d.h.  $\mathbf{E}, \mathbf{B} \sim e^{i\omega t}$   
 Definition:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \} \times \operatorname{Re} \{ \mathbf{H} \}$$

mit  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  als Periode der monochromatischen Welle.

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{4T\mu_0} \int_0^T dt (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \times (\mathbf{B} + \mathbf{B}^*)$$

Da jeweils die reinen und die komplex-konjugierten Teile beim Integrieren 0 ergeben:

$$\int_0^T dt e^{2i\omega t} = (e^{2i\omega T} - 1) = 0$$

ergibt sich für den Energiefluss:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}^* \times \mathbf{B} \}$$

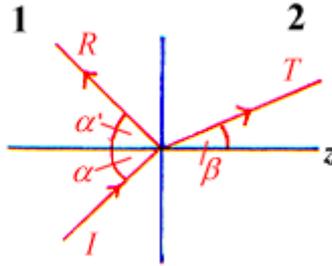
Für transversale ebene monochromatische Wellen mit  $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$  und  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = 0$  folgt weiterhin:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \operatorname{Re} \{ |\mathbf{E}|^2 \mathbf{k} \}$$

(selbst wenn  $\mathbf{k} \in \mathbb{C}$ )

### 1.5.3 Brechungs- und Reflexionsgesetze

Betrachten wir die Grenzfläche als eben:



Die einfallende Welle sei  $\mathbf{E}_I$ , sie habe die Phase  $\varphi_I$  und trete unter dem Winkel  $\alpha$  zum Lot ein. Die reflektierte Welle sei  $\mathbf{E}_R$ , und die transmittierte Welle sei  $\mathbf{E}_T$  mit der Phase  $\varphi_T$  und dem Winkel  $\beta$  zum Lot. Material 1 ( $z < 0$ ) sei o.B.d.A ein ideales Dielektrikum (z.B. Vakuum). Felder müssen in 1 und 2 MAXWELL-Gleichungen und Materialgleichungen erfüllen und Stetigkeitsbedingungen (1.5.1) bei  $z = 0$  genügen. Zur Vereinfachung ebene monochromatische Wellen mit den Phasen

$$\varphi_i = \omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} \quad \text{mit} \quad i = I, R, T$$

zu den Frequenzen  $\omega_i$  und den Wellenvektoren  $\mathbf{k}_i$

#### 1.5.3.1 Kinematische Einschränkungen

Wegen der Stetigkeitsbedingungen, die für alle  $t$  und alle  $x, y$  an der Grenzfläche gelten, müssen die Phasen bei  $z = 0$  bis auf eine additive Konstante übereinstimmen, welche in die Feldamplituden inkorporiert wird:

$$\boxed{\omega_I t - \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r}|_{z=0} = \omega_R t - \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r}|_{z=0} = \omega_T t - \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}|_{z=0}} \quad (*)$$

Diese Gleichung ist nur dann für alle  $t$  erfüllt, wenn gilt:

$$\omega_I = \omega_R = \omega_T = \omega$$

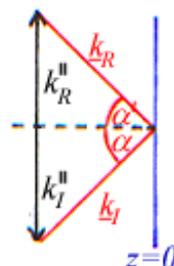
d.h. die Wellen haben alle die selbe Farbe. Brechungsindizes können definiert werden über

$$k_i(\omega) = \frac{\omega}{c} n_i(\omega)$$

- **A) Reflexion:**

Gleichung (\*) gilt nur dann für  $\forall \mathbf{r}|_{z=0} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$  falls  $\mathbf{k}_I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{k}_R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ , also die Parallelkomponenten müssen gleich sein:

$$\mathbf{k}_I^{\parallel} = \begin{pmatrix} k_{I,x}^{\parallel} \\ k_{I,y}^{\parallel} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{k}_R^{\parallel} = \begin{pmatrix} k_{R,x}^{\parallel} \\ k_{R,y}^{\parallel} \\ 0 \end{pmatrix}$$

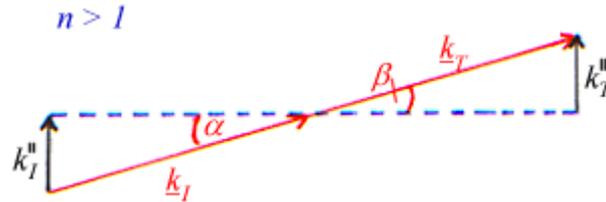


Mit den Winkeln  $k_I^{\parallel} = \sin \alpha k_I = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \alpha$  und  $k_R^{\parallel} = \sin \alpha' k_R = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \alpha'$  gilt:

$$\boxed{\sin \alpha = \sin \alpha'}$$

Der Einfallswinkel ist also immer gleich dem Ausfallswinkel. Bem.:  $\omega_I = \omega_R$  im Material 1 ging ein.

• **B) Brechung:**



Analog gilt die Gleichung (\*) nur dann für  $\forall \mathbf{r}$ , falls  $\mathbf{k}_I^{\parallel} = \mathbf{k}_T^{\parallel} = \begin{pmatrix} k_{T,x}^{\parallel} \\ k_{T,y}^{\parallel} \\ 0 \end{pmatrix}$ , also die Parallelkomponenten gleich sind. Falls Material 2 ein ideales isotropes Dielektrikum mit  $k_T = \frac{\omega}{c} n_2$  ist, so folgt das Brechungsgesetz von SNELLIUS

$$n_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta}$$

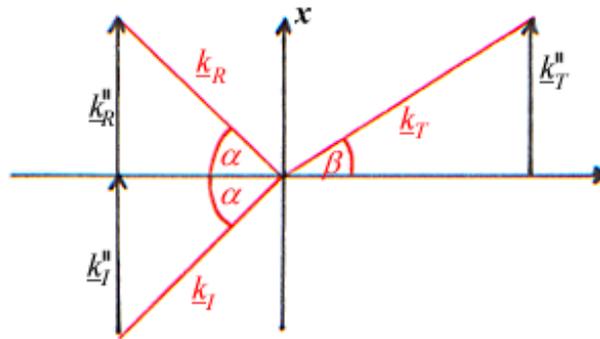
Mit dem relativen Brechungsindex  $n = \frac{n_2}{n_1}$  gilt also:

$$\sin \alpha = n \sin \beta$$

Für  $n > 1$  ergibt sich damit  $\beta < \alpha$ , die Brechung erfolgt zum Lot hin, für  $n < 1$  ist das Ganze umgekehrt.

• **C) Einfallsebene**

Wegen der Gleichung (\*) liegen  $\mathbf{k}_I$ ,  $\mathbf{k}_R$ , und  $\mathbf{k}_T$  in einer Ebene aufgespannt durch  $\mathbf{k}_I$  und  $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}}$ ; wählen wir das als x,z-Ebene, diese Ebene heißt *Einfallsebene*

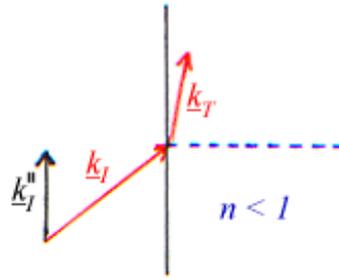


• **D) Grenzwinkel**

Grenzwinkel  $\alpha_r$  der Totalreflexion am optisch dünneren ( $n_2 < n_1$ ) Medium. Die Bedingung:  $\mathbf{k}_I^{\parallel} = \mathbf{k}_T^{\parallel}$  und  $\omega_I = \omega_T$  wobei  $\mathbf{k}_T = \mathbf{k}_T^{\parallel} + k_T^n \hat{\mathbf{n}}$  können für Medium 2 zu imaginären  $k_T^n = \frac{-i}{l}$  führen mit  $l \in \mathbb{R}$  als Eindringtiefe.

$$\begin{aligned} \frac{-1}{l^2} &= (k_T^n)^2 = \mathbf{k}_T^2 - \mathbf{k}_T^{\parallel 2} = \left(\frac{\omega}{l}\right)^2 n_2^2 - \mathbf{k}_I^{\parallel 2} \\ &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_2^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_1^2 \sin^2 \alpha = \mathbf{k}_I^2 \left( \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \alpha \right) \end{aligned}$$

Also für  $\frac{n_2}{n_1} < 1$  (d.h.  $n < 1$ ) gibt es einen Grenzwinkel der Totalreflexion  $\alpha_T = \arcsin n$ , so dass für  $\alpha > \alpha_T$  die  $z$ -Komponente  $k_T^n$  imaginär (nach SNELLIUS:  $\alpha_T \rightarrow \beta = 90^\circ$ , so dass  $\sin \beta = 1$ )



Die Felder fallen also exponentiell in Materie 2 ab

$$E_T, B_T \sim e^{-|k_T^n|z} \sim e^{-\frac{z}{\xi}}$$

(sog. inhomogene Wellen, evaneszente Felder)

mathematisch mögliche Lösung  $e^{\pm \frac{z}{\xi}}$  ist unphysikalisch weil  $E(z \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$   
 $\rightarrow$  transmittierte Energiestromdichte durch Grenzfläche

$$\langle \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_T \rangle \sim \text{Re} \left\{ \frac{1}{\omega} k_T^n \right\} \equiv 0$$

$\rightarrow$  gesamte eingestrahlte zeitlich gemittelte Energiedichte wird reflektiert (Totalreflexion) (Bew. Später)

### 1.5.3.2 Reflexions- und Transmissionskoeffizienten

Beschränkung auf den senkrechten Fall,  $\alpha = 0$ , alle  $k_i^{\parallel} = 0$   
 Dispersionsrelation in Medium 1:

$$\mathbf{k}_I = k_I \hat{\mathbf{n}} = k_1 \hat{\mathbf{n}} = \frac{\omega}{c} n_1 \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{k}_R = -k_R \hat{\mathbf{n}} = -k_1 \hat{\mathbf{n}} = -\frac{\omega}{c} n_1 \hat{\mathbf{n}} \quad \text{und} \quad \mathbf{k}_R = -\mathbf{k}_I$$

in Medium 2:

$$\mathbf{k}_T = k_T \hat{\mathbf{n}} = \frac{\omega}{c} n_2(\omega) \hat{\mathbf{n}} = k_2(\omega) \hat{\mathbf{n}}$$

Der Ansatz transversaler ebener monochromatischer Wellen sieht folgendermaßen aus:

$$z < 0 \quad \mathbf{E}(z, t) = e^{i\omega t} \cdot \left[ \begin{pmatrix} E_{I,x} \\ E_{I,y} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_1 z} + \begin{pmatrix} E_{R,x} \\ E_{R,y} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_1 z} \right]$$

Diese Superposition aus nach rechts einfallender und nach links reflektierter Welle erfüllt die MAXWELLgleichungen im Dielektrikum 1, wenn  $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$  und  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$  gilt:

$$z < 0 \quad \mathbf{B}(z, t) = \frac{n_1}{c} e^{i\omega t} \cdot \left[ \underbrace{\begin{pmatrix} -E_{I,y} \\ E_{I,x} \\ 0 \end{pmatrix}}_1 e^{-ik_1 z} + \underbrace{\begin{pmatrix} E_{R,y} \\ E_{R,x} \\ 0 \end{pmatrix}}_2 e^{ik_1 z} \right]$$

1: einfallende, nach rechts laufende Welle

2: reflektierte, nach links laufende Welle

Analog für  $z > 0$  soll nach rechts laufende transmittierte Welle existieren mit

$$\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k}(\omega) \times \mathbf{E})$$

Der Ansatz hier für lautet:

$$z < 0 \quad \mathbf{E}(z,t) = e^{i\omega t} \cdot \left[ \begin{pmatrix} E_{T,x} \\ E_{T,y} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_2 z} \right] \quad \text{sowie} \quad \mathbf{B}(z,t) = \frac{n_2(\omega)}{c} e^{i\omega t} \cdot \left[ \begin{pmatrix} -E_{T,y} \\ E_{T,x} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_2 z} \right]$$

Die Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche  $z = 0$  lauten:

- $\mathbf{D}_{normal}$  stetig  $\Rightarrow (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = 0)$
- $\mathbf{B}_{normal}$  stetig  $\Rightarrow (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0)$
- $\mathbf{E}_{tan}$  stetig  $\Rightarrow \boxed{\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R = \mathbf{E}_T}$
- $\mathbf{H}_{tan} \sim \mathbf{B}_{tan}$  stetig  $\Rightarrow \boxed{n_1(\mathbf{E}_I - \mathbf{E}_R) = n_2 \mathbf{E}_T}$

Daraus folgen die Amplitudenfunktionen:

- Reflexionsamplitude:

$$\boxed{R = \frac{E_R}{E_I} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - n}{1 + n}}$$

- Transmissionsamplitude:

$$\boxed{T = \frac{E_T}{E_I} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2}{1 + n}}$$

Für die gemittelten Energieströme gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_I \rangle &= \frac{\varepsilon_0 \omega c}{2} \cdot |\mathbf{E}_I|^2 n_1 \hat{\mathbf{n}} \\ \langle \mathbf{S}_R \rangle &= -\frac{\varepsilon_0 \omega c}{2} \cdot |\mathbf{E}_I|^2 |R|^2 n_1 \hat{\mathbf{n}} \\ \langle \mathbf{S}_T \rangle &= \frac{\varepsilon_0 \omega c}{2} \cdot |\mathbf{E}_I|^2 \operatorname{Re}\{n_2\} |T|^2 \hat{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für deren Koeffizienten:

- Reflexionskoeffizient:

$$\boxed{r = \frac{\langle \mathbf{S}_R \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle}{\langle \mathbf{S}_I \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle} = |R|^2} \quad (1.21a)$$

- Transmissionskoeffizient:

$$\boxed{t = \frac{\langle \mathbf{S}_T \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle}{\langle \mathbf{S}_I \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle} = |T|^2 \cdot \frac{\operatorname{Re}\{n_2\}}{n_1}} \text{ „} = \text{“ } |T|^2 n \quad (1.21b)$$

dabei gilt das letzte Gleichheitszeichen für  $n_2 \in \mathbb{R}$

Reflexions- und Transmissionskoeffizient  $r, t$  messen Verhältnis der reflektierten und transmittierten Intensitäten. Da für  $j^F = 0$ ,  $\mathbf{S}$  stetig ist (Erhalt des Energieflusses), gilt immer

$$\boxed{r + t = 1}$$

Ist das Material 2 ideales Dielektrikum (d.h.  $n \in \mathbb{R}$ ), ergibt sich:

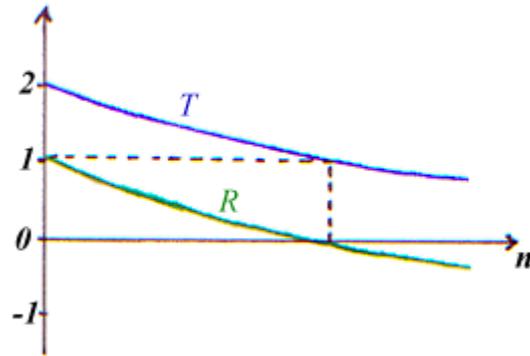
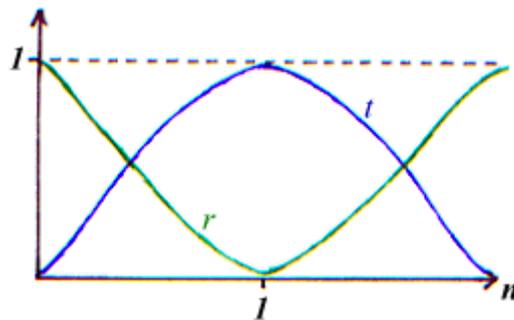


Abbildung 1.10: Phasensprung ( $R < 0$ ) für Reflexion am optisch dichteren Medium ( $n > 1$ )



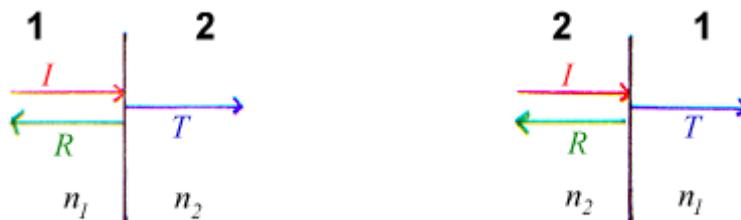
Beispiel:

$$\begin{array}{l} \text{Luft-Gas} \quad n \approx 1,5 \quad \Rightarrow \quad r \approx 4\% \\ \text{Luft-Wasser} \quad n \approx 1,33 \quad \Rightarrow \quad r \approx 2\% \end{array}$$

geringe Reflexion

**Bemerkung:**

Für den umgekehrten Fall:



Mit vertauschten Rollen der Materialien gilt:

$$\begin{aligned} R' &= \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} = R \\ T' &= \frac{2n_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_2}{n_1} T \\ \Rightarrow r' &= |R'|^2 = |R|^2 = r \\ \Rightarrow t' &= \frac{n_1}{n_2} |T'|^2 = \frac{n_2}{n_1} |T|^2 = t \end{aligned}$$

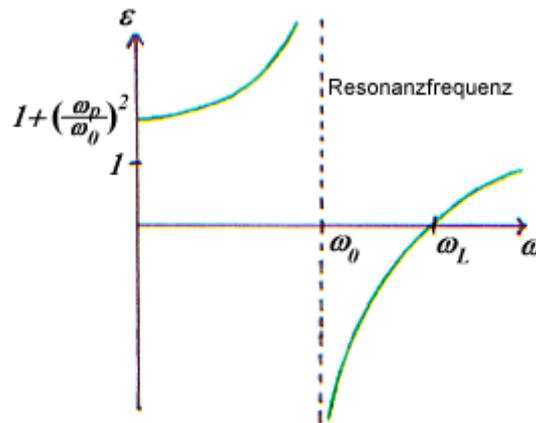
$r$  und  $t$  gelten also unabhängig von der Richtung für den Durchgang durch die Grenzfläche. Es gelten die selben  $r$ ,  $t$  für Intensitäten (Reziprozität).

**Hinweis:** Beim späteren Experimentaltail ändert sich die Notation zu  $r, t \rightarrow R, T!$

### 1.5.3.3 Reststrahlreflexion

Material 2 sei polarisiertes Dielektrikum:

$$\text{d.h. } n(\omega) = \frac{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}{n_1}$$



$$\varepsilon(\omega) = \frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\omega_L^2 = \omega_P^2 + \omega_0^2$$

siehe LORENZ-Atom ohne Dämpfung. ZUR Vereinfachung:  $n_1 = 1$

Rechnung wie in (1.5.3.2),  $\alpha = 0$  gibt die Reflexionsamplitude

$$R(\omega) = \frac{1 - n(\omega)}{1 + n(\omega)}$$

da nur die Dispersionsrelation  $k_1(\omega) = \frac{\omega}{c} n_2(\omega)$  geändert wird Für  $\omega < \omega_0$  und  $\omega > \omega_L$  findet man

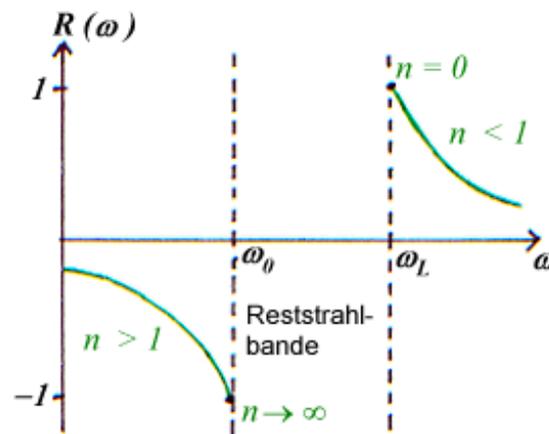


Abbildung 1.11: Reststrahlreflexion

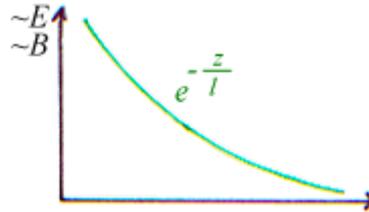
bekanntes. Aber für  $\omega_0 < \omega < \omega_L$  gilt:

$$\Rightarrow n(\omega) = -ik(\omega) = -i\sqrt{\frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

woraus folgt:

$$\mathbf{E}(z > 0) = e^{i\omega t} T \begin{pmatrix} E_{Tx} \\ E_{Ty} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{\omega}{c} k z}$$

genauso  $B \sim e^{-\frac{\omega}{c} k z}$



$$l = \frac{c}{\omega k} \in \mathbb{R} \quad \text{Eindringtiefe}$$

Es handelt sich wieder um „inhomogene Wellen“ ( $n = ik$  ist wieder unphysikalisch, da  $E(z \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$  folgte).

Der zeitlich gemittelte Energiestrom  $\langle \mathbf{S}_T \rangle$  verschwindet in Material 2

$$\langle \mathbf{S}_T \rangle \sim \text{Re} \left\{ \frac{1}{\omega} k_2 = \frac{1}{c} n_2 \right\} = 0$$

$R$  beschreibt Totalreflexion

$$R = \frac{1 + ik}{1 - ik} = e^{i\gamma(\omega)} \quad \text{mit} \quad \tan \frac{\gamma}{2} = k(\omega) \quad \text{und} \quad r = |R|^2 = 1$$

Die gesamte Energie wird reflektiert. Bemerkung: Reststrahlmethode von RUBENS um mit Reflexion

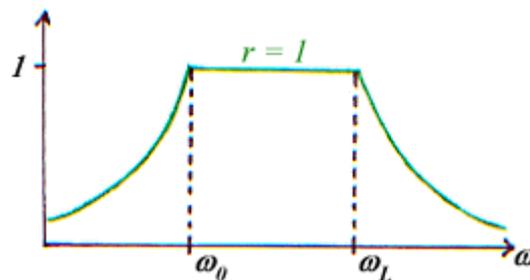


Abbildung 1.12: „Reststrahlbande“, in der keine propagierenden elektromagnetischen Wellen in Material 2 gibt.

monochromatisches Licht zu erzeugen.

#### 1.5.3.4 Metallreflexion

Material 2 sei nun ein OHM'sches Metall. Wir brauchen, wie sich elektromagnetische Felder im OHM'schen Leiter verhalten.

**A) Elektromagnetische Felder in ohmschen Metallen:** Es gelten die Materialgleichungen für den internen Leitungsstrom  $\mathbf{j}^{\text{int.}} = \sigma \mathbf{E}$  und  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E}$ , welche aus den gebundenen Ladungen resultiert. Betrachten wir die monochromatischen Felder  $\mathbf{E}, \mathbf{B} \sim e^{i\omega t}$ :

$$\Rightarrow \mathbf{D} = \left( \varepsilon_0 - i \frac{\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}$$

**Satz:** Im OHM'schen Metall (Leiter) genügen die elektromagnetischen Felder für  $\omega \neq 0$  denselben Gleichungen wie im Dielektrikum, mit der Dielektrizitätskonstante:

$$\boxed{\varepsilon(\omega) = 1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}}$$

Es gibt transversale, ebene monochromatische inhomogene (räumlich gedämpfte) Wellen mit Dispersionsrelation  $k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \in \mathbb{C}$ !  
 Beweis siehe Afg. 11 (Telegraphengleichung)

**B) Wellendämpfung** Zur Vereinfachung betrachten wir einen guten OHM'schen Leiter, d.h.  $|\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}| \gg 1$ . Für diesen Fall gilt:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \doteq \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}} \cdot \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\delta(\omega)}$$

$$(1-i)^2 = 1 + i^2 - 2i = -2i \quad \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

mit der Skinlänge  $\delta$  (Eindringtiefe):

$$\delta(\omega) = c \sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{\sigma \omega}} = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \omega}{\sigma}} \ll \lambda$$

Felder variieren gemäß  $E \propto e^{ikz} \propto e^{-\frac{iz}{\delta}} e^{-\frac{z}{\delta}}$ .

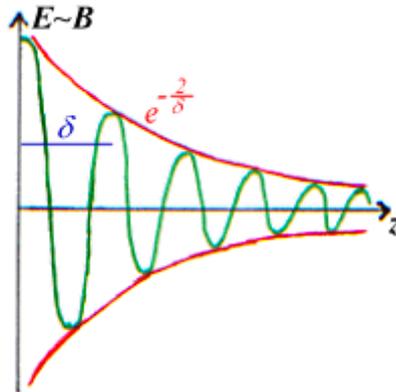


Abbildung 1.13: zur Skinlänge: exponentiell gedämpfte oszillierende, inhomogene Welle

Stoff	$\delta(\omega)$	bei Frequenz $\nu$
Salzwasser	1m	$3 \cdot 10^4$ Hz
Ag	$10^{-6}$ m	$10^8$ Hz (Mikrowelle)

In einem guten OHM'schen Leiter fallen die Felder schnell in der Nähe der Oberfläche ab; im Metall (für  $z \gg \delta$ ) gilt  $E \equiv 0$  bis auf eine „Haut“ (Skin) der Dicke  $\delta$  an der Oberfläche des Leiters (*Skinneffekt*).

**Bemerkung:** Siehe Drude/Modell (1.3.5 und Aufgabe 8), dass für  $\omega > \omega_p$  also  $\sigma = -i\omega \frac{\omega_p^2}{\omega}$  gilt und Metall durchsichtig wird (d.h. propagierende transversale elektromagnetische Welle)

**C) Reflexion am Metallspiegel:** Wegen den Betrachtungen zu elektromagnetischen Wellen in guten OHM'schen Leitern (A) gilt für ein solches Metall (Material 2) mit der Rechnung aus (1.5.3.2):

$$R = \frac{1 - n(\omega)}{1 + n(\omega)} \doteq \text{Taylor in } \frac{\delta}{\lambda_1} = -1 + 2\pi \frac{\delta}{\lambda_1} (1 + i)$$

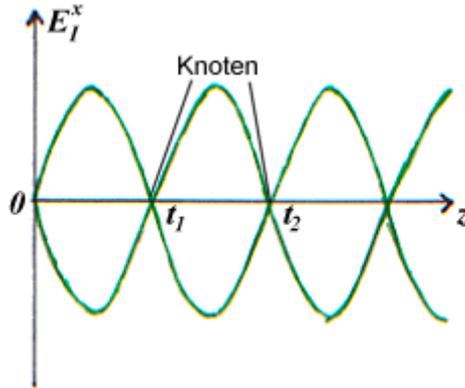
mit

$$n(\omega) \approx \frac{c}{\omega N_1} \frac{1-i}{\delta(\omega)} = \frac{\lambda_1}{\delta} \frac{1-i}{2\pi}$$

$\lambda_1 = \frac{\lambda}{n_1}$ : Wellenlänge in Material  $i$  für ein gutes Metall wurde verwendet  $|\sigma| \gg \omega \varepsilon_0$ .

Bei  $z = 0$  heben sich die einfallende und die reflektierte Welle also (fast) auf, und (fast) alle Energie wird reflektiert:

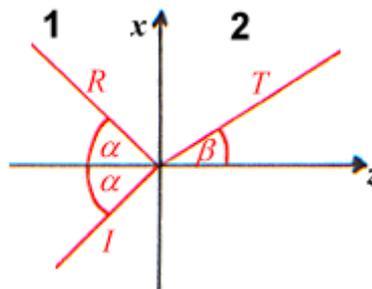
$$r \doteq 1 - 4\pi \frac{\delta}{\lambda} = 1 - 2n_1 \sqrt{\frac{2\sigma\omega}{\varepsilon_0}} \sim 1 - \sqrt{\sigma\omega} \quad \text{für } \omega \rightarrow 0$$



Es entsteht vor dem Spiegel eine *stehende Welle* mit räumlich festen Orten der Knoten und Bäuche (für  $R = -1$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_I &= E_I^x \cdot e^{i(\omega t - k_1 z)} \mathbf{e}_x & E_I^x &\in \mathbb{R} \text{ o.B.d.A.} \\ \mathbf{E}_R &= R E_I^x \cdot e^{i(\omega t + k_1 z)} \mathbf{e}_x \\ \Rightarrow \mathbf{E}(z < 0) &= \text{Re} \{ \mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R \} = \underbrace{E_I^x}_{\in \mathbb{R}} \Re e^{i\omega t} (e^{-ik_1 z} - e^{ik_1 z}) \mathbf{e}_x \\ &= -2E_I^x \mathbf{e}_x \sin(k_1 z) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

### 1.5.3.5 Fresnel'sche Formeln



Im Folgenden wollen wir den Fall allgemeiner Einfallrichtung mit  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  speziell für ein ideales Dielektrikum als Material 2 betrachten. Die Betrachtungen sind allerdings verallgemeinerbar auf  $n(\omega)$ . Wir definieren  $n := \frac{n_2}{n_1} = \text{const.} \in \mathbb{R}$ .

Man definiert für  $n_2 > n_1$  Material 2 als **optisch dichter** für  $n_2 < n_1$  als **optisch dünner** als Material 1.

Da die einfallende (transversale monochromatische) Welle als Superposition zweier linear polarisierter (transversaler) Wellen gesehen werden kann gilt:

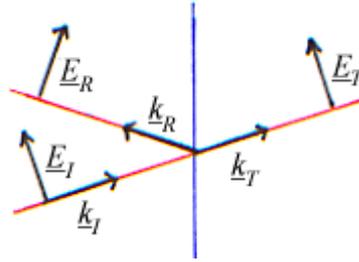
Die Bedingung der Transversalität  $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{E}_I = 0$  ergibt zwei Forderungen/Fälle:

A)  $\mathbf{E}_I$  ist senkrecht zur Einfallsebene:

$$\mathbf{E}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ E_I^y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{i\omega t - ik_1^{\parallel} x - ik_1^{\perp} z}$$

$$E^y \neq 0 \quad E^z = E^x = 0$$

B)  $\mathbf{E}_I$  ist in der Einfallsebene polarisiert:



$$\mathbf{E}_I = \begin{pmatrix} E_I^x \\ 0 \\ E_I^z \end{pmatrix} \cdot e^{i\omega t - ik_1^{\parallel} x - ik_1^{\perp} z}$$

$$E^y = 0 \quad k_1^{\parallel} E^x + k_1^{\perp} E^z = 0$$

Mit der Dispersionsrelation:  $k_1 = \frac{\omega}{c} n_1 = \sqrt{(k_1^{\parallel})^2 + (k_1^{\perp})^2}$

mit  $k_1^{\parallel} = k_1 \sin \alpha$ ,  $k_1 = \frac{\omega}{c} n_1$ ,  $k_1^{\perp} = k_1 \cos \alpha$

**Behauptung:** Die beiden Fälle sind entkoppelt.

Ein Beweis für diese Behauptung ist in der Aufgabe 15. Hier soll mit dem zweiten Fall fortgefahren werden. Dazu verwenden wir die Symbole  $R_{\parallel}$  und  $T_{\parallel}$  weil  $\mathbf{E}$  parallel zur Einfallsebene ist.

Der folgende Ansatz verwendet einen Polarisationsvektor der Länge  $E_I$ . Um sicher zu gehen, dass die Welle transversal ist, wird ein Vektor der Form  $\begin{pmatrix} k_1^{\perp} \\ 0 \\ -k_1^{\parallel} \end{pmatrix}$  dazu multipliziert, damit sich die Länge aber nicht ändert muss durch den Betrag des Vektors  $(\frac{\omega n_1}{c})$  geteilt werden:

$$z < 0 \quad \mathbf{E} = E_I \begin{pmatrix} k_1^{\perp} \\ 0 \\ -k_1^{\parallel} \end{pmatrix} \frac{c}{\omega n_1} \cdot e^{i(\omega t - k_1^{\parallel} x - k_1^{\perp} z)} + E_R \begin{pmatrix} k_1^{\perp} \\ 0 \\ k_1^{\parallel} \end{pmatrix} \frac{c}{\omega n_1} \cdot e^{i(\omega t - k_1^{\parallel} x + k_1^{\perp} z)}$$

$$z > 0 \quad \mathbf{E} = E_T \begin{pmatrix} k_2^{\perp} \\ 0 \\ -k_2^{\parallel} \end{pmatrix} \frac{c}{\omega n_2} \cdot e^{i(\omega t - k_2^{\parallel} x - k_2^{\perp} z)}$$

Bei der Wahl der richtigen Vorzeichen vor  $k_1$  muss man auf die Ausbreitungsrichtung der jeweiligen Welle achten, die bei einfallender und reflektierter Welle genau entgegengesetzt ist.

Über  $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$  erhält man das  $B$ -Feld:

$$z < 0 \quad \mathbf{B} = \frac{E_I n_1}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{\parallel} x - k_1^{\perp} z)} + \frac{E_R n_1}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{\parallel} x + k_1^{\perp} z)}$$

$$z > 0 \quad \mathbf{B} = \frac{E_T n_2}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_2^{\parallel} x - k_2^{\perp} z)}$$

Dieser Ansatz löst die MAXWELLgleichungen in Material 1 und 2 bei  $z = 0$ .

Als nächstes müssen wir uns die Stetigkeitsbedingungen anschauen:

Die Normalkomponente des Magnetfeldes ( $B^z$ ) soll stetig sein, und ist es auch, da sie sowohl für  $z < 0$  als auch für  $z > 0$  Null ist. Die Bedingung, dass die Tangentialkomponente des Magnetfeldes stetig ist, ist äquivalent zu der Bedingung, dass die Normalkomponente von  $\mathbf{D}$ , d.h.  $(n_i^2 E^z)$  stetig ist. Außerdem soll die Tangentialkomponente des E-Feldes ( $E^z$ ) stetig sein. Damit erhält man die beiden Bedingungen:

$$n_1(E_I - E_R) = n_2 E_T$$

$$\frac{k_1^{\perp}}{n_1} (E_I + E_R) = \frac{k_2^{\perp}}{n_2} E_T$$

Verwendet man weiter das SNELLIUS'sche Brechungsgesetz  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$  sowie Additionstheoreme für Sinus und Kosinus, so erhält man die **Fresnel'schen Formeln**:

$$R_{\parallel} = \frac{E_R}{E_I} = \frac{k_2^{\perp}/n_2^2 - k_1^{\perp}/n_1^2}{k_2^{\perp}/n_2^2 + k_1^{\perp}/n_1^2} = \frac{\tan(\beta - \alpha)}{\tan(\beta + \alpha)}$$

$$T_{\parallel} = \frac{E_T}{E_I} = \frac{2k_1^{\perp}/(n_1 n_2)}{k_2^{\perp}/n_2^2 + k_1^{\perp}/n_1^2} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\beta - \alpha)}$$

**Bemerkungen:**

- Für  $\alpha \rightarrow 0$  und damit auch  $\beta \rightarrow 0$  folgt der in (1.5.3.2) behandelte Fall ( $k_1^{\perp} \rightarrow k_i = \frac{\omega}{c} n_i$ ).
- Für  $n_2 > n_1$  ( $n > 1$ ) folgt für  $\alpha \rightarrow 90^\circ$ :

$$k_1^{\perp} \rightarrow 0 \quad \text{aber: } \sin \beta = \frac{1}{n} < 1 \quad \Rightarrow k_2^{\perp} \neq 0 \quad \text{IST MÖGLICH}$$

Bei streifendem Einfall liegt also vollständige Reflexion mit  $R_{\parallel}(\alpha \rightarrow 90^\circ) \rightarrow 1$  und  $T_{\parallel}(\alpha \rightarrow 90^\circ) \rightarrow 0$  vor. In der Natur kann man dies z.B. beim Spiegelbild im See etc. beobachten.

- Der Energiestrom durch die Grenzfläche ist stetig:

$$1 = r + t = n|T|^2 + |R|^2$$

- Für  $n_2 > n_1$  ( $n < 1$ ) gibt es einen Grenzwinkel  $\alpha_T < 90^\circ$  der **totalen Reflexion** am optisch dünneren Medium. Aus der kinematischen Bedingung:

$$\mathbf{k}_I^{\parallel} = \mathbf{k}_T^{\parallel} \quad \text{und} \quad \omega_I = \omega_t$$

folgt:

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}_T^{\perp})^2 &= (\mathbf{k}_I^{\perp})^2 - (\mathbf{k}_I^{\parallel})^2 \\ &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_1^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 k_1^2 \sin^2 \alpha \\ &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_1^2 (n^2 - \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

Also:

$$\boxed{\sin \alpha_T = n < 1}$$

Für  $\alpha \geq \alpha_T$  erfolgt **Totalreflexion**, weil dort  $k_T^{\perp} = -i\kappa$  ( $\frac{\omega}{c}$ ) imaginär ist. Die Welle ist exponentiell gedämpft im Material 2.

- **Brewster-Winkel:** Ist die Richtung der reflektierten Welle gleich der Richtung von  $\mathbf{E}_T \propto \mathbf{d}$  (mit  $\mathbf{d}$  der Dipolachse der schwingenden und strahlenden Atome in Material 2), dann ist  $R_{\parallel} = 0$ , weil die Dipole nicht entlang ihrer Achse strahlen.

Für den BREWSTER-winkel  $\alpha = \alpha_B$  gilt  $\boxed{\alpha_B + \beta = \frac{\pi}{2}}$ . Dann steht  $\mathbf{k}_R \perp \mathbf{k}_T$  und die von  $\mathbf{E}_T \parallel \mathbf{k}_R$  angeregten Atome machen im Material 2 eine Dipolstrahlung, die parallel zu  $\mathbf{E}$ , d.h. in die nach SNELLIUS reflektierte Richtung, verschwindet.

Wenn  $\alpha_B + \beta = \frac{\pi}{2}$  ist, dann gilt  $R_{\parallel} = \frac{\tan(\beta - \alpha)}{\tan(\frac{\pi}{2})} = 0$ .

Aus SNELLIUS folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sin \alpha_B &= \sin \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_B\right) = \cos \alpha_B \\ &\Rightarrow \tan \alpha_B = n \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

- Für die Grenzfläche Wasser/Luft ( $N = \frac{4}{3}$ ) ist der BREWSTER-winkel  $\alpha_B \approx 53^\circ$ .
- Bei Reflexion unter dem Brewsterwinkel ist das Licht vollständig linear polarisiert.

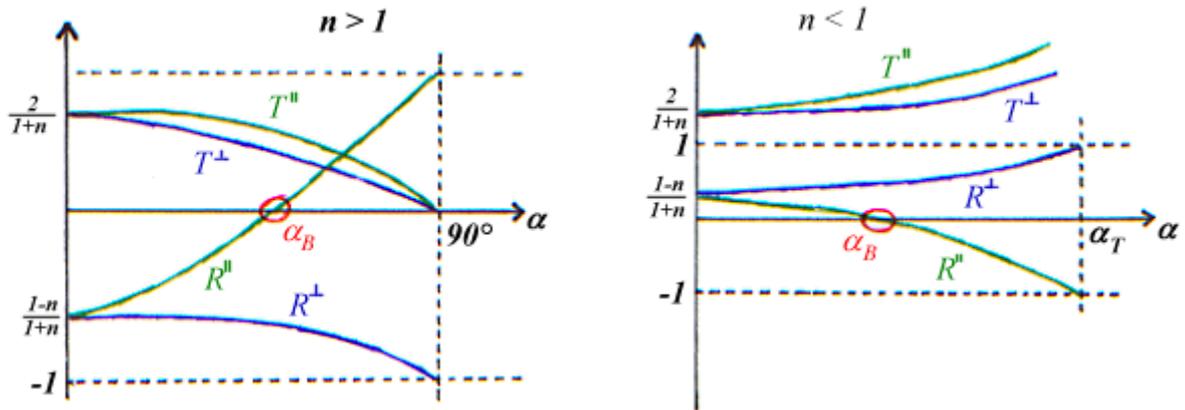


Abbildung 1.14: Veranschaulichung: (Falls  $R < 0$  ist, macht die Welle einen Phasensprung um  $\pi$  bei Reflexion am optisch dichteren Medium)

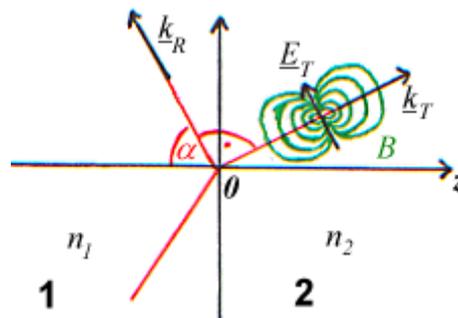


Abbildung 1.15: Brewsterwinkel

## 1.6 Geometrische Optik

### 1.6.1 Begriffe

MAXWELLeichungen und Materialgleichungen für makroskopische Abbildungen zweckmäßig  
 MAXWELLeichung + Randbedingung  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$

Problem: Ortsauflösung  $\sim \lambda \sim 500\text{nm} \rightarrow 10^{14}$  Punkte  $\Rightarrow$  der Ansatz wäre zu naiv!

Näherungen der geometrischen Optik

- Vernachlässigung des Wellencharakters  
 „geometrische Optik“ =  $\lim_{\lambda \rightarrow 0}$  (MAXWELLeichungen)  
 gültig nur, falls alle Dimensionen im Exponent  $\gg \lambda$
- Beschreibung der Lichtausbreitung mit Strahlen

$\rightarrow$  Strahl: geometrische Pfad (Richtung) des Energieflusses, damit parallel zu  $\mathbf{S}$   
 Wellen  $\rightarrow$  Strahlbüschel  
 Strahlenbündel:

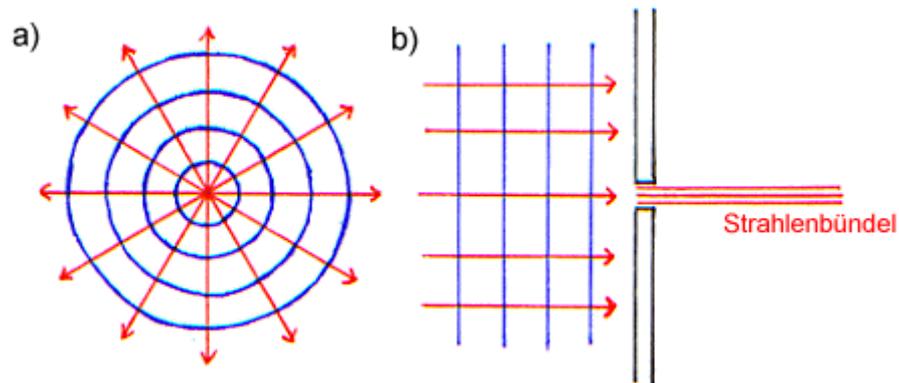
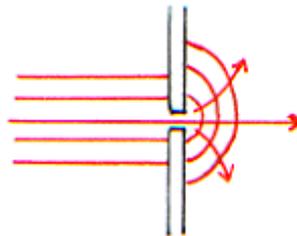


Abbildung 1.16: a) Kugelwelle  $\rightarrow$  divergente Strahlen b) ebene Wellen  $\rightarrow$  koluminierte Strahlen, zusammengefasst zu einem Strahlenbündel nach der Blende

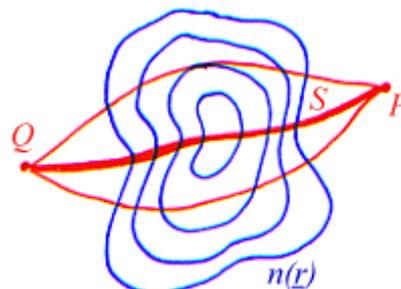


- endlichen Querschnitt ( $D \gg \lambda$ )
- Intensität  $I = \langle \mathbf{S} \rangle$
- Geschwindigkeit  $c = \frac{c_0}{n}$
- Polarisation (n (Polar))
- Frequenz ( $n(\omega)$ )

#### Axiome der geometrischen Optik

- homogene Dielektrika: geradlinie Lichtausbreitung
- Grenzfläche: Reflexions/ und Brechnugsgesetz
- allgemein  $n(\mathbf{r})$ ?;  $n \in \mathbb{R}^+$

#### 1.6.2 Fermat'sches Prinzip



Licht folgt dem Pfad  $S$ , für den der optische Weg  $W(S) = \int_S n(\mathbf{r})$  extremal wird.

$$\frac{\partial W}{\partial S} = 0$$

Bemerkung:  $W$  kann max oder min;

$$t = \frac{s}{c} = \frac{ns}{c_0}$$

Begründung aus Maxwellgleichungen

- $\mathbf{E}(\mathbf{r}_p)$  bei  $P$  durch phasenrichtige Summation aller Wellen aus  $Q$  über alle möglichen Pfade  $S_i$
- konstruktive Interferenz falls

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial S} = 0$$

Bemerkungen

- ist in  $W$  min („Prinzip der kürzesten Zeit“)

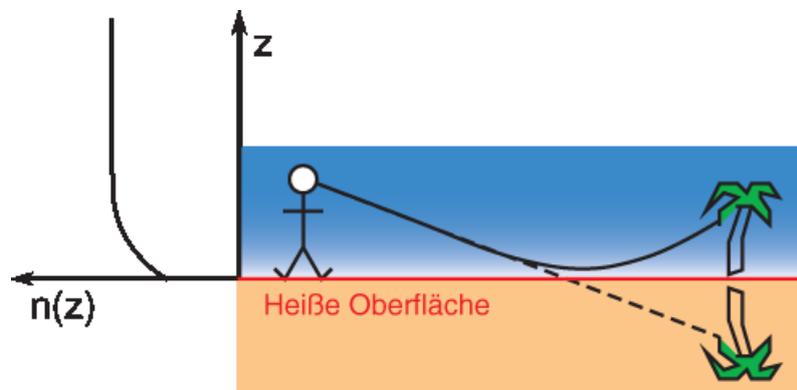


Abbildung 1.17: Fata Morgana: Über einer heißen Oberfläche wird die Luft erwärmt. Dies führt zu einer Abnahme des Brechungsindex  $n(z)$  direkt über der Oberfläche (siehe linker Bildteil). Durch diesen Brechungsindexverlauf kommt es zu gekrümmten Lichtstrahlen. (aus [Zth] S. 74)

- Spezialfälle: geradlinige Lichtausbreitung in homogenen Medien
- Reflexionsgesetz

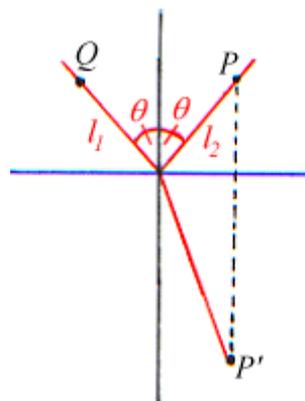


Abbildung 1.18: Reflexionsgesetz

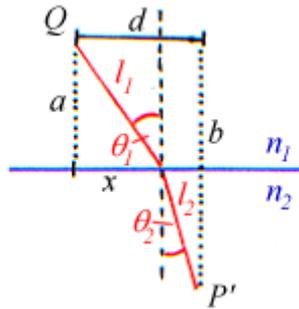


Abbildung 1.19: Brechungsgesetz

- Brechungsindex

$$W = n_1 l_1 + n_2 l_2 \stackrel{!}{=} \text{extremal}$$

$$\frac{dW}{dx} = n_1 \frac{dl_1}{dx} + n_2 \frac{dl_2}{dx} = 0$$

$$l_1 = \sqrt{a^2 + x^2} \quad l_2 = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dl_1}{dx} = \frac{x}{l_1} = \sin \theta_1 \\ \frac{dl_2}{dx} = -\frac{x}{l_2} = -\sin \theta_2 \end{array} \right\} \Rightarrow n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

### 1.6.3 Strahlablenkung durch ein Prisma

gesucht  $\delta(\alpha, \gamma)$

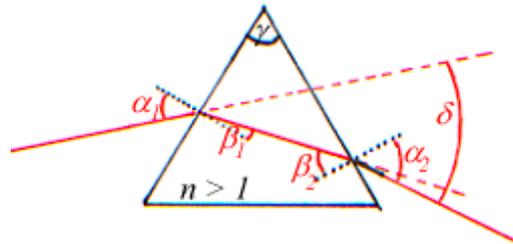


Abbildung 1.20: Strahlablenkung durch ein Prisma

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$$

$$\gamma = 180^\circ - (90^\circ - \beta_1 - (90^\circ - \beta_2))$$

$$= \beta_1 + \beta_2$$

$$\delta = \alpha_1 - \gamma + \alpha_2$$

$$\delta = \alpha_1 - \gamma + \underbrace{\arcsin \left[ n \sin \left( \gamma - \arcsin \left( \frac{\sin \alpha_1}{n} \right) \right) \right]}_{\alpha_2}$$

- $\delta$  abhängig vom Brechungsindex  $n(\lambda)$
- räumliche Aufspaltung spektraler Komponenten

- Verwendung in Spektrometern  $\delta$  minimal für symmetrische Durchstrahlung  $\alpha_1 = \alpha_2$

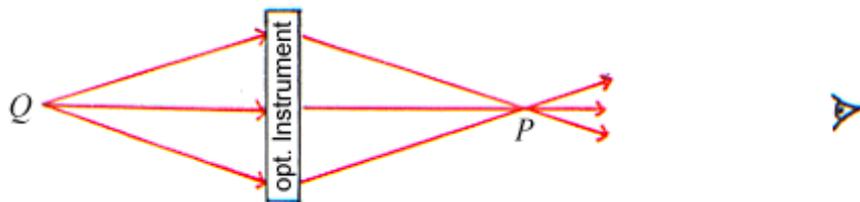
$$\sin\left(\frac{\delta_{\min} + \gamma}{2}\right) = n \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

### 1.6.4 Optische Abbildungen

Ziel: Jedem Objektpunkt  $Q$  wird genau ein Bildpunkt  $P$  zugeordnet (geradlinientreu)

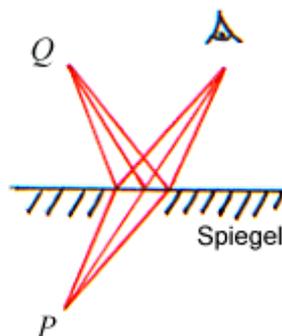
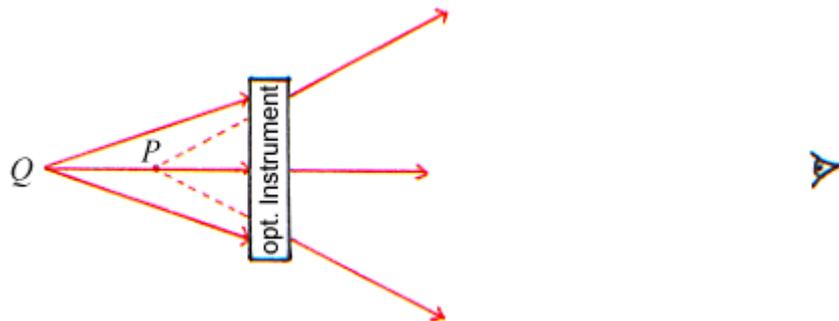
2 Klassen:

Reelle Abbildung: Strahlen aus  $Q$  schneiden sich in  $P$



virtuelles Abbildung:

Strahlen verlaufen so, als würden sie sich in  $P$  schneiden, tun dies aber nicht.



#### 1.6.4.1 Abbildung an einem sphärischen Hohlspiegel

$$\theta = \beta - \alpha = \alpha - \gamma$$

Betrachte nur achsnennahe Lichtstrahlen (paraxiale Näherung)

$$\gamma \approx \tan \gamma \approx \frac{h}{g}, \quad \alpha = \frac{h}{r}, \quad \beta = \frac{h}{b}$$

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} =: \frac{1}{f}$$

Abbildung gleich für sphärischen Spiegel

- $f$  heißt Brennweite  $f = \frac{r}{2}$
- Abbildungsgleichung gilt auch für einen konvexen Spiegel
- Abbildung nur in paraxialer Näherung (sonst Abbildungsfehler)

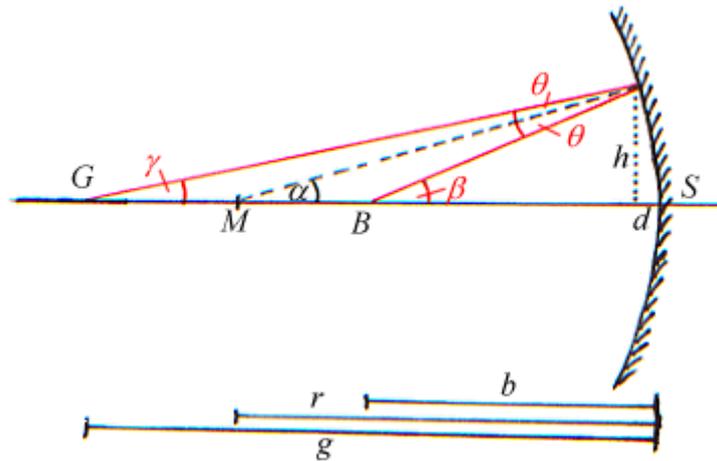


Abbildung 1.21: Abbildung an einem sphärischen Spiegel

#### 1.6.4.2 Abbildung durch eine brechende Kugelfläche

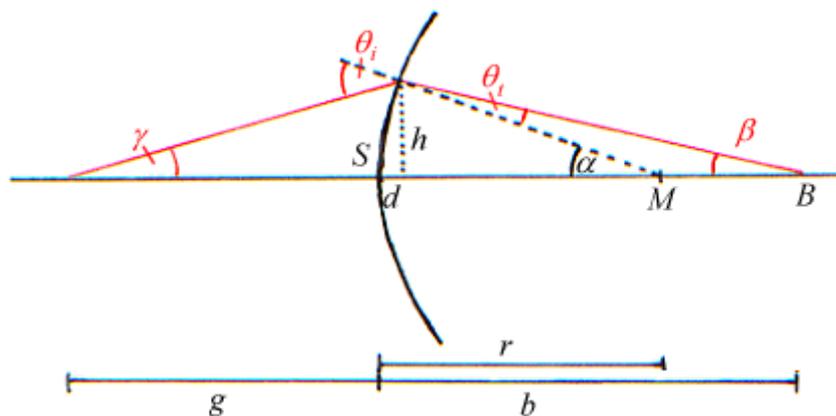


Abbildung 1.22: Abbildung durch eine brechende Kugelfläche

$\theta_i = \gamma + \alpha$ ,  $\theta_r = \alpha - \beta$  paraxiale Näherung

$$\begin{aligned} n_1 \sin \theta_i &= n_2 \sin \theta_r \\ n_1 \theta_i &= n_2 \theta_r \\ n_1 \theta_i &= n_1 \left( \frac{h}{g} + \frac{h}{r} \right) \\ &= n_2 \left( \frac{h}{r} - \frac{h}{b} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}}$$

Abbildung einer brechenden Kugelfläche

- 2 Brennweiten:  
paralleles Licht "von links":  $g \rightarrow \infty$   $b = f_B = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}$   
paralleles Licht "von rechts"  $b \rightarrow \infty$   $g = f_G = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}$

- Schrittweise Anwendung erlaubt Berechnung komplizierter optischer Systeme; Vorzeichenkonvention!

Variable	> 0	< 0
$g$	$G$ links von $S$	Gegenteil
$f_G$	$F_G$ links	
$b$	$B$ rechts	
$f_B$	$F_B$ rechts	
$r$	$M$ rechts	

### 1.6.4.3 Abbildungsgleichung für dünne Linse

Abstand  $d$  der Scheitelpunkte  $\ll$  Krümmungsradien  $r_i$  ( $d \approx 0$ )

$$1. \text{ Grenzfläche: } \frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b_1} = \frac{n_2 - n_1}{r_1}$$

$$2. \text{ Grenzfläche: } g_2 = -b_1$$

$$-\frac{n_2}{b_1} + \frac{n_3}{b} = \frac{n_3 - n_2}{r_2}$$

$$n_1 = n_3 \approx 1, \quad n = n_2$$

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) =: \frac{1}{f}$$

gleiche Brennweite  $f = f_G = f_B$

GAUSS'sche Linsenformel, oder auch „Linsenschleiferformel“

$$\frac{1}{f} = \text{Breckkraft}$$

$$\left[ \frac{1}{f} \right] = 1 \text{dpt} = \frac{1}{m}$$

### 1.6.4.4 Bildkonstruktion für ausgedehnten Gegenstand

Bsp.: Sammellinse

Betrachte 3 ausgewählte Strahlen:

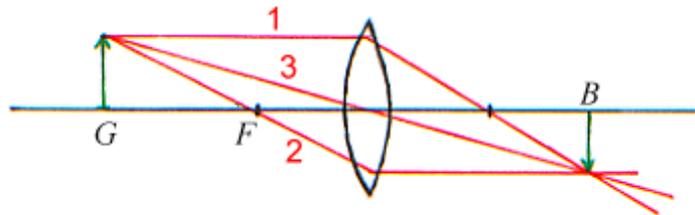


Abbildung 1.23: Bildkonstruktion eines ausgedehnten Körpers durch eine dünne Sammellinse

1. achsenparallel  $\rightarrow F_B$ ,
2. Brechstrahl  $\rightarrow ||$ ,
3. Zentralstrahl

(Transversale) Vergrößerung

$$V = \frac{\bar{B}}{\bar{G}} = -\frac{b}{g} = \frac{f}{f - g}$$

Analoges Vorgehen für Zerstreuungslinsen ( $f < 0$ ), Spiegel oder nbrechende Grenzflächen

### 1.6.4.5 Dicke Linsen und Linsensysteme

**a) Dicke Linsen:** Abstand  $d$  der Scheitelpunkte nicht mehr vernachlässigbar gegenüber  $r, g, b$

Abbildung ähnlich beschreibbar, wie für dünne Linsen

→ Führe 2 Hauptebenen ( $H_1$  und  $H_2$ ) senkrecht zur optischen Achse ein

Es gibt die Abbildungsgleichung:  $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

wobei  $g$  (bzw.  $b$  und  $f$ ) gegenüber den Hauptebenen  $H_1$  und  $H_2$  gemessen werden  $f = f_B = f_G$ , falls gleicher Brechungsindex.

Bildkonstruktion analog zu dünnen Linsen; Lichtstrahlen parallel zur optischen Achse zwischen  $H_1$  und

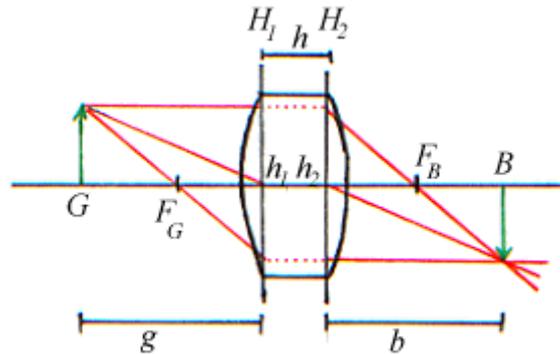


Abbildung 1.24: Bildkonstruktion eines ausgedehnten Körpers an einer dicken Linse

$H_2$ .

Man kann zeigen:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{(n-1)d}{nr_1 r_2} \right]$$

$$h_1 = -\frac{(n-1)fd}{nr_2}; \quad h_2 = -\frac{(n-1)fd}{nr_1}$$

**b) Linsensysteme** Kombination von dünnen Linsen im Abstand  $d$ . Man kann zeigen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

$$h_1 = \frac{fd}{f_2}; \quad h_2 = \frac{fd}{f_1}$$

Grenzfall  $d \rightarrow 0$

Die Brechkraften zweier nahe benachbarte auf die gleiche Achse zentrierter Linsen addieren sich.

### 1.6.5 Abbildungsfehler und Aberrationen

bisher:	optische Abbildungen ideal
real:	immer fehlerbehaftet!
Aberrationen von Idealität:	Aberrationen

#### 1.6.5.1 Chromatische Aberrationen

Dispersion von  $n$

$$D(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} = (n(\lambda) - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

für Linse:  $f_{\text{blau}} < f_{\text{rot}}$  und damit  $b_{\text{blau}} \neq b_{\text{rot}}$  Abhilfe: Kombination mehrerer Linsen mit verschiedenen  $n(\lambda) \rightarrow$  Achromat

### 1.6.5.2 Monochromatische Aberrationen

- für Einfallswinkel bzw. Ausfallswinkel  $\theta_i \neq \sin \theta_i$
- sphärische Aberration
- Brechung an ebenen Grenzflächen  $\rightarrow$  Deckglas-Korrektur von Objektiven
- Koma-Fehler
- Astigmatismus

beides Fehler, bei denen  $\theta_i$  groß ist  
zum Astigmatismus:

#### Unterschiede

- der Einfallswinkel in x- bzw. y-Ebene
- Krümmung der optischen Oberfläche

zur Behebung am menschlichen Auge:  
 $\Rightarrow$  Kombination aus sphärische und Zylinder-Linse

## 1.7 Instrumente der geometrischen Optik

### 1.7.1 Projektionsapparat

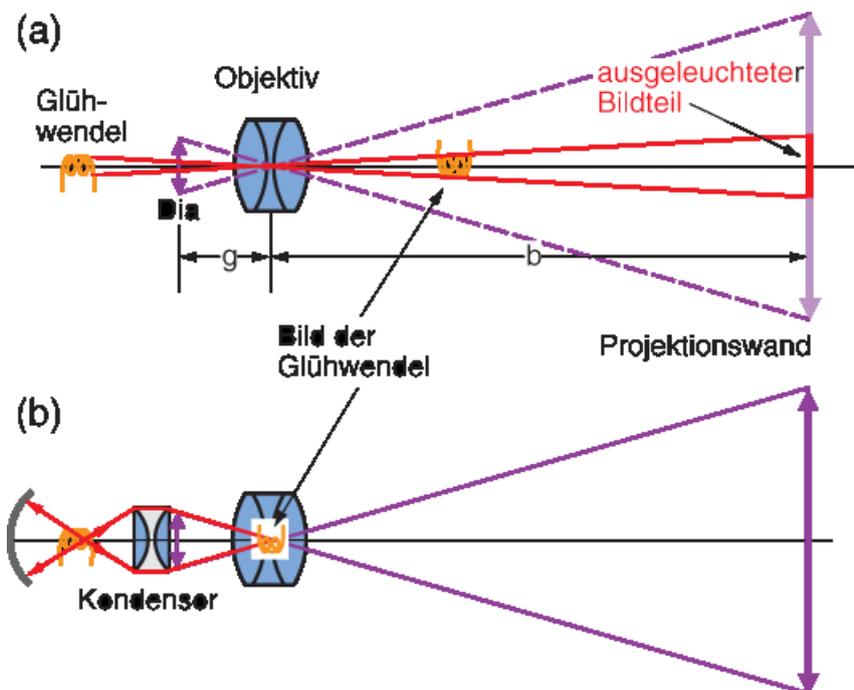


Abbildung 1.25: Schematische Darstellung des Strahlengangs in einem Projektionsapparat. Während bei der Strahlführung durch das Objektiv allein aufgrund der kleinen Glühwendel nur der zentrale Teil des Dias hell ausgeleuchtet wird (a), kann durch die Verwendung eines passenden Kondensators, der das Bild der Glühwendel in das Objektiv legt, eine vollständige Ausleuchtung des Dias erreicht werden (b). (aus [Zth] S. 114)

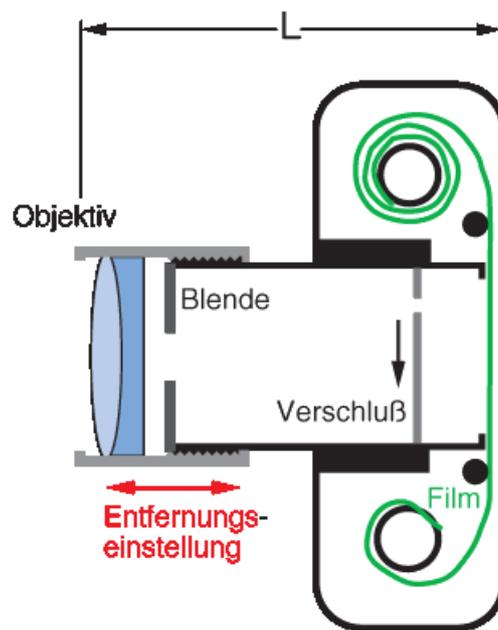


Abbildung 1.26: Schematische Darstellung einer fotografischen Kamera mit wesentlichen optischen Funktionselementen Objektiv, Blende, Verschluss und Film. Bei einer modernen Kamera wird durch den Ersatz elektronischer Bauelemente eine optimale Steuerung der Belichtung erreicht. Anstelle des Films wird oft ein CCD-Chip als Bildsensor verwendet. (aus [Zth] S. 115)

### 1.7.2 Fotografische Kamera

- selbstleuchtender Gegenstand
- Bild auf Filmebene  
→ photochemische Reaktion; Halbleiter-Lichtempfänger-Chip

#### Funktionalität einer Kamera:

- scharfes Bild Gegenstand → Filmebene
- Anpassung der Helligkeit des Bildes wegen der Fil-Empfindlichkeit  
Beispiel:  $g$  von  $1\text{m} \dots \infty$ ;  $f = 50\text{mm}$   
zusammen:  $b = 52,6\text{mm} \dots 50\text{mm}$   
transversale Vergrößerung:

$$V_T = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \approx \frac{f}{g}$$

- Teleobjektive: große Brennweite, kompakte Bauform ?

### 1.7.3 menschliches Auge

- Detektor: lichtempfindliche Netzhaut (Retina)
- Scharfstellung des Bildes: Variation der Brennweite  $f$  der Kristalllinse
- scharfes Sehen:  $b = 15\text{cm} \dots \infty$
- Helligkeitsregelung: Iris, Änderung des Durchmessers  $1,5 \dots 8\text{mm}$  in  $1\text{sec}$
- konventionelle Sehweite:  $S_n = 25\text{cm}$

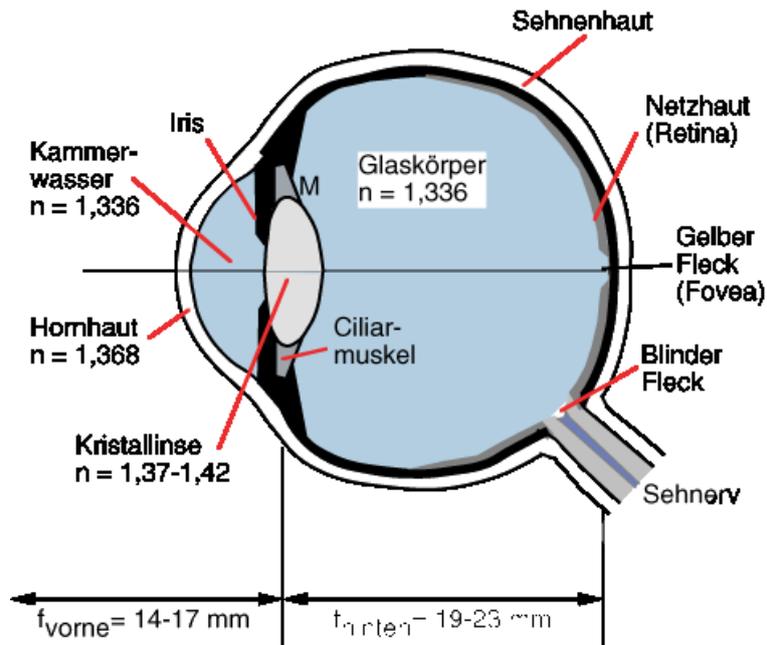


Abbildung 1.27: Schematischer Aufbau des menschlichen Auges (aus [Zth] S. 119)

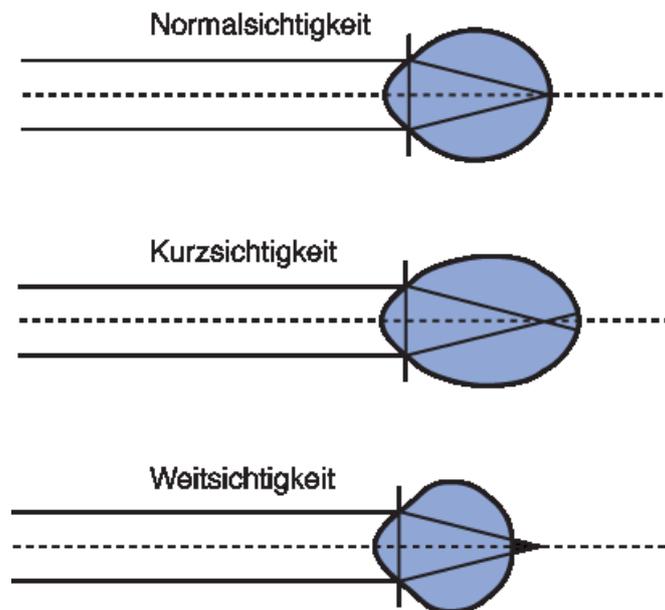


Abbildung 1.28: Normal- und Falschsichtigkeit des Menschlichen Auges (aus [Zth] S. 119)

#### 1.7.4 Vergrößernde optische Instrumente

Definition: Vergrößerung:

- Gegenstandsweite  $g$  fest (z.B. Mond)

$$V = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}} = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_0}$$

- $g$  beliebig:

$$V = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel im Abstand } S_0} \quad S_0 = 25\text{cm}$$

### 1.7.4.1 Lupe

$$V_{\text{Lupe}} = \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_0} = \frac{S_0}{f_L} = \frac{25\text{cm}}{f_L}$$

### 1.7.4.2 Mikroskop

- kurzbrennwertiges Objektiv ( $f_{Ob}$ )  
→ reelles, vergrößertes Bild Gegenstand
- Okular (Lupe) mit  $f_{Ok}$  → vergrößertes Bild

$$|V_{Ob}| = \frac{b}{g} = b \left( \frac{1}{f_{Ob}} - \frac{1}{b} \right) = \frac{b - f_{Ob}}{f_{Ob}} = \frac{t}{f_{Ob}}$$

$t =$  Tubuslänge  $b - f_{Ob}$ , typisch 160mm

$$V_{mik} = V_{Ob}V_{Ok} = \frac{tS_0}{f_{Ob}f_{Ok}} < 2000$$

### 1.7.4.3 Fernrohr

- astronomisches bzw. KEPLER'schs Fernrohr:

$$V_{\text{Fernrohr}} = \frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_0} = \frac{f_{Ob}}{f_{Ok}}$$

→ ausgedehnte Bauform plus Bild steht kopf

- terrestrisches Fernrohrs

## 1.8 Interferenz

- Überlagerung von Wellen
- Überhöhung bzw. Abschwächung der Feldamplitude bzw. Intensität

### 1.8.1 Interferenz zweier Punktquellen

Beispiel:

2 identische Quellen für Kugelwellen, die in Phase emittieren und die jeweils am Ort  $-x_0$  bzw.  $+x_0$  im Koordinatensystem sitzen und die gleiche Amplitude haben.

$$E_g(x=0) = E_1 + E_2 = \frac{A}{x_0} e^{i\omega t - ikx_0} + \frac{A}{x_0} e^{i\omega t + ikx_0}$$

$$I_g(x=0) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n c \langle |E_1 + E_2|^2 \rangle = \varepsilon_0 n d \frac{2A^2}{x_0^2} = f \frac{1}{2} \varepsilon_0 n d \langle |E_1^2| \rangle = 4I_1$$

→ konstruktive Interferenz

$\Delta x = \frac{\lambda}{4}$ : Phasenunterschied gleich  $\pi$

2 Quellen in Phase bei  $f$  typisch 500THz

### 1.8.2 Michelson-Interferometer

- Interferenzen durch Aufspalten der Wellenamplitude
- teildurchlässiger Spiegel ( $R = 50\%$ ,  $T = 50\%$ ) → Strahlteiler
- z.B. dünne Metallschicht oder siehe (1.8.3)

Beispiel für Anwendung:

- genaue Längenmessung; physikalischer Längenstandard

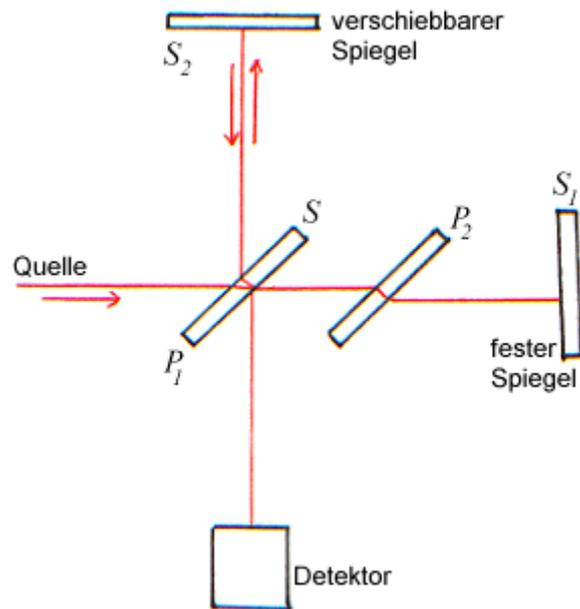


Abbildung 1.29: Michelson-Interferometer

- Meter: Vielfaches der Wellenlänge  $\lambda_{\text{Cd}}$  der roten Cadmium-Spektrallinie
- Anzahl  $N$  von Hell-Dunkel-Durchgängen  
 $\rightarrow$  Verschiebungsstrecke  $D$   

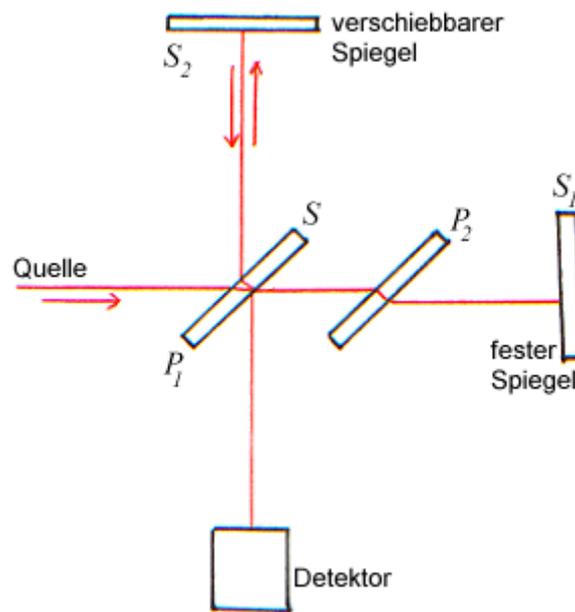
$$D = \frac{N\lambda_{\text{Cd}}}{2}$$

hier: He/Ne-Laser mit  $\lambda = 632,8\text{nm}$ ; Präzision  $\approx \frac{\lambda}{10}$

### 1.8.3 Interferenzen dünner Schichten

- Reflexion an Vorder- und Rückseite der dünnen Schicht
- Zweistrahl-Interferenz:  $R$  klein z.B.  $n_f \approx 1,5$ ,  $n_{1,2} = 1 \Rightarrow R \approx 4\%$
- Minima und Maxima einer Interferenzfigur gemäß Phasenverschiebung  $\delta$  bei Reflexion bzw. geometrischen Gangunterschied

### 1.8.3.1 Interferenzen gleicher Neigung



Bedingung für konstruktive Interferenz:

$$2n_f d \cos \theta_f = \left( m + \frac{\Delta\Phi}{2\pi} \right) \lambda \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

beachte: Phasensprung um  $\pi$  bei Reflexion am dichteren Medium

$$\Rightarrow \Delta\Phi = \begin{cases} \pi & \text{für } n_f < n_1, n_f < n_2 \\ -\pi & \text{für } n_f > n_1, n_f > n_2 \\ 0 & \text{für } n_1 < n_f < n_2 \\ 0 & \text{für } n_1 > n_f > n_2 \end{cases}$$

### 1.8.3.2 Interferenzen gleicher Dicke

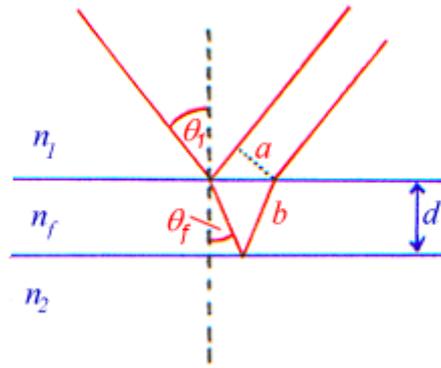
- Variation der optischen Dicke  $n_f d$
- Beispiel: Ölfilm ( $n_f \approx 1,5$ ) auf Wasser ( $n_2 = 1,33$ )
- konstruktive Interferenz bei  $\frac{2n_f d}{\lambda} = \left( m + \frac{1}{2} \right)$  mit  $m \in \mathbb{Z}$

### 1.8.3.3 Dielektrische Schichten

- Spezialfall: gleiche Feldstärke für reflektiertes Licht an Vorder- und Rückseite
- Anwendung 1: Vergütung von Glasoptiken: Anti-Reflexbeschichtung  
 Auftreten destruktiver Interferenz:  $2n_f d = \frac{1}{2}\lambda$   
 optische Schichtdicke:  $n_f d = \frac{\lambda}{4}$  „ $\frac{\lambda}{4}$ -Schicht“

$$n_f = \sqrt{n_1 n_2}$$

- Anwendung 2: Herstellung hochreflektierender Spiegel  
 → paarweise Doppelschichten aus hochbrechenden ( $n_h$ ) und niederbrechenden ( $n_n$ ) Material  
 → beide Schichten: optische Dicke  $n_h d_h = n_n d_n = \frac{\lambda}{4}$   
 → optischer Gangunterschied je  $\frac{\lambda}{2}$  + einmal Phasensprung um  $\Delta\Phi = \pi$   
 damit ergibt sich ein Gangunterschied  $\lambda$



Veruch: Interferenz an Glimmerplatte

### 1.8.4 Vielfachinterferenzen

- bisher: nur Interferenzen zweier Strahlen  $\Rightarrow$  kosinusförmige Interferenzstruktur
- jetzt: Vielfachinterferenzen  
 $\Rightarrow$  scharfe Modulationen  
 $\Rightarrow$  wichtiges Hilfsmittel für hochauflösende Spektroskopie
- Beispiel: FABRY-PEROT-Interferometer  
 planparallele Platte(n)  
 begrenzt durch zwei horeflektierende Schichten
- ideales Interferometer: nehme Verluste als vernachlässigbar an
- FABRY-PEROT: Dicke  $d$ , Brechungsindex  $n_f$ , Schichten identische Reflexion, in Medium mit Brechungsindex  $n_a$

E-Amplituden-Reflexions bzw. -Transmissionskoeffizient:  $r, t$  vorne und  $r', t'$  hinten  
 es gilt:  $t \cdot t' = 1 - r^2$  und  $r' = -r$

$$\begin{aligned}
 E_0 &= E_{1r} + E_{2r} + E_{3r} \dots \\
 &= E_{or} + E_0 t r' t' e^{i\delta} + e_0 t r' r' r' t' e^{2i\delta} + \dots \\
 &= e_0 \left( r + r' t t' e^{i\delta} \left[ 1 + r'^2 e^{i\delta} + (r'^2 e^{i\delta})^2 + \dots \right] \right) \\
 &= |r'^2 e^{i\delta}| < 1 \quad \Rightarrow \text{geometrische Reihe} \\
 \Rightarrow E_r &= E_0 \left( r + \frac{r' t t' e^{i\delta}}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \right) \\
 E_r &= E_0 \frac{r(1 - e^{i\delta})}{1 - r^2 e^{i\delta}} \\
 I_R &= I_0 \frac{2r^2(1 - \cos \delta)}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta} = I_0 \frac{F \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right)}{1 + F \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right)} \\
 \text{mit } F &= \left( \frac{2r}{1 - r^2} \right)^2 = \frac{4R}{(1 - R)^2} \\
 \text{Phase: } \delta &= \frac{4\pi n_f d}{\lambda} \cos \theta_f
 \end{aligned}$$

Transission:

$$I_T = I_0 - I_R = I_0 \underbrace{\frac{1}{1 + F \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right)}}_{\text{Airy-Funktion}}$$

Lage der Transmissions-Maxima

$$2n_f d \cos \theta_f = m\lambda, \quad m = 1, 2, \dots$$

- Verlauf von  $I_T$  in der Nähe der Interferenz-Maxima: LORENZ-förmig
- volle Halbwertsbreite  $\Delta\delta$

$$\Delta\delta = \frac{4}{\sqrt{F}}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{\text{Abstand benachbarter Maxima}}{\text{Breite eines Maximums}} \\ &= \frac{2\pi\sqrt{F}}{4} = \frac{\pi\sqrt{R}}{(1-R)} \end{aligned}$$

Anwendung:

- Schmalbandiges Filter für Licht
- durchstimmbare über Variation von  $\delta$

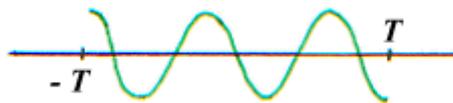
$$\tilde{E} \sim \int_{\sigma} dx' dy' e^{i(k_x x' + k_y y')} \cdot T(x', y')$$

### 1.8.5 Kohärenz und Wellengruppen

*Es gibt keine ebenen, monochromatischen Wellen*

Sie sind Idealisierungen für Wellengruppen, die nach FOURIER aus der Superpositionen ebener monochromatischer Wellen bestehen.

#### (A) Zeitlich begrenzter Wellenzug



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} = \begin{cases} E_0 \cos \omega_0 t & \text{für } -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Näherung: sprunghaftes Ein / Ausschalten

Er enthält beliebige Frequenzen, d.h. Beiträge (gemäß FT):

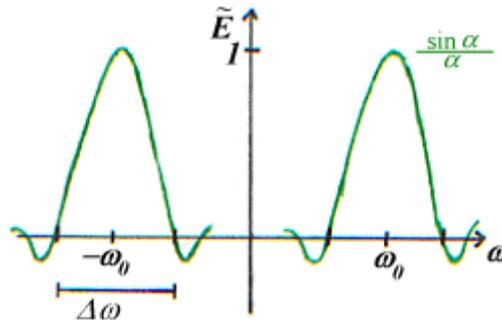
$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(r_0, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) \\ &= E_0 \int_{-T}^T dt e^{-i\omega t} \cos \omega_0 t \\ &\stackrel{(*)}{=} E_0 \int_{-T}^T dt \cos \omega t \cos \omega_0 t \\ &= \frac{1}{2} E_0 \int_{-T}^T dt \cos(\omega + \omega_0)t + \cos(\omega - \omega_0)t \end{aligned}$$

(\*)  $E(t)$  symmetrisch;  $e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\mathbf{E}}(r_0, \omega) = T E_0 \left\{ \frac{\sin(\omega + \omega_0)T}{(\omega + \omega_0)T} + \frac{\sin(\omega - \omega_0)T}{(\omega - \omega_0)T} \right\} \neq 0}$$

wobei:

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow \begin{cases} 0 & |x| \rightarrow \infty \\ 1 & x \rightarrow 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{Frequenzbandbreite } \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Beiträge  $\tilde{\mathbf{E}}$  aus Frequenzband der Bandbreite  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$  dominieren in *Spektrum*  $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$  des Pulses  $\mathbf{E}(t)$  (mit endlicher Dauer!). Der Wellenzug kann zur monochromatischen Welle idealisiert werden nur für Beobachtungszeitfenster  $\Delta t \ll T$ .

Dann ist der Unterschied  $|\omega - \omega_0| \approx \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$  nicht messbar weil

$$e^{i\omega\Delta t} = e^{i\omega_0\Delta t} \underbrace{e^{i\Delta\omega\Delta t}}_{\approx 1}$$

$$\text{da } \Delta\omega\Delta t = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \ll 1$$

Welche Frequenz  $\omega$  aus dem Frequenzband  $\omega = \omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2}$  gemessen werden, hängt vom Messgerät ab.

Alle Lichtquellen besitzen eine natürliche Linienbreite  $\Delta\omega$ .

(Angeregtes  $e^-$  im isolierten Atomen  $T \approx 10^{-8}$  typisch; Moleküle in Lampe bei hoher Temp durch Stöße und Bewegung (Dopplerverbreiterung) haben kleinere  $T$ ; auch LASER)

$$\Rightarrow \text{Es gibt Bandbreite } \Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

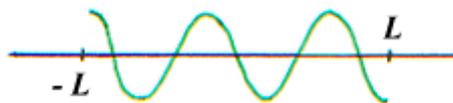
$$\Rightarrow \text{Es gibt Kohärenzzeit } \Delta t_c = \frac{1}{\Delta\nu}$$

$$\Rightarrow \text{Es gibt Kohärenzlänge } \Delta x_c = c \Delta t_c$$

(wegen der Dispersionsrelation  $\omega = ck$  von Licht im Vakuum)

$\Delta x_c$  entspricht der Länge im Raum, über die die Welle monochromatisch mit festen Phasenbeziehungen läuft.

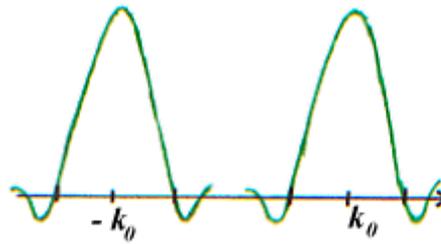
## B) Räumlich begrenzter Wellenzug



$$\mathbf{E}(x, t = t_0) = \begin{cases} E_0 \cos k_0 x & \text{für } -L \leq x \leq L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{analog zu A) } \mathbf{E}(x, t_0) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \tilde{\mathbf{E}}(k, t_0)$$

$$\text{mit } \tilde{\mathbf{E}}(k, t_0) = E_0 L \left\{ \frac{\sin(k + k_0)L}{(k + k_0)L} + k_0 \rightarrow -k_0 \right\}$$



$$\Delta k = \frac{2\pi}{L}$$

Moden verteilt in Raumbreite  $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$  um  $\pm k_0$

**C) allgemeine Wellengruppe (Wellenpaket, Signal):** Nach FOURIER jedes Feldes  $\mathbf{E}$  lässt sich schreiben als

$$E(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{E}(\mathbf{k}, t) \cdot e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

(Superposition / Überlagerung ebener Wellen.)

Wobei aus den Lösungen der MAXWELL-Gleichungen und den Material Gleichungen die Dispersionsrelation  $\omega = \omega(k)$  folgt. Somit ist:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{k}) \cdot e^{i\omega(\mathbf{k})t}$$

(mit  $\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{k})$  transversal typischerweise)

$\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  ist Superposition von ebenen, monochromatischen Wellen mit **Phasengeschwindigkeit**:

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{k}) = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \underbrace{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\omega(\mathbf{k})t}}_{\text{eben, monochromatisch}} \tilde{\mathbf{E}}_0(k)$$

und

$$\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{k}) = \int d^3 r e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} E(\mathbf{r}, t = 0)$$

ist die Gewichtungsfunktion (d.h. Amplitude)

Energieerhaltung ( $u_{el} \sim \frac{\epsilon_0}{2} |E|^2$ )  $\rightarrow$  Normierung

Zunächst führt man eine Normierung durch, die bedeutet, dass der Energiegehalt der Welle normiert ist:

$$\underbrace{\int d^3 r |E(\mathbf{r}, t)|^2}_{\text{Gesamtenergie der Welle}} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \underbrace{|\tilde{E}(t)|^2}_{\text{zeitunabhängig}} \doteq 1 = \int \frac{d^3 r}{(2\pi)^3} |\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{k})|^2$$

(mit PARSEVAL)

Im Weiteren gehen wir zur Vereinfachung davon aus, dass  $|\tilde{E}(\mathbf{k})|^2$  bei  $\mathbf{k}_0$  scharf „gepeakt“ sei. Dann kann man nämlich die Dispersionsrelation TAYLOR-entwickeln und erhält:

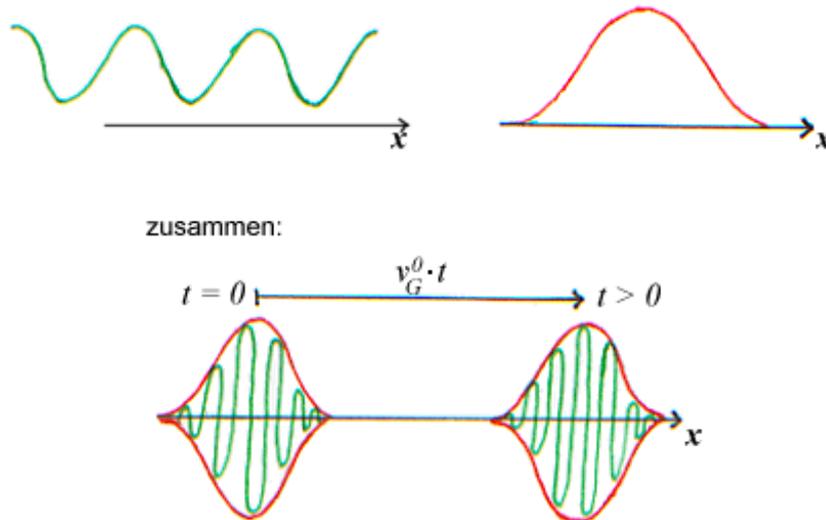
$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{k}) &= \omega(\mathbf{k}_0) + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) \right|_{\mathbf{k}_0} + \dots \\ &=: \omega_0 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{v}_G^0 + \dots \end{aligned}$$

mit der **Gruppengeschwindigkeit**:

$$\mathbf{v}_G = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \quad \boxed{\mathbf{v}_G^0 = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) \right|_{\mathbf{k}_0}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(\mathbf{r}, t) &\doteq \int_{\mathbf{q}=\mathbf{k}-\mathbf{k}_0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{E}(\mathbf{k}) \cdot e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})} e^{i(\mathbf{v}_G^0 t - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)} \\ &= \underbrace{e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})}}_{**} \cdot \underbrace{E^{\text{mod}}(\mathbf{v}_G^0 t - \mathbf{r})}_{*} \end{aligned}$$

\* ist die FOURIERRücktransformation  $\text{FT}^{-1}[\dots](\mathbf{v}_G^0 t - \mathbf{r})$ , d.h. die Modulationsfunktion, die sich mit der Gruppengeschwindigkeit bewegt. (Der Schwerpunkt der Welle wandert mit der Gruppengeschwindigkeit)  
 \*\* beschreibt eine ebene monochromatische Welle.



Im Fall von Dispersion gilt:  $v_a = \frac{\partial \omega}{\partial k} \neq v_p = \frac{\omega}{k}$ . Eine mit  $\mathbf{v}_G t$  sich bewegende Wellengruppe.

#### Bemerkungen:

- Im eindimensionalen Fall ( $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{x}}$ ), ohne Dispersion ist  $\omega = c|k|$  und

$$\tilde{E}(k) = \int dx e^{ikx} (\psi_0 \mp \frac{i}{ck} v_0)$$

führt zurück zu D'ALEMBERT aus §1.1.2 (A)

- Inkohärentes Licht besteht aus einer Superposition von Wellengruppen, die keine festen Phasenbeziehungen zueinander haben.

**D) Kohärenz (Interferenzfähigkeit)** Am Beispiel von zwei Wellengruppen  
 Interferenzfähigkeit dieser zwei Wellengruppen?

mit  $\omega_1 = \omega_2 = 10^{15} \text{s}^{-1}$ ,  $\Delta t_c \approx 10^{-8} \text{s}$ ;  $\Delta x_c \approx 3 \text{m} \approx 10^7 \lambda$  im Detektor wird die zeitlich gemittelte Intensität gemessen

$$\langle I \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt I = \langle |E_1 + E_2|^2 \rangle_\tau = \langle |E_1|^2 \rangle_\tau + \langle |E_2|^2 \rangle_\tau + \langle E_1 E_2^* + E_1^* E_2 \rangle_\tau$$

mit  $E_1 \sim e^{i\varphi_1}$  und  $E_2 \sim e^{i\varphi_2}$  und  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

$$\Rightarrow \langle I \rangle_\tau = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \Delta\varphi \rangle_\tau$$

(longitudinal) kohärent bedeutet  $\langle \cos \Delta\varphi \rangle_\tau \neq 0$   
 inkohärent bedeutet  $\langle \cos \Delta\varphi \rangle_\tau = 0$

Wenn  $\Delta\varphi = \Delta\varphi(t)$  eine Funktion der Zeit ist, gibt  $\langle \cos \Delta\varphi \rangle = 0$ ; Kohärenzzeit mit  $\Delta t_c \gg \tau$  erlaubt uns  $\varphi_1(t) = \varphi_1$ ,  $\varphi_2(t) = \varphi_2$  zu setzen  $\Rightarrow \Delta\varphi = \text{const.}$  und es gibt Beitrag  $\Rightarrow$  kohärent für  $\Delta t_c \gg \tau$ , inkohärent  $\Delta t_c \ll \tau$

Transversale Kohärenz bei einer ausgedehnten Lichtquelle. Transversale Kohärenz besteht, wenn die Gangunterschiede der Strahlen aus verschiedenen Punkten der ausgedehnten Lichtquelle nicht zu groß sind ( $< \lambda$ )

$\Delta R_1$  ist Licht von  $\mathbf{r}'_1$  und  $\Delta R_2$  ist Licht von  $\mathbf{r}'_2$

$$\begin{aligned}\Delta R_{1'} &= R_{11'} - R_{21'} = |\mathbf{r} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_1| \\ \Delta R_2 &= R_{12'} - R_{22'} = |\mathbf{r} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1| - |\mathbf{r} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2|\end{aligned}$$

transversale Kohärenz:  $\Delta R_1 - \Delta R_2 \leq \lambda$

Taylor: für  $r \gg d, d'$

$$\Delta R_1 - \Delta R_2 \sim \frac{dd'}{r}$$

$$\boxed{dd' \ll \lambda r}$$

Koherenzbedingung

Quelle erscheint unter dem Winkel  $\alpha' = \frac{d'}{r}$

$$d < \frac{\lambda}{\alpha'}$$

Bsp.: Sonne:  $\alpha' = 32^\circ$  und  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{m}$ ,  $d < 0,1 \text{cm}$

## 1.9 Mathematischer Einschub: Green'sche Funktionen

### 1.9.0 Motivation

Ziel:

- Ableitung des HUYGEN'schen Prinzips aus Wellengleichung
- Technik um inhomogene DGL zu lösen ( $\rightarrow$  Feldtheorie im Hauptstudium)

Aufgabe: inhomogene Wellengleichung lösen (Quellen)

Frage: Ursache-Wirkungsprinzip

suche  $\mathbf{E}(t)$  und  $\mathbf{B}(t)$  für  $\varrho(t')$  und  $\mathbf{j}(t')$  zu früheren Zeiten ( $t' < t$ ).

### 1.9.1 Die inhomogenen Wellengleichungen

Im Vakuum seien monochromatische  $\varrho$  und  $\mathbf{j}$  gegeben:

$$\begin{aligned}\varrho &= \text{Re} \{ \tilde{\varrho}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \} \\ \mathbf{j} &= \text{Re} \{ \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \}\end{aligned}$$

betrachte immer nur den Realteil, ohne ihn zu schreiben:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \\ \mathbf{B} &= \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1.6) \quad \nabla \times \tilde{\mathbf{B}} &= \mu_0 \tilde{\mathbf{j}} + \frac{i\omega}{c^2} \tilde{\mathbf{E}} \\ \nabla \times (\dots) &= -\nabla^2 \tilde{\mathbf{B}} \\ &= \mu_0 \nabla \times \tilde{\mathbf{j}} + \frac{i\omega}{c^2} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} \\ &\stackrel{(1.2)}{=} \mu_0 \nabla \times \tilde{\mathbf{j}} + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{B}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[ \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = -\mu_0 \nabla \times \tilde{\mathbf{j}}}$$
 (1.22a)

analog:

$$\Rightarrow \boxed{\left[ \nabla^2 + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right] \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega\mu_0 \left[ \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{c^2}{\omega^2} \nabla \left( \nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) \right) \right]}$$
 (1.22b)

Die erzeugten (ausgestrahlten) Felder genügen den (FOURIERtransformierten) inhomogenen Wellengleichungen („*Helmholtz-Gleichungen*“) mit Quellen, die durch die Ströme  $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega)$  gegeben sind.

### 1.9.2 Die Green'sche Funktion der Helmholtzgleichung

Gesucht ist die spezielle Lösung der skalaren inhomogenen Helmholtzgleichung:

$$\boxed{\left[ \nabla^2 + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right] \tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \tilde{s}(\mathbf{r})}$$
 (1.23a)

mit geeigneten Randbedingungen. Sie sollen durch:

$$\boxed{\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \int d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{s}(\mathbf{r}')} \quad (1.23b)$$

gegeben sein.

$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  heißt *Green'sche Funktion*.

Lösung durch FOURIERtransformation von Gleichung (1.23):

$$\int d^3r e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \Rightarrow \left( \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 \right) \tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \tilde{s}(\mathbf{k}) = \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \tilde{s}(\mathbf{r})$$

Damit ist die Gleichung gelöst, und wir führen eine FOURIERrücktransformation durch:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2} \int d^3r' e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \tilde{s}(\mathbf{r}')$$

Für absolut integrierbare Funktionen darf man nun das Integral vertauschen und erhält:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \int d^3r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tilde{s}(\mathbf{r}') \quad (i)$$

$$\text{mit } G(\varrho = \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\varrho}}{\left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2} \quad (ii)$$

#### Bemerkungen:

- Dasselbe Ergebnis folgt als Lösung der Gleichung mit Dirac- $\delta$ :

$$\left( \nabla_r^2 + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

weil FT  $[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] (\mathbf{k}) = \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'}$

Diese Gleichung wird häufig als Abkürzung verwendet.

- Zur speziellen Lösung (i) kann natrlich eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung addiert werden:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \underbrace{A' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}_{=*} + \int d^3r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tilde{s}(\mathbf{r}')$$

\* ist dabei die Lösung der homogenen HELMHOLTZ-gleichung, weil für  $\omega = kc$ :

$$\left[ \nabla^2 + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = 0$$

- eine andere Lösung ist:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \frac{B_+}{4\pi r} e^{i\frac{\omega}{c}r} + \frac{B_-}{4\pi r} e^{-i\frac{\omega}{c}r} + \int d^3r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tilde{s}(\mathbf{r}')$$

also eine Superposition einer einlaufenden ( $B_+ \dots$ ) und einer auslaufenden ( $B_- \dots$ ) Welle. wegen (1.1.2)

$$\left( \nabla^2 + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right) \frac{1}{r} e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} = \frac{1}{r} \left( \partial_r^2 + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right) e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} = 0$$

Die Koeffizienten  $B_{\pm}$  der möglichen homogenen Lösung müssen durch Randbedingungen festgelegt werden.

### SOMMERFELD'sche Ausstrahlungsbedingung:

Die spezielle Lösung  $\tilde{\psi}_s$  (und damit die GREEN'sche Funktion  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ) muss im weiten Abstand von der Quelle eine Kugelwelle werden und damit Folgendes erfüllen:

$$\boxed{r \left( \frac{\partial}{\partial r} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + i\frac{\omega}{c} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0} \quad (iii)$$

Dann strahlen die Wellen nach außen (Kausalitätsprinzip ist erfüllt).

**Probe:**

$$r \left( \partial_r + i\frac{\omega}{c} \right) \frac{A_{\pm}}{r} e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} = \left( \pm i\frac{\omega}{c} + i\frac{\omega}{c} - \frac{1}{r} \right) A_{\pm} e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

geht nur gegen Null, wenn keine einfallende Welle auftritt (also für  $A_+ = 0$  und  $A_- \neq 0$ )

**Behauptung:**  $G(\varrho)$  aus Gleichung (\*) ist eine auslaufende Kugelwelle:

Mit  $\varrho = |\varrho| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  gilt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow G(\varrho = \mathbf{r} - \mathbf{r}') &= -\frac{1}{4\pi\varrho} e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho} \\ &= -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

- Beweis mit CAUCHY'schen Residuensatz
- Alternativ durch Einsetzen in FT

$$\begin{aligned} \int d^3\varrho e^{-i\mathbf{k}\cdot\varrho} G(\varrho) & \quad \text{Kugelkoordinaten:} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} d\varrho \varrho^2 \int_{-1}^1 d\mu e^{-i k \varrho \mu} \frac{-1}{4\pi\varrho} e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho} \\ \mu &= \cos \angle \mathbf{k}, \varrho \\ &= \frac{i}{2k} \int_0^{\infty} d\varrho e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho} (e^{ik\varrho} - e^{-ik\varrho}) \end{aligned}$$

Achtung: Integral konvergiert nicht für  $\varrho \rightarrow 0!$  trotzdem naiv weiter rechnen!

$$= \frac{i}{2k} \left( \frac{1}{i\left(\frac{\omega}{c} - k\right)} - \frac{1}{i\left(\frac{\omega}{c} + k\right)} \right) = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2}$$

Bleibt zu klären, wie  $e^{-i\left(\frac{\omega}{c} \pm k\right)\varrho} \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} 0$  begründet werden kann.

Zurück zur inhomogenen Wellengleichung:

$$\left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t) = s(\mathbf{r}, t)$$

Wir wollen  $\psi = 0$  solange  $s = 0$  (noch ausgeschaltet). Dann soll  $\psi$  langsam anwachsen.

$s(\mathbf{r}, t) = \tilde{s}(r)e^{i\omega t}e^{\varepsilon t}$  ist eine Quelle, die erfüllt 1.  $s \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$  und 2. für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ist sie monochromatisch

Diese „adiabatisch eingeschaltete“ Quelle muss postuliert werden, um ein langsames Anwachsen von  $\psi$  zu garantieren und somit um Kausalität zu genügen. Damit erhalten alle Frequenzen  $\omega$  einen infinitesimalen negativen Imaginärteil

$s(t) = \tilde{s}e^{i(\omega - i\varepsilon)t} \rightarrow$  ab jetzt wird immer  $\omega - i\varepsilon$  gemeint, wenn  $\omega$  geschrieben wird!

$$e^{-i\left(\frac{\omega - i\varepsilon}{c} \pm k\right)\varrho} \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty}$$

### Fazit:

Die GREEN'sche Funktion, die (ii) und (iii) erfüllt ist lautet:

$$G(|\varrho| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\frac{1}{4\pi\varrho} e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho} \quad (iv)$$

Und die spezielle Lösung lautet:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{-1}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tilde{s}(\mathbf{r}', \omega) \quad (v)$$

### Bemerkungen:

- Die Kausalität ist für  $\omega \rightarrow \omega - i\varepsilon$  erfüllt.

- Symmetrie (Reziprozität):

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

(entspricht NEWTON'sches actio = reactio)

- Für translationsinvariante (homogene) Systeme gilt:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

- Für rotationssymmetrische (isotrope) Systeme gilt sogar:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$$

- $G$  hängt von den Randbedingungen ab (hier wurde die „natürliche“ verwendet)

### Fernfeldnäherung für lokalisierte Quellen

Falls  $\tilde{s}(\mathbf{r}') = 0$  für  $|\mathbf{r}'| > r_0$  (lokalisierte Quelle) und Abstand  $|\mathbf{r}|$  zur Quelle groß ( $r \gg r_0$ )

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2} \\ &= r \sqrt{1 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} \\ &= r \sqrt{1 - 2\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}} \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{=} r \sqrt{1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \frac{r'^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^2}{2r^2} + \dots} \end{aligned}$$

Notation:

$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$  Beobachtungsrichtung

$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$  Wellenvektor

es gilt:

$$e^{-i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \stackrel{\text{Taylor in der Wurzel}}{=} e^{-i\frac{\omega}{c}\left[r/\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + \frac{r'^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^2}{2r} + \dots\right]} \\ e^{-i\frac{\omega}{c}r + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' + \delta}$$

mit kleiner Korrektur

$$|\delta| < \frac{\omega}{c} \frac{r_0^2}{r} = 2\pi \frac{r_0^2}{r\lambda}$$

Es gilt dann (für  $\delta \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ )

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{-1}{4\pi r} e^{-i\frac{\omega}{c}r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}$$

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, \omega) \xrightarrow{r \gg \frac{r_0^2}{\lambda}} \underbrace{\frac{-1}{4\pi r} e^{-i\frac{\omega}{c}r}}_{\text{auslaufende Kugelwelle}} \underbrace{\int d^3r' e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \tilde{s}(\mathbf{r}', \omega)}_{\text{mit } \mathbf{k} \text{ modulierte Amplitude}}$$

### 1.9.3 Randwertprobleme

Ohne Quelle kann  $\tilde{\psi}$  in einem Bereich auch durch Einstrahlung durch die Berandung erzeugt werden.  $\tilde{\psi}(\mathbf{r})$  kann im Halbraum  $z > 0$  mit GREEN'scher Funktion aus Werten  $\psi_0(x', y', z' = 0)$  bestimmt werden

**Behauptung:** Das Feld  $\tilde{\psi}$  das homogene HELMHOLZgleichung

$$\left[ \bar{v}^2 + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right] \tilde{\psi}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{für} \quad z > 0 \quad (vi)$$

(und Ausstrahlbedingungen (iii) für  $z > 0$  erfüllt) und für  $z = 0$  vorgegebene Werte annimmt.

$$\tilde{\psi}(x, y, z = 0) = \tilde{\psi}_0(x, y) \quad (vii)$$

ergibt sich mit GREEN'scher Funktion (iv) zu

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = -z \int \underbrace{dx' dy'}_{d\sigma'} \tilde{\psi}_0(x', y') \frac{\partial}{\partial z} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Big|_{z=0} \quad \text{für} \quad z \geq 0 \quad (viii)$$

**Beweis:**

Weil die Gleichungen (vi) und (vii) erfüllt sind, ist nur (viii) zu zeigen, mit:

$$s = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

$$\varrho(z') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{s^2 + (z - z')^2}$$

$$\varrho = \varrho(z' = 0) = \sqrt{s^2 + z^2}$$

es folgt:  $\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial \varrho(z')} \frac{\partial \varrho(z')}{\partial z'} = \frac{z' - z}{\varrho(z')} \frac{\partial}{\partial \varrho}$

$$\Rightarrow \tilde{\psi} = \int \frac{d\sigma'}{2\pi} \tilde{\psi}_0 \frac{-z}{\varrho} \left( \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{1}{\varrho} e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho} \right)$$

$$= \int \frac{d\sigma'}{2\pi} \psi_0 z \frac{1 + i\frac{\omega}{c}\varrho}{\varrho^3} e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty ds \tilde{\psi} e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho} \frac{zs \left( 1 + \frac{i\omega}{c} \sqrt{z^2 + s^2} \right)}{(z^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}}$$

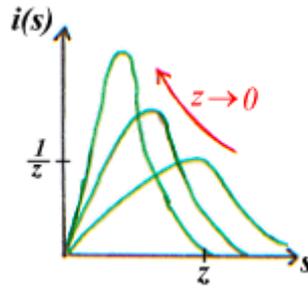
(in Polarkoordinaten)

Nebenbetrachtung: für  $z \rightarrow 0, s \rightarrow 0$

$$I(z) = \int_0^\infty ds \frac{zs}{(z^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^\infty ds i(s)$$

$i(s)$  ist Darstellung von Dirac- $\delta$ :

$$I(z) \stackrel{u=\frac{s}{z}}{=} \int_0^\infty du \frac{u}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = 1$$



$$\Rightarrow i(s) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \delta(s)$$

$$\Rightarrow \tilde{\psi} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{dl}{2\pi} \tilde{\psi}_0(x,y) = \tilde{\psi}_0(x,y)$$

**Bemerkung:** GREEN'sche Funktionen dienen zur Lösung von inhomogenen Problemen mit Randbedingungen und mit Anfangsbedingungen (physikalisch: Felder im Bereich bestimmt durch Quellen/Senken, Verluste/Einstrahlungen über Oberfläche und Anfangswerten)

Fernfeldnäherung:

mit  $z = r \cos \vartheta \approx \rho \cos \vartheta$  und für  $r \gg \frac{d^2}{\lambda}$ :

$$\tilde{\psi} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{i\omega}{c} \cos \vartheta \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}r}}{r} \int_{\sigma} \frac{do'}{2\pi} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \psi_0(\mathbf{r}') \Big|_z = 0$$

## 1.10 Beugung

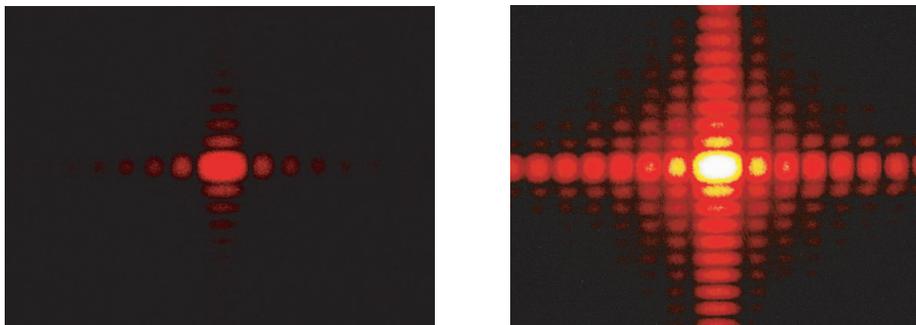
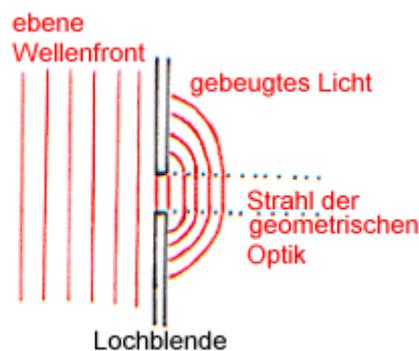


Abbildung 1.30: Beugung an einer Rechteckblende. Linke Seite: Normale Beleuchtungsbedingung. Rechte Seite: Stark überbelichtet (aus [Zth] S. 148)

### 1.10.1 Beugung von Wellen



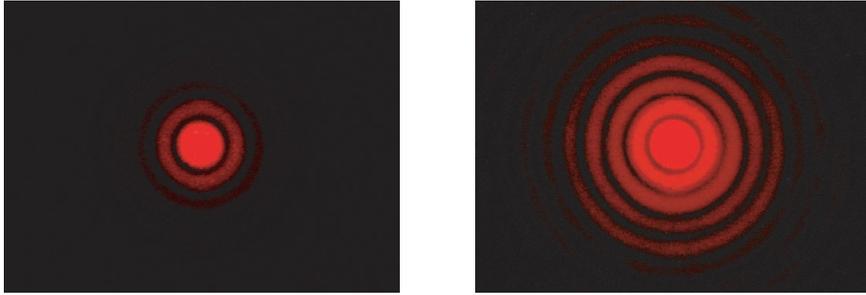
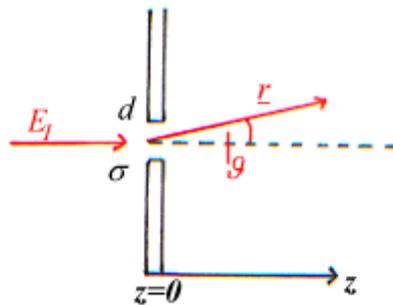


Abbildung 1.31: Beugung an einer kreisförmigen Blende. Linke Seite: Normale Beleuchtungsbedingung. Rechte Seite: Stark überbelichtet (aus [Zth] S. 150)

Welle läuft auch in geometrischem Schatten (Welle wird abgelenkt), wenn  $d \gg \lambda$  verletzt ist.  
 $\Rightarrow$  Effekt wichtiger je größer  $\lambda$  (rot stärker als blau gebeugt). Erklärung mit Huygenschem Prinzip  $\rightarrow$  Feld als ob in Öffnung viele in Phase schwingende Sender wären.

### 1.10.2 Kirchhoffsche Ableitung des Huygenschen Prinzips



Gesucht: gebeugtes Licht, das durch beleuchtete Öffnung in Schirm erzeugt wird. ( $\hat{=}$  vorgegebenes  $E_0$  auf Fläche  $\sigma$  strahlt im Halbraum  $z > 0$ ) Kirchhoff-Näherungen:

Da die exakte Bestimmung des  $E$ -Feldes bei  $z = 0$  schwierig ist.

- (i) Feld  $\tilde{E}_0$  auf Öffnung  $\sigma$  sei einfallendes Feld  $E_I$  (ungestört durch Schirm !)
- (ii) Feld sonst bei  $z = 0$  sei  $\tilde{E}_0 \equiv 0$
- (iii) Vektorcharakter von  $E$  vernachlässigt

(i)-(iii) sind im Widerspruch zu MAXWELLgleichungen und Materialgleichungen und können nur für Abstände vom Schirm  $\gg \lambda$  stimmen.

$d \gg \lambda$  gefordert für Beugung:

$$\Rightarrow \text{aus (1.9.3)} \quad \boxed{\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{i}{\lambda} \int_{\sigma} d\sigma' \tilde{E}(\mathbf{r}') \frac{\cos \theta}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-\frac{i\omega}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}$$

HUYGENS-FRESNEL: Die auf Öffnung  $\sigma$  fallende Welle pflanzt sich fort, als ob von jedem Punkt von  $\sigma$  eine Kugelwelle ausginge.

#### Bemerkung:

- Integral gibt „FRESNEL'sche Beugung“
- Fernfeldnäherung und Annahme, dass  $E_I$  ebene Welle ergibt „FRAUENHOFER Beugung“

### 1.10.3 Fraunhofer-Beugung

Wir verwenden 2 Näherungen:

- Einfallendes Licht sei eben, die Lichtquelle sei weit entfernt, d.h.  $\tilde{E}_I = A \cdot e^{-i\frac{\omega}{c}\mathbf{n}'\mathbf{r}}$
- Die Fernfeldnäherung:  $\delta = \frac{d^2}{r\lambda} \ll 1 \Rightarrow r \gg d$ , d.h. wir haben weite Abstände und kleine Öffnungen

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega) = A \cdot \frac{i \cos \vartheta}{\lambda r} \cdot e^{-i\frac{\omega}{c}r} \int_{\sigma} dx' dy' e^{i(k_x x' + k_y y')}$$

mit dem Wellenvektor  $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}(\mathbf{n} - \mathbf{n}')$ , der die Glieder  $k_x = \frac{\omega}{c}(n_x - n'_x)$  und  $k_y = \frac{\omega}{c}(n_y - n'_y)$  enthält.

Fazit: In FRAUNHOFER-Näherung ist das Beugungsbild die FOURIERtransformierte der Öffnung  $\sigma$

$$\boxed{\tilde{E} \propto \int_{\sigma} dx' dy' e^{i(k_x x' + k_y y')} T(x', y')}$$

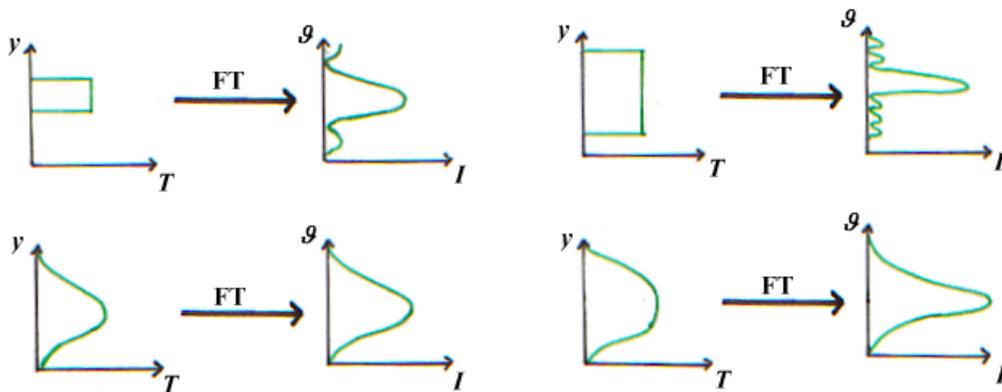


Abbildung 1.32: Fouriertransformation verschiedener beleuchteter Öffnungen  $\sigma$

#### 1.10.3.1 Beugung am Einfachspalt

$$\tilde{E} \sim \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dx' e^{ik_x x'} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dy' e^{ik_y y'} = ab \frac{\sin \frac{k_x a}{2}}{\frac{k_x a}{2}} \frac{\sin \frac{k_y b}{2}}{\frac{k_y b}{2}}$$

$$k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \vartheta$$

$$\text{Intensität: } I \sim |\tilde{E}|^2 \sim \frac{\sin^2 u}{u^2} \quad \text{mit} \quad u = \frac{k_y b}{2}$$

Lage der Minima:

$$\sin \vartheta = \pm \frac{\lambda}{b}; \pm \frac{2\lambda}{b}; \dots, \pm \frac{n\lambda}{b}$$

Lage der Maxima:

$$\sin \vartheta_{max} = \pm 1,43 \frac{\lambda}{b}; \pm 2,46 \frac{\lambda}{b}; \dots; \pm (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{b}$$

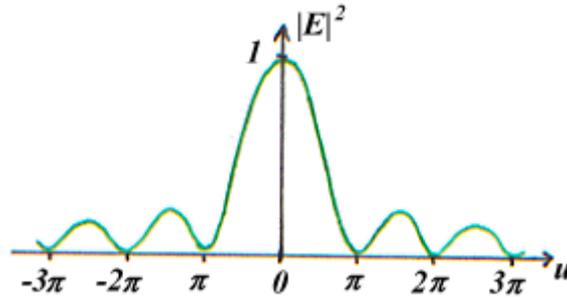


Abbildung 1.33: Beugung am Einfachspalt; Lage der Minima und Maxima

### 1.10.3.2 Beugung an kreisförmiger Blende

- $\sigma$  sei Kreis mit Radius  $a_i$  Durchmesser  $D = 2a$
- senkrechter einfall einer ebenen Welle  
 $\mathbf{n}' = \hat{\mathbf{z}}$  und  $n'_x = n'_y = 0$
- FRAUENHOFERbeugung:
  - nur kleine Winkel  $\vartheta$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos \vartheta &\approx 1 \quad \text{und} \quad k_x \approx \frac{\omega}{c} \vartheta \\ \Rightarrow \tilde{E} &\sim \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr' r' e^{i \frac{\omega}{c} \vartheta r' \cos \varphi} \\ \Rightarrow I &\sim |\tilde{E}|^2 \sim \left( \frac{J_1\left(\frac{2\pi a \vartheta}{\lambda}\right)}{\frac{2\pi a \vartheta}{\lambda}} \right)^2 \end{aligned}$$

$J_1(x)$ : BESSELFunktion 1. Ordnung

$$J_1(x) \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } x \rightarrow 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) & \text{für } |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

$D = 2a$  Lochblende: Merke:

- Winkel  $\vartheta_{min}$ , unter dem das erste Beugungsminimum erscheint:

$$\sin \vartheta_{min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

- volle Halbwertsbreite der Intensität des Hauptmaximums

$$\sin \vartheta_{\frac{1}{2}} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

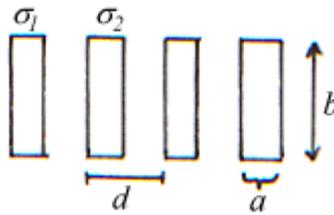
- Beugungslimit für Fokussierung durch Objektiv, Umkehrung ist Strahlengang! Airy-Scheibchen
- Durchmesser beugungsbegrenzter Spot im Fokus:

$$D = 1,22 \frac{\lambda}{\sin \vartheta}$$

- $\vartheta$ : Öffnungswinkel des optischen Systems
- Kriterium für das beugungsbegrenzte Auflösungsvermögen z.B. eines Mikroskops, Fokaldurchmesser eines Laserstrahls, Fernrohr
- Öffnungswinkel  $\vartheta$  groß  
 $\Rightarrow$  Fokaldurchmesser klein, Auflösungsvermögen groß
- Öffnungswinkel  $\vartheta$  klein  
 $\rightarrow$  kollimierter Laserstrahl mit Durchmesser  $D \gg \lambda$  weitet sich langsam durch Beugung auf; GAUSS-Profil bleibt erhalten

### 1.10.3.3 Faltungen

- Fläche  $\sigma$  sei eine regelmäßige Anordnung identischer Teilflächen  $\sigma_n$  der Breite  $a$ , Höhe  $h$  und Abstand  $d$  in  $x$ -Richtung



$$\sigma = \sum_{n=1}^N \sigma_n$$

FRAUENHFER-Beugungsbild

$$\tilde{E} = \int_{\sigma} d\sigma' e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \Big|_{z=0} = \sum_{n=1}^N \int_{\sigma_n} d\sigma' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \Big|_{z=0}$$

neue Variablen  $\mathbf{r}'_n = \mathbf{r}' - d(n-1)\hat{\mathbf{x}}$

$$\Rightarrow \tilde{E} = \underbrace{\sum_{n=1}^N e^{i\mathbf{k}\hat{\mathbf{x}}(n-1)d}}_{\text{Beugungsbild von } N \delta\text{-Spalten}} \underbrace{\int_{\sigma_n} dx'_n dy'_n e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'_n}}_{\text{Beugungsbild eines ausgedehnten Einzelspaltes } \sigma_n}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} e^{ikx} \frac{1}{2\pi} dk \sim \delta(x - x')$$

1. Term im Produkt  $\tilde{E}$ :

Beugungsbild eines Gitters aus unendlich dünnen Spalten

$$\sigma_{n\delta} = \delta(\mathbf{r}'_n - d(n-1)\hat{\mathbf{x}})$$

$$\tilde{E} \sim \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dx'_n \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dy'_n e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'_n}$$

$\Rightarrow$  gesamtes Beugungsbild  $\tilde{E}$  hat periodische Struktur im Ortsraum:

Faltung aus Beugungsbild vom Einzelspalt und Beugungsbild einer periodischen Anordnung von  $\delta$ -Funktionen!

im  $k$ -Raum: Produkt

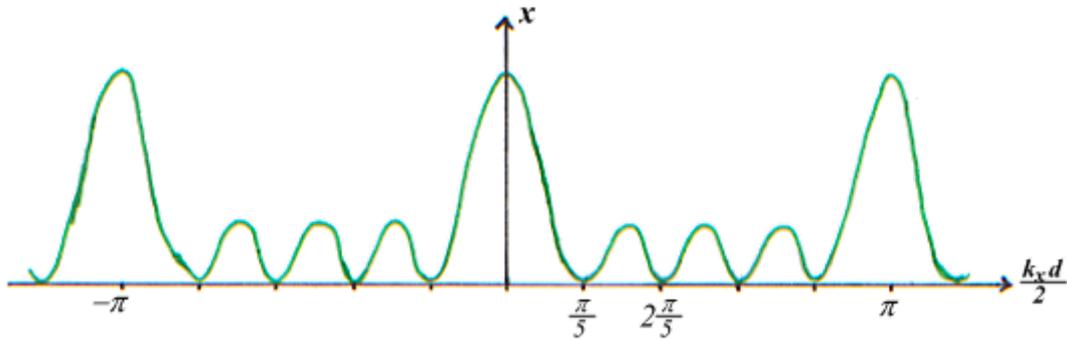
Ausblick: Röntgenanalyse von Kristallen  $\rightarrow$  Vorlesung Festkörperphysik

### 1.10.3.4 Beugung am Strichgitter

Annahme:  $\delta$ -Spalte:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &\sim \sum_{n=1}^N e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}(N-1)d} = \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{ik_x x'} \sum_{n=1}^N \delta(x - d(n-1)) \\ &= \frac{1 - e^{ik_x dN}}{1 - e^{ik_x d}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I \sim |\tilde{E}| \sim \frac{\sin^2 \frac{k_x dN}{2}}{\sin^2 \frac{k_x d}{2}}$$

Abbildung 1.34: Beugungsbild eines Gitters aus  $N = 5$  Spalten

- Hauptmaxima bei  $\frac{k_x d}{2} = n\pi$ ; Intensität  $\sim N^2$
- Minima bei  $\frac{N k_x d}{2} = \pm\pi; \pm 2\pi; \dots; \pm(N-1)\pi$
- Beugungswinkel  $\vartheta_{max}$  für Maximum:

$$k_x = k \sin \vartheta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \vartheta$$

$$\Rightarrow \frac{\pi d}{\lambda} \sin \vartheta_{max} = n\pi$$

$$\sin \vartheta_{max} = \frac{n\lambda}{d} \quad n \in \mathbb{N}$$

n: Beugungsordnung

Versuch: Beugung am Gitter:

- Beleuchtung mit Helium-Neon Laser ( $\lambda = 633\text{nm}$ )
- Beugungsbild: Produkt aus  $\delta$ -Gitter mal Einzelspalt
- Beleuchtung mit Weißlicht aus Kohlenbogenlampe

→ Anwendung Beugungsgitter: spektrale Zerlegung von Licht  $\lambda = \frac{d}{n} \sin \vartheta_{max}$

- Breite des Hauptmaximums, umgerechnet auf Wellenlänge

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda}{nN}$$

⇒ spektrale Auflösung des Beugungsgitters:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{nN}$$

technischer Aufbau eines Gitterspektrometers:

- Abbildung Eintrittsspalt auf Austrittsspalt durch Konkavspiegel
- Selektion von  $\lambda$  durch drehbares Reflexionsgitter
- Auflösung gegeben durch
  - Anzahl  $N$  der beleuchteten Spalte auf dem Gitter bzw. Anzahl der Linienpaare/mm z.B. LP/mm=570
  - Breiten des Eintritts- und Austrittsspalt (geometrisch-optisch)

## 1.11 Streuung

### 1.11.1 Phänomen der Streuung von Wellen

Z.B. werden Wasserwellen an Hindernis abgelenkt. Oder (Kinoprojektor-)Licht wird an Ascheteilchen in der Luft abgelenkt.

Effekt der Ablenkung wird als *Streuung* bezeichnet wenn Größe  $L$  des Hindernisses kleiner ist als die Wellenlänge ( $L \ll \lambda$ ).

(Für  $L \gg \lambda$  ist es *Beugung*; bei  $L \approx \lambda$  spricht man von *Mie-Streuung*)

Wenn Frequenz des gestreuten Feldes gleich der Frequenz des einfallenden Feldes ist ( $\omega_{St} = \omega_I$ ), spricht man von „*elastischer Streuung*“ (RAYLEIGH, THOMSON, ...), bei unterschiedlichen Frequenzen ( $\omega_{St} \neq \omega_I$ ) von *inelastischer* (BRILLOUIN, COMPTON, ...).

Sehr wichtig für Strukturanalyse kleinster Objekte (Atom, -kern, etc.) und transparenter Festkörper!

### 1.11.2 Streuquerschnitte

Information über kleinste Objekte gewinnt man nur durch Messung der Frequenz- ( $\hat{=}$  Energieübertragung) und Streuwinkel-/Wellenvektor- ( $\hat{=}$  Impulsübertrag) Abhängigkeit der gestreuten Welle bei bekannter eingestrahelter Welle.

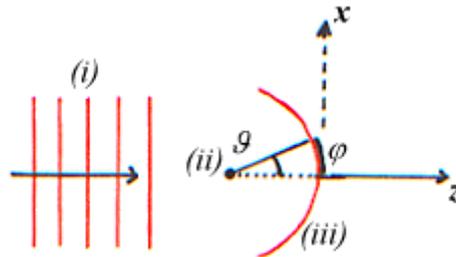


Abbildung 1.35: (i) einfallende Welle so einfach wie möglich (ii) Streuprozess: Wechselwirkung der Welle mit Atom (Kern etc.); Ziel des Streuexperiments (iii) auslaufende Kugelwelle

(i): Einfallende Welle weit vor Streuer: eben, monochromatisch,  
 $\mathbf{E}_I = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \Rightarrow \langle \mathbf{S}_I \rangle = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\mathbf{E}_0|^2 \hat{\mathbf{z}}$

(ii): Streuprozess: Wechselwirkung von Welle mit Atom(en) etc. (kompliziert; Ziel des Streuexperiments)

(iii): nach der Streuung: Auslaufende Kugelwelle.

Intensität  $\mathbf{S}$  durch Flächenelement  $d\mathbf{o}$  in Richtung  $\hat{\mathbf{n}}$

$$\begin{aligned} d\mathbf{o} &= \hat{\mathbf{n}} (r d\vartheta) (r \sin \vartheta d\varphi) \\ &= \hat{\mathbf{n}} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \hat{\mathbf{n}} r^2 d\Omega \quad \text{Raumwinkelelement: } d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \end{aligned}$$

und

$$\int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \vartheta = \oint d\Omega = 4\pi$$

(zeitliche gemittelte) in Raumwinkel  $d\Omega = \frac{\hat{\mathbf{n}}}{r^2} d\mathbf{o}$  gestreute Leistung wird in Detektor mit Oberfläche  $|d\mathbf{o}| = r^2 d\Omega$  gemessen.

$$dW(\vartheta, \varphi) = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{o} = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle r^2 d\Omega$$

Bemerkung:  $dW$  ist unabhängig von  $r$  (siehe unten).

**(A) Totaler Streuquerschnitt  $\sigma$** 

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\text{totale durch Kugelfl. } 4\pi r^2 \text{ gestreute zeitl. gemittelte Intensität}}{\text{totale eingestrahlte zeitl. gem. Int.}} \\ &= \frac{\int dW}{\langle \mathbf{S}_I \cdot \hat{\mathbf{z}} \rangle} \\ \sigma &= \frac{\oint d\Omega r^2 \langle \mathbf{S}_s \cdot \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{S}_I \cdot \hat{\mathbf{z}} \rangle}\end{aligned}$$

**Bem:**  $[\sigma] = m^2$  ;  $\sigma$  ist eine Fläche ( $\hat{=}$  die Streuer dem eingehenden Fluss präsentiert)

**(B) Differentieller Streuquerschnitt  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$** 

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\text{in Oberflächenelement } d\omega = r^2 d\Omega \text{ mit Raumwinkel } \Omega(\vartheta, \varphi) \text{ um } \hat{\mathbf{n}} \text{ gestreute zeitl. gem. Intensität}}{\text{totale eingestrahlte zeitl. gem. Intensität}} \\ &= \frac{dW(\vartheta, \varphi)}{\langle \mathbf{S}_I \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle r^2 d\Omega}{\frac{\epsilon_0 c}{2} |\mathbf{E}_0|^2} \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{r^2 \langle \mathbf{S}_I \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{S}_I \hat{\mathbf{z}} \rangle} \\ \Rightarrow \sigma &= \oint d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}\end{aligned}$$

Gibt mehr Information (Winkelabhängigkeit) über Streuprozess als  $\sigma$ .

**Bem:** Da  $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Omega, \omega)$  hier auch von  $\omega$  abhängt, spricht man häufig vom doppelten differentiellen Streuquerschnitt  $\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}$  und definiert dann  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\omega \frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}$ .

**Bsp:** Streuquerschnitt der Beugung an Kreislochblende (1.10.4).

$$\begin{aligned}\tilde{E} \stackrel{\vartheta \ll 1}{\approx} E_I \frac{i}{\lambda r} e^{-i\frac{\omega}{c}r} \int_{\sigma} d\omega' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \Big|_{z'=0} \\ \Rightarrow \left| \frac{\tilde{E}}{\tilde{E}_I} \right|^2 = \left( \frac{k a^2}{r} \right)^2 \left( \frac{J_1(k a \vartheta)}{k a \vartheta} \right)^2 \\ \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = a^2 (k a)^2 \left( \frac{J_1(k a \vartheta)}{k a \vartheta} \right)^2}\end{aligned}$$

Starke Vorwärtsstreuung für  $a \gg \lambda$ .

Frequenzabhängigkeit:  $\lambda \propto \frac{1}{k} \propto \frac{1}{\omega}$ ; je größer  $\omega$  desto kleiner  $\lambda$  und desto engere Vorwärtsrichtung.

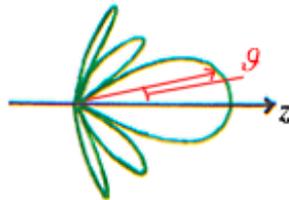


Abbildung 1.36: Streudiagramm:  $\vartheta_{min} = \pm 0,6 \frac{\lambda}{a}$ ; Länge des Vektors:  $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta)$

Geometrische Optik entspricht  $\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow$  nur Licht in exakte Vorwärtsrichtung  $\vartheta = 0$ .

Totaler Streuquerschnitt

$$\sigma = \oint d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$$\sigma = \underbrace{2\pi}_{(*)} a^2 \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \left( \frac{J_1(ka\vartheta)}{\vartheta} \right)^2}_{(**)} \approx \pi a^2$$

da (\*): Symmetrie um z-Achse  $\int d\varphi \dots = 2\pi \dots$

(\*\*):  $\approx \int_0^\pi d\vartheta \vartheta \frac{J_1^2(ka\vartheta)}{\vartheta^2} \approx \frac{1}{2}$  da  $a \gg \lambda \Rightarrow \vartheta \ll 1$

Geometrische Fläche der Lochblende  $\sigma = \pi a^2$  ergibt sich, da für  $a \gg \lambda$  geometrische Optik gilt.

### 1.11.3 Erinnerung Dipolstrahlung

#### 1.11.3.1 Ableitung aus Maxwellgleichung

Lösung der beiden inhomogenen Wellengleichungen mit nur 2 Näherungen.

(1.22) aus 1.1.2

#### (A) Lokalisierte Quelle und Fernfeldnäherung

$$\tilde{\mathbf{j}}(|\mathbf{r}'| > r_0, \omega) \equiv 0 \quad \text{und} \quad r \rightarrow \infty$$

gegebene Quelle lokalisiert.

$\Rightarrow$  GREEN'sche Funktion der HELMHOLTZgleichung in Fernfeldnäherung vereinfacht zu ( $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{n}} \frac{\omega}{c}$ ) mit  $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{4\pi r} e^{-i\frac{\omega}{c}r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'}$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{-i\omega}{c} (\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \omega)) \frac{1}{r} e^{-i\frac{\omega}{c}r}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -c (\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega))$$

mit  $\tilde{q}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', \omega)$

FOURIER-transformierte Ströme in Quelle (z.B. Antenne) legen Fernfelder fest. Die Strahlungsfelder sind auslaufende Kugelwellen, transversal ( $\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0$  mit  $|\tilde{\mathbf{B}}| = \frac{1}{c} |\tilde{\mathbf{E}}|$ ) und fallen für  $r \rightarrow \infty$  wie  $\frac{1}{r}$  ab.

$\Rightarrow$  Ausgestrahlte Leistung im Raumwinkel  $d\Omega$  um Richtung  $\mathbf{n}$  (zeitl. gemittelt).

$$\left( \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \hat{\mathbf{n}} |\tilde{\mathbf{E}}|^2 = \frac{\varepsilon_0 c^3}{2} \hat{\mathbf{n}} |\tilde{\mathbf{B}}|^2 \right)$$

$$P = \frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \omega^2 |\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \omega)|^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \rangle \quad (1.24)$$

#### Larmor Formel

**Bemerkung:**

- $P$  ist unabhängig vom Abstand  $r$ , da  $|\mathbf{S}| = \frac{1}{r^2}$  und  $d\Omega = r^2 d\Omega$
- Ein zeitlich konstanter Strom  $j \approx \tilde{j}(\omega) e^{i\omega t}|_{\omega=0}$  entspricht  $\omega = 0$ , also  $\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = 0$ . (Nur / jede beschleunigte Ladung strahlt)

**(B) Multipolentwicklung** Für  $|\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'| \ll 2\pi \Leftrightarrow r_0 \ll \lambda$  kann  $\tilde{q}(\mathbf{k}, \omega)$  Taylor entwickelt werden:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \left( \tilde{\mathbf{d}}(\omega) + i\mathbf{k} \underline{\underline{Q}}(\omega) + \delta(k^2) \right)$$

Diese Entwicklung heißt Multipolentwicklung mit führendem Term der Dipolstrahlung ( $\underline{\underline{Q}}$ : Quadrupolstrahlung, etc.). Wobei:  $\tilde{\mathbf{d}}(\omega) = \int d^3r' \mathbf{r}' \tilde{\rho}(\mathbf{r}', \omega)$  frequenzabh. Dipolmoment.

$$\tilde{\mathbf{q}}(0, \omega) = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \tilde{\mathbf{d}}(\omega)$$

Für Atome  $\lambda \approx 10^{-7}\text{m}$ ,  $r_0 \lesssim 10^{-9}\text{m}$  gute Näherung.

### Dipolstrahlung - Genaue Herleitung

Lösung der inhomogenen elektromagnetischen Wellengleichung mit 2 Näherungen.

(A) Fernfeld für  $r \gg r_0$

(B) Multipolentwicklung für  $r_0 \ll \lambda$

für lokalisierte Quellen (z.B. Atom  $r_0 \lesssim 10^{-9}\text{m}$ )

Für monochromatische Felder  $\sim e^{i\omega t}$  gilt:

$$\begin{aligned} \left[ \nabla^2 + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right] \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) &= -\mu_0 \nabla \times \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \left[ \nabla^2 + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right] \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= i\omega\mu_0 \left[ \tilde{\mathbf{j}} + \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 \nabla (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}}) \right] \end{aligned}$$

Lösung mit GREENScher Funktion der HELMHOLTZgleichung in Fernfeldnäherung.

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow \frac{-1}{4\pi r} e^{-i\frac{\omega}{c}r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'}$$

Da

$$\begin{aligned} & \int d^3r' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \nabla_{r'} \times \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', \omega) \\ &= -i\frac{\omega}{c} \mathbf{n} \times \int d^3r' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', \omega) \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{B}} &\rightarrow \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r} e^{-i\frac{\omega}{c}r} \mathbf{n} \times \int d^3r' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', \omega) \\ \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{B}} &\rightarrow \frac{-i\omega}{c} \frac{1}{r} e^{-i\frac{\omega}{c}r} \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \omega) \\ \text{mit } \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', \omega) \end{aligned}$$

Analog gilt wegen

$$\begin{aligned} & \int d^3r' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \left[ \tilde{\mathbf{j}} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} \right) \nabla (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}}) \right] \\ &= \int d^3r' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \left[ \tilde{\mathbf{j}} - \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{j}}) \right] \\ &= -\mathbf{n} \times \left( \mathbf{n} \times \int d^3r' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', \omega) \right) \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{E}} &\rightarrow \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-i\frac{\omega}{c}r} \mathbf{n} \times \left( \mathbf{n} \times \oint d^3r' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', \omega) \right) \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{E}} &\rightarrow -c \left( \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) \right) \quad \text{Transversalwellen!} \end{aligned}$$

Die Multipolentwicklung einer (neutralen!) Quelle folgt aus (1.5) und (1.6).

$$\left. \begin{aligned} \frac{i}{\mu_0} \nabla \times \tilde{\mathbf{B}} &= \tilde{\mathbf{j}} + i \omega \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}} \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} &= \frac{\tilde{\rho}}{\varepsilon_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}} = -i \omega \tilde{\rho} \quad (\text{Ladungserhaltung})$$

$$\Rightarrow \int d^3 r' e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', \omega) = -i \mathbf{k} \cdot \int d^3 r' e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', \omega)$$

$$= -i \omega \int d^3 r' e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \tilde{\rho}(\mathbf{r}', \omega) \quad (\text{für lokale Quellen})$$

$$\doteq -i \omega \left\{ \underbrace{\int d^3 r' \tilde{\rho}(\mathbf{r}', \omega)}_{=0 \text{ Wegen Ladungsneutralität}} + i \mathbf{k} \cdot \int d^3 r' \mathbf{r}' \tilde{\rho}(\mathbf{r}', \omega) + \dots \right\}$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{d}}(\omega) := \int d^3 r' r' \tilde{\rho}(\mathbf{r}', \omega) = -\frac{4 \pi i}{\omega \mu_0} \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k} = 0, \omega)$$

⇒ Damit folgt das Dipol-Fern-Strahlungsfeld:

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) \rightarrow \frac{\omega^2}{4 \pi \varepsilon_0 c^2} (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{d}}(\omega)) \frac{1}{r} e^{-i \frac{\omega}{c} r}$$

⇒ und die zeitlich gemittelte Strahlungsleistung

$$P_D = \frac{\omega^4}{32 \pi^2 \varepsilon_0 c^3} |\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{d}}(\omega)|^2$$

Für elektrischen Dipol mit  $\tilde{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{x}} \tilde{d}(\omega)$

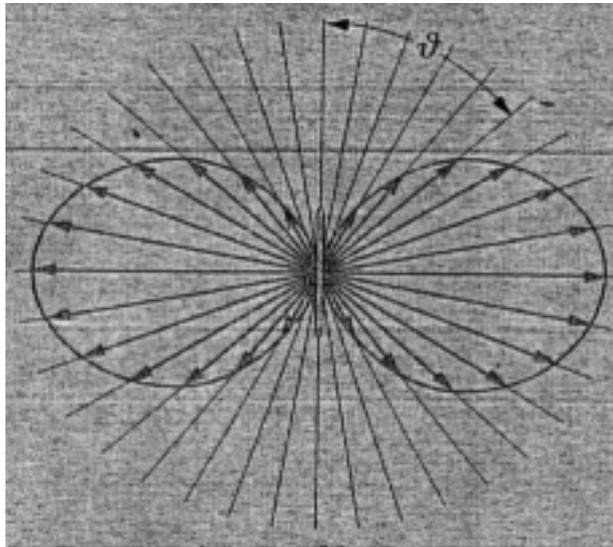


Abbildung 1.37: Das Strahlungsdiagramm eines HERTZ-Oszillators. Es besteht Rotationssymmetrie um die Dipolachse

$$\Rightarrow |\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{d}}|^2 = \sin^2 \vartheta |\tilde{d}(\omega)|^2$$

$$P_{eD} = \frac{\omega^4}{32 \pi^2 \varepsilon_0 c^3} |\tilde{d}(\omega)|^2 \sin^2 \vartheta$$

**Hertz'sche Dipol-Strahlung**

### 1.11.3.2 Winkelabhängigkeit

für elektrischen Dipol:  $\tilde{\mathbf{d}} = \tilde{d}(\omega)\hat{\mathbf{x}}$

$$\Rightarrow \left| \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{d}}(\omega) \right|^2 \sim \sin^2 \vartheta$$

$$P_{eD} = \frac{\omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \left| \tilde{d}(\omega) \right|^2 \sin^2 \vartheta$$

Ausstrahlung maximal: senkrecht zur Dipol-Achse

Ausstrahlung gleich Null: parallel zur Dipol-Achse

Intensität:  $P \sim \omega^4 \left| \tilde{d}(\omega) \right|^2$

### 1.11.4 Rayleigh-Streuung

Einfachstes Streumodell an gebundenen Ladungen.

Streuprozess modelliert, dass einfallende Welle polarisierbare Punktatome („LORENTZ-Modell“) zu Dipolstrahlung anregt.

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{d}} = \alpha_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}_I(\mathbf{r} = 0, t) = \alpha_0 \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}_I e^{i\omega t}$$

$\alpha_0$  : atomare Polarisierbarkeit ( $\alpha_0 = \frac{e^2}{m_e \omega_0^2}$  im LORENZ'schen Atom)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} = \frac{P_{eD}}{\frac{\varepsilon_0 c}{2} |\tilde{\mathbf{E}}_I|^2} = \frac{\alpha_0^2 \omega^4}{16 \pi^2 c^4} \sin^2 \vartheta} \quad \text{RAYLEIGH-Streuerquerschnitt}$$

**Bem:**

- Wenn Material (völlig) homogen ist, gibt es zu jedem Streuzentrum ein zweites im Abstand  $\frac{\lambda}{2}$  in jede Richtung.  $\Rightarrow$  Alles gestreute Licht interferiert destruktiv  
Nur in Vorwärtsrichtung interferieren gestreutes und einfallendes  $\mathbf{E}$ -Feld zum  $\mathbf{D}$ -Feld. (Siehe Erklärung zum Brechungsindex)
- Also nur Inhomogenitäten, wie Dichtefluktuationen/Staubteilchen etc. in Luft führen zur blauen Farbe des Himmels, auf Grund der Proportionalität zur vierten Potenz der Frequenz.

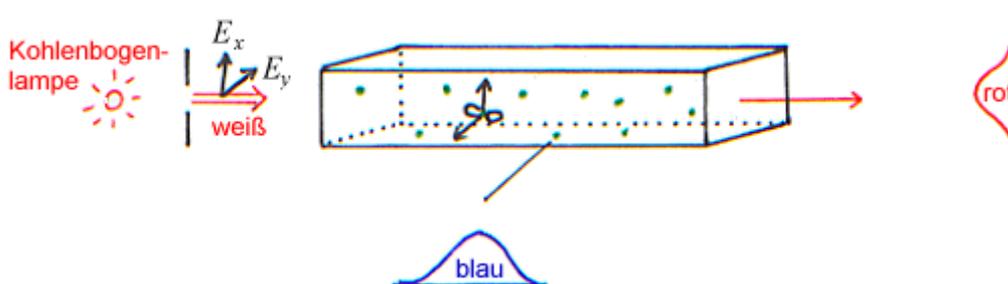
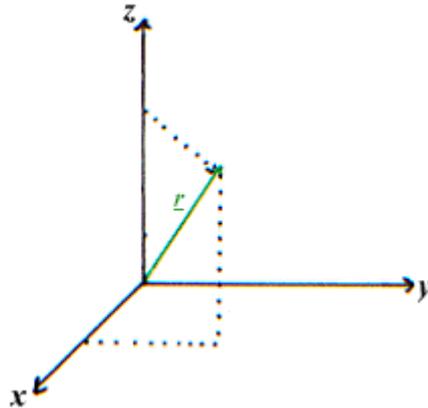


Abbildung 1.38: Versuchsskizze:  $\sigma_{\text{Rayleigh}} \sim \omega^4$

## 2 Spezielle Relativitätstheorie

### 2.1 Einschub: Konzepte und Definitionen

#### 2.1.1 (kartesische) Koordinaten



Jeder Punkt im Raum besitzt Raumkoordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Jeder Punkt in Raum und Zeit besitzt **Raum-Zeit-Koordinaten**:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

#### 2.1.2 Minkowski-Raum

##### Minkowski-Metrik und Einstein'sche Inertialsysteme

Alle Punkte (Ereignisse) in der Raum-Zeit  $\mathbf{x}$  mit  $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}$ ,  $x^i \in \mathbb{R}$  konstituieren einen MINKOWSKI-Raum  $M$ , wenn eine Metrik gegeben ist, so dass das Längenelement einer beliebigen Kurve lautet:

$$\boxed{dl^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

$g_{\mu\nu}$  heißt MINKOWSKI-Tensor oder MINKOWSKI-Metrik. Ein MINKOWSKI-Raum mit einem Koordinatensystem, so dass

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

lautet, heißt Inertialsystem. Denn dann gilt:

$$dl^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

**Bemerkung:**

- Vergleichen wir  $M$  mit dem euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$ , in dem gilt:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad \text{mit} \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Krummlinige Koordinaten werden nicht diskutiert, da diese komplizierter sind.
- $g_{\mu\nu}$  definiert ein Skalarprodukt:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

Wir definieren

$$a_\nu := g_{\mu\nu} a^\mu = \sum_{\mu=0}^3 g_{\mu\nu} a^\mu = (a^0, -\mathbf{a})$$

sodass  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_\mu b^\mu$  kovarianter Vektor  $\mathbf{a}$  ist.

Die Inverse zu  $g_{\mu\nu}$  ist  $g^{\mu\nu}$ , also

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\kappa} = \delta_\kappa^\mu = \begin{cases} 1 & \mu = \kappa \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und lautet im Inertialsystem:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}$$

### 2.1.3 Definition der Lorentz-Transformationen als ausgezeichnete Koordinatentransformationen

Eine homogene Koordinatentransformation  $x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu$  heißt ausgezeichnet, wenn sie Inertialsysteme in Inertialsysteme überführt, d.h. wenn gilt:

$$g_{\mu\nu} = L^\kappa_\mu L^\lambda_\nu g'_{\kappa\lambda} \quad \text{und} \quad g_{\mu\nu} \stackrel{!}{=} g'_{\mu\nu} \quad (2.1a)$$

In Matrixschreibweise sieht das so aus:

$$g = L^T g' L \quad (2.1b)$$

Dazu muss gelten:

$$g^{\sigma\mu} g_{\mu\nu} = g^{\sigma\mu} L^\kappa_\mu L^\lambda_\nu g_{\kappa\lambda}$$

$$\delta_\nu^\sigma = L^\sigma_\lambda L^\lambda_\nu = (L^{-1})^\sigma_\lambda L^\lambda_\nu$$

also  $(L^{-1})^\sigma_\lambda = L^\sigma_\lambda$  in Matrixschreibweise

$$L^{-1} = (gLg)^T \quad (2.1c)$$

Daraus folgt:  $\det(L) = \pm 1$

Die Transformationsregel  $g = L^T g' L$  folgt aus Betrachtung des Längenelementes:

$$dl'^2 = g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g'_{\mu\nu} L^\mu_\kappa L^\nu_\lambda dx^\kappa dx^\lambda$$

welches in IS und IS' gleich berechnet wird:

$$dl^2 = g_{\kappa\lambda} dx^\kappa dx^\lambda$$

also

$$g_{\kappa\lambda} = g'_{\mu\nu} L^\mu_\kappa L^\nu_\lambda$$

wobei

$$x'^\mu = L^\mu_\kappa x^\kappa$$

Die Aussage „ $L$  ist ausgezeichnete Koordinatentransformation“ bedeutet nun  $\Leftrightarrow$  Längenberechnung in KS, KS', die mit  $L$  verknüpft sind, lauten identisch ( $g' \stackrel{!}{=} g$ ).

**Bemerkung:**

- Ausgezeichnete Koordinatentransformation im euklidischen  $\mathbb{R}^3$  sind Orthogonaltransformationen und sind durch eine Rotationsmatrix gegeben. ( $g_{ij} = 1 \rightarrow 1 = R^T R$ )
- Die ausgezeichneten Koordinatentransformationen heißen LORENTZtransformationen im MINKOWSKIraum.

2.1.4 Tensoren

Tensoren sind Verallgemeinerung des Konzeptes Vektoren, Skalaren, Matrix etc.

**Bsp.:** Rotation: KS  $\rightarrow$  KS'

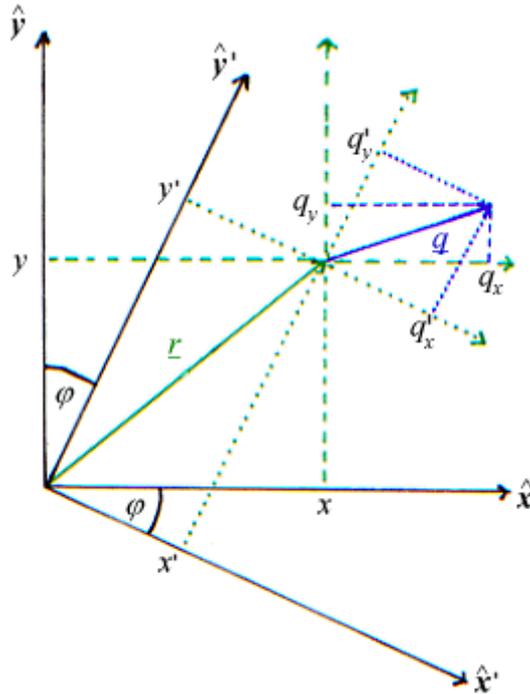


Abbildung 2.1: Tensoren am Beispiel von Rotation des Koordinatensystems

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{Rotation des Vektors: } \begin{pmatrix} q'_x \\ q'_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ein Vektor erfüllt also bei einer Koordinatentransformation

$$x'^i = R^i_j x^j \quad \text{also} \quad q'^i = R^i_j q^j$$

mit Rotationsmatrix  $R$  die Transformationseigenschaft

$$q'^i(\mathbf{x}') = R^i_j q^j(\mathbf{x})$$

Verallgemeinert mit der Matrix  $D^\mu_\nu$  der Koordinatentransformation ( $D \hat{=} R$  für euklidischen  $\mathbb{R}^3$ ; LORENTZ-Transformation im MINKOWSKI-Raum) nennt man das  $d^N$ -Tupel ( $d = 3$  in  $\mathbb{R}^3$ ;  $d = 4$  in  $M$ ) von Zahlen  $t^{\mu(1)\mu(2)\dots\mu(N)}(\mathbf{x})$  ( $\mu_i = 0,1,2,3$  in  $M$ ) kontravarianten Tensor  $N$ -ter Stufe, wenn er unter der Koordinatentransformation transformiert gemäß

$$t'^{\mu(1)\dots\mu(N)}(\mathbf{x}') = d(D) D^{\mu(1)}_{\nu(1)} \dots D^{\mu(N)}_{\nu(N)} t^{\nu(1)\dots\nu(N)}(\mathbf{x}) \tag{2.2}$$

wobei gelten soll für

$$d(D) = \begin{cases} 1 & \text{Tensor} \\ \text{Det}(D) = \pm 1 & \text{Pseudotensor} \\ \frac{L_0^0}{|L_0^0|} = \pm 1 & \text{zeitartigen Pseudotensor} \end{cases}$$

**Bsp.:**

- Im euklidischen  $\mathbb{R}^3$ :

- Bei Ladungen  $Q$  sind Ladungsdichten  $\rho(\mathbf{r}, t)$  ein Skalar (-feld) (Tensor 0-ter Stufe, der von  $\mathbf{r}, t$  abhängt),  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  und  $\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$  Vektoren (Tensor 1-ter Stufe),
- $\mathbf{B}$  ein Pseudovektor (d.h. unter Spiegelung  $x^i = -x^i$  wird  $\mathbf{j}'(\mathbf{r}', t) = -\mathbf{j}(-\mathbf{r}, t)$  und  $\nabla' = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = -\nabla$  deswegen muss  $\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t) = \mathbf{B}(-\mathbf{r}, t)$  damit  $\mathbf{j}'(-\mathbf{r}', t) = \nabla' \times \mathbf{B}'(-\mathbf{r}', t) = -\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  gilt)
- ist das KRONECKER-Delta  $\delta_{ij}$  ein symmetrischer Tensor 2-ter Stufe = Matrix
- ist der LEVI-CIVITA-Symbol  $\varepsilon_{ijk}$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \\ -1 & \varepsilon_{jik} = \varepsilon_{ikj} = \varepsilon_{kji} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Pseudotensor 3-ter Stufe.

Mit ihm lautet das Vektorprodukt  $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \Rightarrow a_i = \varepsilon_{ijk} b_j c_k$

- ist ein antisymmetrischer Tensor 2-ter Stufe  $M_{ij} = -M_{ji}$  eindeutig verknüpft mit einem Pseudovektor  $\mathbf{m}$ :

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & m^3 & -m^2 \\ -m^3 & 0 & m^1 \\ m^2 & -m^1 & 0 \end{pmatrix}$$

sodass  $\underline{\underline{M}}\mathbf{a} = \mathbf{m} \times \mathbf{a}$

- Im MINKOWSKIRAUM:

- ist  $g^{\mu\nu}$  ein (symmetrischer) Tensor 2-ter Stufe
- ist  $t_\mu^\nu = g_{\mu\nu} t^{\mu\nu}$  ein gemischter kontra und kovarianter Tensor 2-ter Stufe und wird transformiert wie  $t_\mu^\nu = g'_{\mu\nu} t'^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} L_\sigma^\mu L_\tau^\nu t^{\sigma\tau} = L_\mu^\sigma L_\tau^\nu t_\sigma^\tau = (L^{-1})^\sigma_\mu L_\tau^\nu t_\sigma^\tau$

**Verjüngung:** Ein Tensor  $N$ -ter Stufe ergibt nach Absummierung zweier Indizes einen Tensor  $(N-2)$ -ter Stufe.

$$s^{\mu(1)\dots\mu(N-2)} = g_{\mu(N-1)\mu(N)} t^{\mu(1)\dots\mu(N)} = g_{\nu\kappa} t^{\mu(1)\dots\mu(N-2)\nu\kappa} = \sum_{\nu=0}^4 t^{\mu(1)\dots\mu(N-2)\nu}$$

Verjüngung eines Tensors 2ter Stufe gibt Skalar, der *Spur* heißt.

- im euklidischen  $\mathbb{R}^3$ :

$$\text{Sp } t = t^{ii} = t^{11} + t^{22} + t^{33}$$

Summe der Diagonalterme

- im MINKOWSKIRAUM

$$\text{Sp } t = g_{\mu\nu} t^{\mu\nu} = t_\mu^\mu = t_\mu^\mu = t^{00} - t^{11} - t^{22} - t^{33}$$

Beispiel:  $\text{Sp } g = g_\mu^\mu = 4$ ,  $\text{Sp } 1? \delta_\mu^\mu = 4$

## 2.2 Newton'sche Mechanik

**Newton:** „Mechanische Vorgänge laufen in allen Inertialsystemen gleich ab.“

**Galilei:** „Zwei Inertialsysteme sind durch eine GALILEI-Transformation miteinander verknüpft.“

$$x^i = \sum_{j=1}^3 R_j^i x'^j + r_0^i + v^i t \quad (2.3a)$$

$$t = t' + t_0 \quad (2.3b)$$

mit Konstanten  $R_j^i$ ,  $r_0$ ,  $t_0$ ;  $R_j^i$  sind Einträge einer Rotationsmatrix.

$$\sum_{j=1}^3 R_j^i R_k^j = \delta_k^i = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

In Matrix-Schreibweise also

$$\underline{R} \cdot \underline{R}^T = 1$$

**Bemerkung:** Die Indizes für Koordinaten  $x^i$  stehen oben (kontravarianter Vektor) und werden mit den

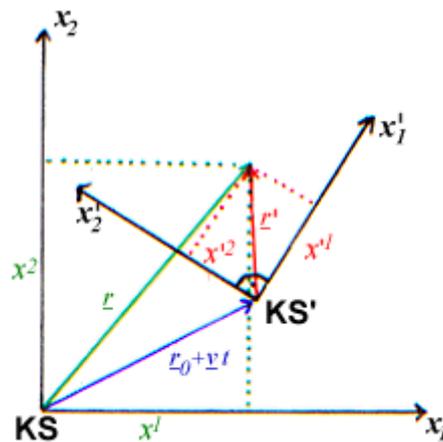


Abbildung 2.2: Transformation zweier Koordinatensysteme

Indizes unten an Matrix  $R_j^i$  absummiert.

**Abkürzung:** Im folgenden verwenden wir häufig die **Einstein'sche Summenkonvention:**

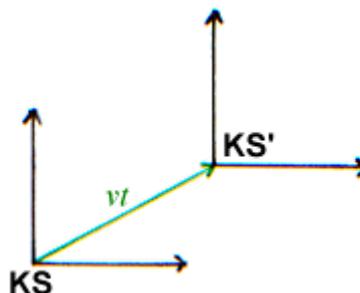
$$\sum_{j=0,1}^3 R_j^i x'^j \hat{=} R_j^i x'^j$$

doppelt auftauchende Indizes werden absummiert.

**spezielle Galilei-Transformation:**

$$x^i = x'^i + v^i t \quad (2.3c)$$

$$t = t' \quad (2.3d)$$



Bewegung entlang  $\mathbf{v}$  ohne Drehung. Transformation auf gleichförmig geradlinig bewegtes Bezugssystem.

### 2.2.1 Widerspruch der Galilei-Invarianz zur Wellengleichung und zu den Maxwell-Gleichungen

#### A) Wellengleichung:

$$\left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Die Wellengleichung ist eine Folge der MAXWELL-Gleichungen im Vakuum mit der speziellen Lösung:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

für  $\omega = ck$ . Die GALILEI-Transformation auf ein mitbewegtes Inertialsystem (mit  $\mathbf{v} = \mathbf{k} \frac{c}{k}$ ) ergibt eine stehende Welle:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}', t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \frac{k^2}{k} ct) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}')$$

Diese stehende Welle ist keine Lösung der MAXWELL-Gleichungen (Wellengleichung) im Inertialsystem  $\text{KS}'$ .

Daraus „folgern“ wir, dass sowohl die Wellengleichung als auch die Elektrodynamik nach Maxwell nicht GALILEI-invariant sind. Diese Konsistenz ist der Ausgangspunkt der speziellen Relativitätstheorie.

**B) Versuch von Michelson-Morley:** Da sich die Erde bewegt, sollte es möglich sein, unterschiedliche Lichtgeschwindigkeiten in verschiedene Richtungen zu messen. Man verwende ein MICHELSON-

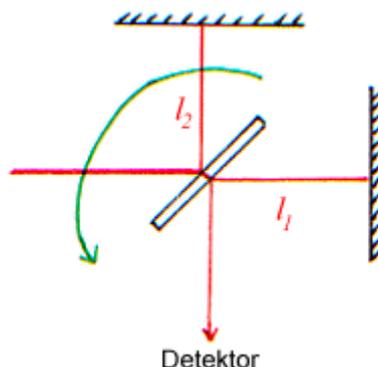


Abbildung 2.3: Michelson-Morley-Versuch: Rotation um  $c$  entlang Weg  $l_1$  oder  $l_2$  zu ändern

Interferometer und benutzt eine Rotation des Spektrometers, um Unterschiede in der Lichtgeschwindigkeit entlang der Wege 1 und 2 zu messen, welche auf Grund der Bewegung der Erde zustande kommen.

Erwarten würde man, dass die Interferenzmaxima  $N \propto \frac{L_1 + L_2}{\lambda} \left(\frac{v}{c}\right)^2$  mit der Erdgeschwindigkeit  $v$  auf Grund des großen Vorfaktors  $\frac{L_1 + L_2}{\lambda}$  messbar sind. Durch den Vorfaktor sind selbst feinste Unterschiede messbar. Im Versuch wird aber trotzdem kein Unterschied beobachtet, somit existiert keine GALILEI-Transformation auf das Erdsystem.

$\Rightarrow c$  ist konstant in allen mit  $v$  bewegten Inertialsystemen.

## 2.3 Relativitätsprinzip und Lorentztransformation

### 2.3.1 Einstein'sches Relativitätsprinzip

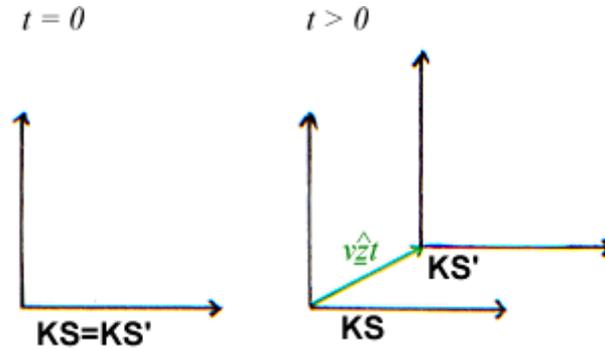
Alle physikalischen Vorgänge laufen in Inertialsystemen gleich ab, und zwei Inertialsysteme sind durch eine **Lorentztransformation** verknüpft.

### 2.3.2 Konstanz von Lichtgeschwindigkeit in Vakuum

Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  im Vakuum ist unabhängig vom Inertialsystem und ändert sich also nicht unter einer LORENTZ-Transformation.

### 2.3.3 Die spezielle Lorentz-Transformation

Betrachte zwei Intetialsysteme, die sich relativ zu einander mit  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$  bewegen.



Die Wellenfront einer vom Ursprung zu Zeitpunkt  $t = t' = 0$  ausgestrahlter Kugelwelle von Licht werde in zwei Koordinatensystemen betrachtet. Ihre Position muss gleich lauten

$$r^2 - c^2t^2 = r^2 - (x^0)^2 = r'^2 - c^2t'^2 = r'^2 - (x'^0)^2$$

Zur Vereinfachung wählt (unter der Annahme  $\mathbf{v} \parallel \hat{\mathbf{z}}$ ):

$$x'^1 = x^1 \quad \text{und} \quad x'^2 = x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{z^2 - c^2t^2 = z'^2 - c^2t'^2} \tag{*}$$

Sei die LORENTZtransformation gegeben durch die Matrix  $L$ :

$$x'^\mu = L^\mu_\nu(\mathbf{v})x^\nu \quad \text{wird absummiert}$$

(von KS nach KS' mit Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$ )

**Bemerkung:**

- wir postulieren hierbei eine lineare homogene Abbildung  
Linearität:

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \rightarrow \lambda_1 \mathbf{x}'_1 + \lambda_2 \mathbf{x}'_2$$

Homogenität:

$$\mathbf{x} = 0 \rightarrow \mathbf{x}' = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ f & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix}$$

also  $L^0_0 = a$ ,  $L^0_3 = b$  etc.

Darum lautet die Inverse Transformation

$$\begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bf} \begin{pmatrix} d & -b \\ -f & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix} \tag{**}$$

und muss Transformation von KS' nach KS mit Relativgeschwindigkeit  $-\mathbf{v}$  beschreiben. d.h. (\*\*)

$$x^\mu = L^\mu\nu(-\mathbf{v})x'^\nu$$

Wegen Isotropie des Raumes. Allgemein muss gleich bleiben bei  $z \rightarrow -z$  und  $z' \rightarrow -z'$  und  $v \rightarrow v'$  d.h.

$$\begin{pmatrix} ct \\ -z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a(-\nu) & b(-\nu) \\ f(-\nu) & d(-\nu) \end{pmatrix}}_{L^\mu\nu(-\mathbf{v})} \begin{pmatrix} ct \\ -z \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$L^M_{\nu(-\mathbf{v})} = \frac{1}{ab - d\bar{f}} \begin{pmatrix} da & \nu \\ fa & a\bar{a} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a(-\nu) & b(-\nu) \\ f(-\nu) & d(-\nu) \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} ad - bf &= \det(L) = 1 \\ b &= \bar{b}(\nu^2) \quad \text{und} \quad f = v\bar{f}(\nu^2) \end{aligned}$$

damit in (\*)

$$\begin{aligned} z^2 - c^2 t^2 &= (az + v\bar{f}ct)^2 - (act + v\bar{b}z)^2 \\ &= (a^2 - v^2\bar{b}^2)z^2 - (a^2 - v^2f^2)c^2t^2 + 2av(\bar{f} - \bar{b})ctz \\ &\Rightarrow \bar{f} = \bar{b} \quad \text{und damit} \quad a^2 - v^2\bar{b}^2 = 1 \quad \text{d.h.} \quad a^2 - b^2 = 1 \end{aligned}$$

Damit kann der Winkel  $\varphi$  eingeführt werden mit

$$\begin{aligned} a &= d = (\pm) \cosh \varphi \\ b &= f = (\pm) \sinh \varphi \end{aligned}$$

sodass

$$L^{\mu}_{\nu}(v) = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}$$

mit

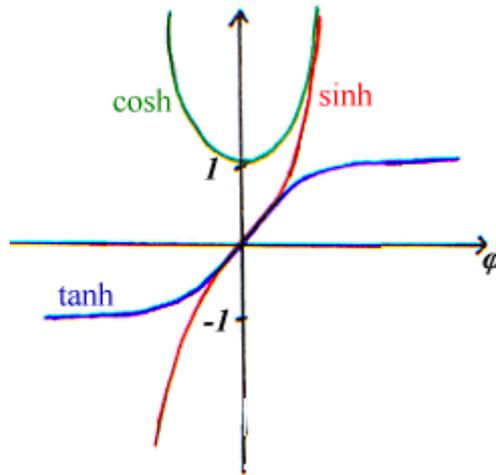


Abbildung 2.4: Darstellung von  $\cosh$ ,  $\sinh$  und  $\tanh$

$$\begin{aligned} \gamma &= \cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \beta &= \tanh \varphi \\ \Rightarrow L^{\mu}_{\nu} &= \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

Aus Vergleich mit GALILEI-Transformation für  $v \rightarrow 0$  folgt  $\beta \rightarrow \frac{v}{c}$  und damit  $\gamma \rightarrow 1 + \sigma(\nu')$  also  $\bar{b} \rightarrow \frac{1}{c}$ .  
Aus Hintereinanderschlitzen von zwei speziellen LORENTZ-Transformationen folgt, dass

$$\boxed{\beta = \frac{v}{c}}$$

(Gruppeneigenschaft)

Es folgt also die spezielle LORENTZ-Transformation

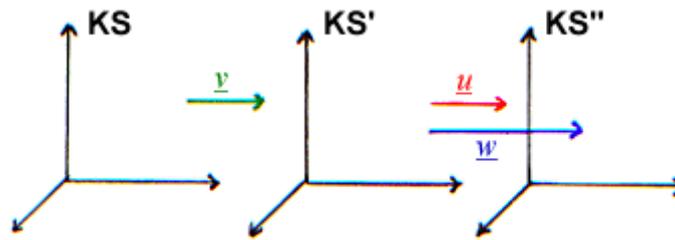
$$t' = \frac{t + \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \xrightarrow{v \ll c} t' = t \tag{2.4a}$$

$$z' = \frac{z + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow{v \ll c} z' = z + vt \tag{2.4b}$$

Für  $v \ll c$  folgt also spezielle GALILEI-Transformation.

### 2.3.4 Elementare Folgerungen

#### A) Addition von kollinearen Geschwindigkeiten



unter Annahme  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \parallel \hat{\mathbf{z}}$  (kollinear)

$$L_{\nu}^{\mu}(u) \cdot L_{\kappa}^{\nu}(v) = L_{\kappa}^{\mu}(w)$$

Für spezielle LORENTZtransformation gilt also:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ \frac{u}{c} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1 + \frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} + \frac{u^2v^2}{c^4}}}}_{*} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{v+u}{c(1 + \frac{uv}{c^2})} \\ \frac{v+u}{c(1 + \frac{uv}{c^2})} & 1 \end{pmatrix}$$

weil für \* gilt:

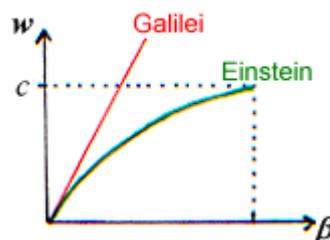
$$\frac{1}{\sqrt{\frac{(1 + \frac{uv}{c^2})^2 - (\frac{v}{c} + \frac{u}{c})^2}{(1 + \frac{uv}{c^2})^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{u+v}{c}}{1 + \frac{uv}{c^2}}\right)^2}}$$

Also: relativ zu KS bewegt sich KS'' mit der addierten Geschwindigkeit

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

#### Bemerkung:

- Dies belegt die Gruppeneigenschaft der speziellen LORENTZ-Transformationen und hätte nicht gegolten, wenn  $\beta \neq \frac{v}{c}$  gewesen wäre. (verwendet in 2.3.3)
- Sei  $u = v$  dann ist  $w = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = c \frac{2\beta}{1 + \beta^2}$  mit  $\beta = \frac{v}{c}$



**B) Raum-Zeit-Diagramme** Zwei Punkte („Ereignisse“)  $\mathbf{x}_{(1)}$  und  $\mathbf{x}_{(2)}$  mit Abstand

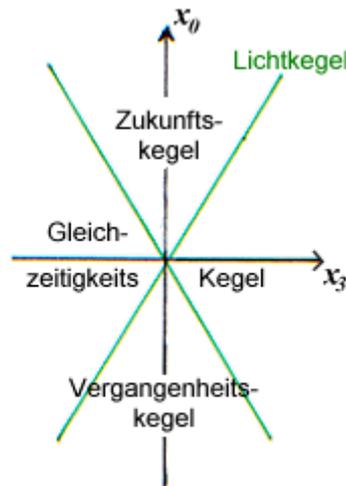
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{(1)} - \mathbf{x}_{(2)}$$

o.B.d.A.  $x^1 = 0 = x^2$  (also kein Abstand entlang  $x^1$ - und  $x^2$ -Richtung). Können nach ihren Abständen charakterisiert werden.

So ist

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= (x^0)^2 - \mathbf{v}^2 \\ &= c\Delta t^2 - \Delta z^2 \\ &= c\Delta t'^2 - \Delta z'^2 \\ &= \langle \mathbf{x}', \mathbf{x}' \rangle \end{aligned}$$

erhalten unter LORENTZ-Transformation.



- 1. Fall  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$  (also  $\Delta t^2 > \frac{\Delta z^2}{c^2}$ )  
 $\mathbf{x}$  heißt *zeitartig* und liegt im Zukunfts- / Vergangenheitskegel

→ Es gibt Inertialsystem IS, in dem beide Punkte am selben Ort  $\Delta z = 0$  stattfinden, aber mit Zeitdifferenz  $\Delta t$ .

In allen anderen Inertialsystemen IS' gilt:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > \Delta t$$

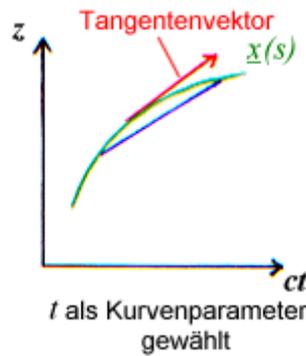
also  $\Delta t' > \Delta t$  **Zeitdilatation**

- 2. Fall:  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ , der Vektor liegt direkt auf dem Lichtkegel.
- 3. Fall:  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$ , dann heißt  $\mathbf{x}$  raumartig. Der Bereich, in dem diese Ereignisse liegen, heißt Gleichzeitigkeitskegel. Es gibt kein Inertialsystem, in dem man mit einem Lichtsignal diese beiden Punkte verbinden könnte, da das Licht nicht schnell genug ist, um von  $\mathbf{x}_{(1)}$  nach  $\mathbf{x}_{(2)}$  zu kommen. Eine Länge  $l = \Delta z$  die im Inertialsystem ruht ist im bewegten Inertialsystem kürzer:

$$l' = \Delta z' |_{\Delta t'=0} = \gamma(l - \beta^2 l) = \sqrt{1 - \beta^2} l = \frac{l}{\gamma} = l$$

(es muss bewegte Länge bei  $\Delta t' = 0$  gemessen werden, und deshalb  $\Delta t' = 0 = \gamma(\Delta t + \frac{v}{c^2} \Delta z)$  gelten)  
Dieses Verhalten wird *Längenkontraktion* genannt.

2.3.5 Weltlinien und Eigenzeit



Eine Kurve  $x(s)$  in der Raumzeit, mit  $s$  als beliebigem Kurvenparameter, (zum Beispiel der Zeit) heißt Weltlinie, wenn der infinitesimale Abstand zweier Punkte

$$dl^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 > 0$$

ist, die Tangente also zeitartig ist und das Teilchen somit nie mit Überlichtgeschwindigkeit fliegt.

Wenn das Teilchen eine eigene Uhr hat, so misst diese nach folgender Gleichung (nach Wahl von  $t$  als Kurvenparameter)

$$dl^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{r}}^2\right) = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) =: c^2 d\tau^2$$

$$\Rightarrow d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{dt}{\gamma} \tag{2.5}$$

$\tau$  ist die Eigenzeit der Weltlinie, die somit langsamer läuft. Das  $d\tau$  entspricht einem Zeitelement, das eine auf der Kurve bewegte Uhr messen würde. Diese Formel spiegelt die Zeitdilatation wieder.

2.4 Lorentz-invariante Formulierung physikal. Gesetze: 1-tes Bsp. Dopplereffekt

Umsetzung des EINSTEIN'schen Relativitäts-Prinzips: Formulierung der physik. Gesetze mit MINKOWSKI-Tensoren, z.B. Skalarprodukt  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_\mu b^\mu$  und 4er-Vektoren etc., sodass die Gesetze LORENTZ invariant sind, d.h. in allen Inertialsystemen gleich lauten.

Die Phase einer elektromagnetische Welle  $\varphi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  entspricht dem Skalarprodukt  $\varphi = g_{\mu\nu} k^\mu x^\nu$  mit 4-er Wellenvektor  $k^\mu = \begin{pmatrix} k^0 = \frac{\omega}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}$  im bewegten Bezugssystem

$$k'^\mu = L^\mu_\nu k^\nu$$

für LORENTZtransformation ( $\mathbf{v} \parallel \hat{\mathbf{z}}$ )

$$\begin{aligned} \omega' &= \gamma(\omega + v k_z) & k_z &= \frac{\omega}{c} \cos \vartheta \\ k'_z &= \gamma(k_z + \frac{\omega v}{c^2}) & k_x &= \frac{\omega}{c} \sin \vartheta \\ k'_x &= k_x \end{aligned}$$

**Bemerkung:**  $k_\mu k^\mu = 0$  ( $\mathbf{k}, \mathbf{k}$ ) ist LORENTZ invariante Schreibweise der Dispersionsrelation.

A) Longitudinaler Dopplereffekt:

$$(k_x = 0, \quad k_z = \frac{\omega}{c}, \quad \vartheta = 0)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \omega \doteq \left(1 + \frac{v}{c}\right) \omega$$

Frequenz ändert sich, wenn Abstand von Empfänger und Sender wegen der Relativbewegung abnimmt.

**B) transversaler Dopplereffekt**

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad k_z = 0, \quad k_x = \frac{\omega}{c}$$

$$\omega' = \gamma\omega = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \doteq \omega \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots\right)$$

Man spricht vom quadratischen transversalen Dopplereffekt. Dieser fehlt in der klassischen Physik komplett.

**Bemerkung:** Lösung des Widerspruchs zwischen Maxwellgleichungen und Wellengleichung zur Mechanik. Phase einer monochromatischen, ebenen Welle ist LORETZINvariant (MINKOWSKI-Skalar).

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(x^\mu k_\mu) \quad \text{in IS}$$

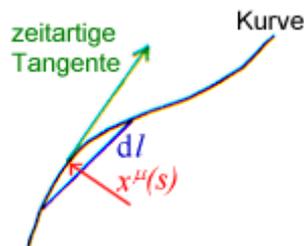
und

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t) = \mathbf{E}'_0 \cos(x'^\mu k'_\mu) \quad \text{in IS}'$$

(Transformation von  $\mathbf{E}'_0$  in QM II)

**2.5 Relativistische oder Einstein'sche Mechanik**

Die Bewegung eines Massenpunktes mit Ruhemasse  $m$  entspricht einer Weltlinie im MINKOWSKI-Raum.



$$dl^2 = dx_\mu(\tau) dx^\mu(\tau) = c^2 d\tau^2 > 0$$

dabei ist  $\tau$  die Eigenzeit als Kurvenparameter

**2.5.1 Vierergeschwindigkeit**

Wird die Weltlinie mit der Eigenzeit  $\tau$  des Massenpunktes (Uhr am Massenpunkt) parametrisiert, dann heißt der Tangentenvektor:

$$w^\mu(\tau) = \frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau) = \dot{x}^\mu(\tau)$$

**Vierergeschwindigkeit.**

Zwischen der Vierergeschwindigkeit  $w^\mu$  und der Dreiergeschwindigkeit im Raum  $\mathbf{v}$  besteht folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}(t) \\ \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} &= \frac{dx^\mu(\tau(t))}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} \\ &= \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \\ w^\mu &= \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt:

$$u_\mu u^\mu = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2 = \text{const.}$$

ist LORENTZinvariant. Das bedeutet, dass  $\frac{1}{c}u^\mu$  ein normierte Tensor 1-ter Stufe ist, der sogenannte „**Tangentenvektor**“ an der Weltlinie.

**Bemerkung:**

Daraus folgt für die Viererbeschleunigung  $\dot{u}^\mu$ :

$$\begin{aligned} \dot{u}^\mu &= \frac{d}{d\tau} u^\mu \\ \frac{d}{d\tau} c^2 &= 0 = \frac{d}{d\tau} g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \\ &= 2g_{\mu\nu} u^\mu \dot{u}^\nu \\ \Leftrightarrow u^\mu \dot{u}_\mu &= 0 \\ &\Rightarrow \dot{\mathbf{u}} \perp \mathbf{u} \end{aligned}$$

Beschleunigung ist senkrecht zur Geschwindigkeit.

### 2.5.2 Viererimpuls

**A) Relativistische Energie-Impuls Beziehung** Der räumliche Impuls  $\mathbf{p}$  wird durch die 0te Komponente  $\frac{E}{c}$  mit der totalen Energie  $E$  des Massepunktes zum Viererimpulsvektor:

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (2.6a)$$

mit LORENTZinvarianter Länge (EINSTEIN 1905):

$$p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 =: (mc)^2 \quad (2.6b)$$

mit der Ruhemasse  $m$ .

Im Ruhesystem ( $\mathbf{p} = 0$ ) gilt also:

$$E = mc^2$$

(Ruheenergie =  $c^2 \cdot$  Ruhemasse)

Allgemein gilt:

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (cp)^2} \quad (2.6c)$$

(relativistische Energie-Impuls-Beziehung)

Die verallgemeinerte Newton'sche Beziehung folgt für  $\frac{v}{c} \ll 1$ :

$$E \xrightarrow{p \rightarrow 0} mc^2 + \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\text{kin. Energie nach Newton}} + \dots$$

**Bemerkung:**

Der Ansatz  $p^\mu = (\frac{E}{c}, \mathbf{p})$  soll hier nicht bis ins Detail begründet werden. Es wird lediglich eine Motivation für diesen Ansatz gegeben:

Energie und Impuls charakterisieren die Bewegung eines Massenpunktes. Dieser hat als einzigen Parameter die Ruhemasse  $m$ . Laut EINSTEIN ist die einzige physikalisch wichtige Konstante die Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Also müssen diese beiden Dinge miteinander in Verbindung gebracht werden, was durch obigen Ansatz geschieht.

Die Energie-Masse-Äquivalenz kann z.B. bei der Kernspaltung oder Kernfusion (Deuterium + Tritium  $\rightarrow$  Helium + Neutron mit  $\frac{\Delta m}{m_{He}} \approx 8 \cdot 10^{-3} \rightarrow 18\text{MeV}$ ) beobachtet werden.

**B) Träge Masse** Eine Verbindung zwischen *Kinematik* ( $x^\mu(\tau)$  Bahn,  $u^\mu(\tau)$  Geschwindigkeit) und der *Dynamik* (Energie, Impuls) ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \text{Ansatz wie bei Newton:} \quad & p^\mu = m u^\mu \\ & p_\mu p^\mu = m^2 u_\mu u^\mu = m^2 c^2 \\ \text{woraus folgt:} \quad & p^\mu = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \gamma m \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} =: m(v) \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit der trägen Masse:

$$m(v) := m\gamma(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Es folgt 3er-Impuls  $p^\mu = m(v) \cdot \mathbf{v}$  und  $E = m(v)c^2$  (Energie-Masse-Äquivalenz), wenn der Massenpunkt die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  relativ zum Laborsystem hat.

Massenpunkt bewegt sich also mit träger Masse, wenn er Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  im Labor hat.

**Bemerkung:**

Aus  $(mc)^2 = p_\mu p^\mu$  folgt  $p_\mu \frac{d}{d\tau} p^\mu = 0$  (Impulsänderung ist senkrecht auf Impuls)

### 2.5.3 Einstein'sche Bewegungsgleichung

Es fehlt noch, wie eine Kraft den Massenpunkt beschleunigt.

**A) Minkowski-Kraft** Die Definition der MINKOWSKI-Kraft folgt in Analogie zur Newton'schen Mechanik (nur dass Vierervektoren genommen werden) Es gelte:

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = F^\mu$$

Die „eigenzeitliche Änderung“ des Impulses erfolgt auf Grund einer Krafteinwirkung. Daraus und aus den Anfangsbedingungen folgt die Bahn des Massenpunktes.

**Bemerkung:**

Wegen  $0 = p_\mu \frac{d}{d\tau} p^\mu = p_\mu F^\mu$  muss Kraft senkrecht auf  $p_\mu$  stehen, also:

$$\begin{aligned} p_\mu F^\mu &= m u_\mu F^\mu = m(cF^0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) \\ \Rightarrow u_\mu F^\mu &= 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{F}$  steht für die vertraute 3-er Kraft. also  $F^0 = \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$  ist 0-te Komponente der MINKOWSKI-Kraft die Energieänderung liefert.

**B) Lorentz-Kraft** Bsp. für  $\mathbf{F}^\mu$ : LORENTZ-Kraft beschreibt die Kraft, die elektromagnetischen Felder auf Massenpunkt mit Ladung  $q$  ausübt.

$$\mathbf{F}_{\text{Lor}}^\mu = q\gamma \begin{pmatrix} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{v}$  sind vertraute 3er Vektoren.

Aus  $\frac{d}{d\tau} p^\mu = \mathbf{F}_{\text{Lor}}^\mu$  folgt wegen  $\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p^\mu &= \frac{1}{\gamma} \mathbf{F}_{\text{Lor}}^\mu \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} m(v)c^2 &= \frac{d}{dt} E = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \\ \frac{d}{dt} m(v)\mathbf{v} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

- Gleichung 1.7 ist LORENTZ invariant

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

nur wird der Impuls mit träger Masse gebildet:  $\mathbf{p} = m(v)\mathbf{v}$

- Gleichungen 2.6 und 2.7 sind Postulate, müssen durch Beobachtung verifiziert werden
- 2.7 beschreibt Bewegung eines Massepunktes mit beliebiger Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  im Labor

Bsp.:

Experimenteller Nachweis von  $m(v)$  im Synchrotron.

Betrachte Bewegung in konstantem, homogenen Magnetfeld  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ . Wegen  $\mathbf{E} = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m(v)c^2 = 0 &\Rightarrow m(v) = \text{const.} \\ \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{const.} &\Rightarrow v^2 = \text{const.} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} m(v^2)\mathbf{v} = m(v^2)\frac{d}{dt}\mathbf{v} = q \underbrace{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}_{\text{senkrecht zu } \mathbf{v}, \mathbf{B}} \\ \Rightarrow v_z(t) = v_z^0 = \text{const.} \quad z(t) = z_0 + v_z^0 t \end{aligned}$$

lineare Bewegung entlang  $z$

Ansatz:

$$\mathbf{v}(t) = v_z^0 \hat{\mathbf{z}} + \sqrt{v_0^2 - (v_z^0)^2} (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_L t - \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_L t)$$

Kreisbewegung:

$$\Rightarrow m(v) \frac{d}{dt} \mathbf{v} = m(v^2) v_x^0 \omega_L \begin{pmatrix} -\sin \omega_L t \\ -\cos \omega_L t \\ 0 \end{pmatrix} = q v_x^0 B \begin{pmatrix} -\sin \omega_L t \\ -\cos \omega_L t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ansatz ist OK  $\rightarrow$  LARMOR-Frequenz:

$$\omega_L = \frac{qB}{m(v)} = \frac{qB}{m\gamma} = \omega_L(v) = \omega_L(E)$$

und Radius:

$$r_0 = \frac{v_x^0}{\omega_L} = \frac{m\gamma v_x^0}{qB} = r_0(v^2)$$

Die Energieabhängige Größe  $\omega_c$  und  $r_0$  geben leicht nachweisbare Überprüfungen der speziellen Relativitätstheorie Bei Atomspektren ( $(\frac{v}{c}) e^-$ ) im H-Atom ist nicht vernachlässigbar.



### 3 Analytische Mechanik

#### 3.0 Variationsrechnung

- Die NEWTON'schen Bewegungsgleichungen für  $N$  Massenpunkte (*Teilchen*) mit Massen  $m_i$   $i = 1, \dots, N$  lauten:

$$\underbrace{m_i \ddot{\mathbf{r}}_i}_* = \underbrace{\mathbf{F}_i^{ext}}_{**} + \underbrace{\sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij}^{int}}_{***} \quad \text{für } i = 1, \dots, N$$

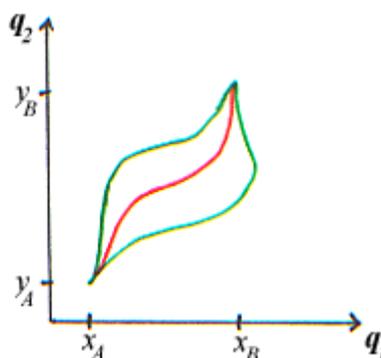
- \*: Impulsänderung
- \*\* : wirkende äußere Kraft auf Massepunkt
- \*\*\* : von Teilchen  $j$  auf Teilchen  $i$  ausgeübte interne Kräfte

Dies sind also  $f = 3N$  inhomogenene, nicht lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die zusammen mit den  $2f$  Anfangsbedingungen die Bahnen (Bewegung) der Massepunkte  $\mathbf{r}_i(t)$  beschreiben.

- Das Neue an der Formulierung der Mechanik nach LAGRANGE, HAMILTON usw. (wird analytische Mechanik genannt) leistet dasselbe: Allerdings ist sie häufig leichter lösbar. Das Prinzip der Analytischen Mechanik wird in der sogenannten „Technische Mechanik“ oft verwendet.
- Prinzip der Variationsrechnung** liegt der analytischen Mechanik zu Grunde (siehe FERMAT'sches Prinzip aus 1.6.2 ) und wurde dort auch (weiter) entwickelt und wird in fast allen Gebieten der modernen Physik verwendet.
- Konzepte der analytischen Mechanik wurden verallgemeinert zur Quantenmechanik, allgemeiner Relativitätstheorie etc.
- Die Verknüpfung von Symmetrie und Erhaltungsgrößen ist wichtigstes Konzept.

#### 3.1 Grundzüge der Variationsrechnung

##### 3.1.1 Motivation und klassische Beispiele



Im  $x - y$ -Ebene seien zwei Punkte  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  gegeben. Was ist die kürzeste Bahn / Kurve, die beide Punkte verbindet?

##### Definition einer Bahn:

Eine Abbildung  $\mathcal{C} : I \rightarrow \mathbb{R}^f$  mit  $I : [t_A, t_B]$ , die durch  $f$  stetige und stetig differenzierbare Funktionen  $q_i(t)$  mit  $i = 1 \dots f$  gegeben ist (Abkürzung  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^f$ ) heißt **Bahn** ( $t$  wird später häufig die Zeit sein).

Hier bedeutet dies also, dass  $x(t)$  und  $y(t)$  durch zweimal stetig differenzierbare Funktionen gegeben sind, mit  $x(t_a) = x_a$ ,  $y(t_a) = y_a$ ,  $x(t_b) = x_b$  und  $y(t_b) = y_b$ , dabei ist  $t_a \leq t \leq t_b$ . Die Länge der Bahn ist  $l(C) = \int ds$  mit dem Inkrement  $ds$  der Bogenlänge  $s$ .

Wir betrachten die Tangente  $\dot{\mathbf{q}}(t)$ . Mit dieser folgt:

$$\text{Bogenlänge } \Delta s \approx \text{Sekantenlänge} \approx |\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)|$$

$$\Delta s = |\dot{\mathbf{q}}(t)|\Delta t \quad \text{Unter Verwendung von Taylor für } \Delta t \rightarrow dt \rightarrow 0$$

Wobei  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{q}(t)$  Tangente der Bahn  $C$  im Punkt  $\mathbf{q}(t)$ . Wenn  $\Delta t$  infinitesimal  $\rightarrow ds = |\dot{\mathbf{q}}| dt$ :

$$\Rightarrow L(C) = \int_{t_a}^{t_b} dt \sqrt{\dot{\mathbf{q}}(t)^2} = \int_{t_a}^{t_b} dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Wir parametrisieren zur Vereinfachung die Bahn nach  $x$  um (ohne Diskussion).

Voraussetzung ist, dass  $x(t)$  umkehrbar (injektiv) zu  $t(x)$  ist mit  $t(x_a) = t_a$  und  $t(x_b) = t_b$ .

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dt}{dx} dx = \frac{dx}{\dot{x}} \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{dy}{dx} = \dot{x} y'(x) \\ \Rightarrow L(C) &= \int_{x_a}^{x_b} d\frac{1}{\dot{x}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{x}^2 y'^2} = \int_{x_a}^{x_b} dx \sqrt{1 + y'^2} \end{aligned}$$

Gesucht ist diejenige Funktion, welche  $y(x)$  minimiert.

$L$  ist ein sogenanntes **Funktional**  $L[y(x)]$ ; ist Abbildung, die der Funktion  $y(x)$  eine reelle Zahl (Länge) zuweist.

#### Definition eines Funktionals:

Es ist eine Abbildung vom Raum der Bahnkurven  $C$  in  $\mathbb{R}$  gegeben durch die Auswertung der Aufsummierung einer sogenannten *Dichtefunktion*  $L = \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  entlang der jeweiligen Bahn  $C$ :

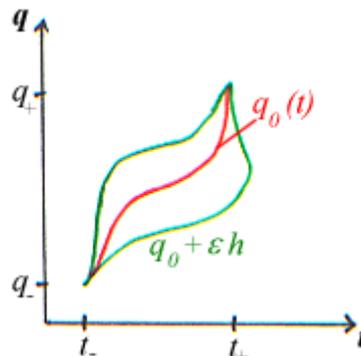
$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$$

Falls die Bahn  $C$  durch  $\mathbf{q}(t)$  bekannt ist, ist also  $L = L(t)$  bekannte Funktion ist und  $S$  ergibt sich durch Integration:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt L(t)$$

Die Variationsrechnung bestimmt somit eine Bahn  $C$  (oder  $\mathbf{q}(t)$ ), so dass  $S$  minimal oder maximal wird (allgemein: stationär). die Abhängigkeit von  $t_b - t_a$  interessiert nicht.

#### 3.1.2 Die Euler'schen Gleichungen



Gegeben ist ein eindimensionales Bahnfunktional:

$$S[q(t)] = \int_{t_-}^{t_+} dt L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

Die Bahnen sollen durch Randpunkte gegeben, durch  $q_-$  bei  $t_-$  und  $q_+$  bei  $t_+$  gehen.

D.h.  $q = q(t)$  für  $t_- \leq t \leq t_+$  mit  $q(t_-) = q_-$  und  $q(t_+) = q_+$ .  $q(t)$  sei zweimal stetig differenzierbar und  $L$  stetig differenzierbar nach seinen Argumenten. Wir vergleichen die Bahnen  $q(t) = q_0(t) + \varepsilon h(t)$ , wobei  $h(t_-) = h(t_+) = 0$  gelten muss, damit alle Bahnen  $q(t)$  durch die Endpunkte gehen. Ansonsten ist  $h(t)$  eine (in einer kleinen  $\varepsilon$ -Umgebung beliebige) Funktion.

Welches  $q_0(t)$  führt auf die Entwicklung von  $S$ :

$$S[q_0(t) + \varepsilon h(t)] = S_0 + \varepsilon S' + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

für beliebiges  $h(t)$  mit  $S' = 0$ ?

**Bemerkung:**

Dieses Problem lässt sich behandeln, in dem man das Minimum von  $S(\varepsilon)$  ermittelt.

$$\begin{aligned} S[q_0(t) + \varepsilon h(t)] &= \int_{t_-}^{t_+} dt L(q_0(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}_0(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t) \\ &\doteq \int_{t_-}^{t_+} dt \left\{ L(q_0(t), \dot{q}_0(t), t) + \frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{\substack{q=q_0 \\ \dot{q}=\dot{q}_0}} \varepsilon h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{\substack{q=q_0 \\ \dot{q}=\dot{q}_0}} \varepsilon \dot{h}(t) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Bei Variation von  $h(t)$  ist  $\dot{h}(t)$  auch fest, aber erst wenn wir alle Terme  $\sim h(t)$  zusammenfassen, können wir  $S' = 0$  für beliebiges  $h(t)$  folgern. Dies geschieht mit partieller Integration:

$$= S[q_0] + \varepsilon \int_{t_-}^{t_+} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{\substack{q=q_0 \\ \dot{q}=\dot{q}_0}} \varepsilon h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{\substack{q=q_0 \\ \dot{q}=\dot{q}_0}} \varepsilon \dot{h}(t) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Partielle Integration im zweiten Term:

$$\begin{aligned} &= S[q_0] + \varepsilon \int_{t_-}^{t_+} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{q_0, \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{q_0, \dot{q}_0} \right] h(t) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{q_0, \dot{q}_0}}_{=0} h(t) \Big|_{t_-}^{t_+} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &\hspace{15em} \text{Randterm} \\ &\hspace{15em} \text{verschwindet} \end{aligned}$$

$$= S[q_0] + \varepsilon \underbrace{\int_{t_-}^{t_+} dt h(t) \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{q_0, \dot{q}_0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{q_0, \dot{q}_0} \right]}_{S'} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Damit das Integral  $S'$  (linearer Term in  $\varepsilon$ ) für alle  $h(t)$  verschwindet, muss also  $[\dots] \equiv 0$  entlang der gesamten Bahn

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{q=q_0, \dot{q}=\dot{q}_0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{q=q_0, \dot{q}=\dot{q}_0} \stackrel{!}{=} 0}$$

dies nennt man die EULER-Gleichung

Beispiel: Kürzeste Bahn (Achtung:  $t \rightarrow x$ ) in der Ebene.

Weil  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'^2}$  ist, gilt:

$$l = \int_{x_A}^{x_B} dx L(y(x), y'(x), x) \quad \text{mit} \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

In unserem Beispiel ist

$$L(y(x), y'(x), x) = L(y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

Die EULERgleichung bedeutet hier:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

Und da die erste Ableitung  $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$  ergibt, haben wir:

$$0 - \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c = \text{const.}$$

Es folgt also für die erste Ableitung:

$$y'(x)^2 = c^2 (1 + y'(x)^2) \quad \Rightarrow \quad y'(x)^2 = \frac{c^2}{1 - c^2} = \bar{c}^2 = \text{const.}$$

Damit erhalten wir, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Gerade ist:

$$\boxed{y(x) = y_0 + c_1 x}$$

Setzen wir nun die Randwerte ein, so erhalten wir:

$$\boxed{y(x) = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)}$$

### Bemerkungen:

- Die kürzeste Bahn wird auch als **Geodäte** bezeichnet. Auf diesem Prinzip basiert die Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie, bei der  $g_{\mu\nu}$  eine Funktion des Ortes ist.
- Eine Variable  $q_i$  (wie hier  $y$ ), die in  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  nicht explizit auftaucht, (d.h.  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ , hier:  $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ ) heißt **zyklische Variable** und die zugehörige Größe, der sogenannte **verallgemeinerte (kanonische) Impuls**,  $p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  ist eine Erhaltungsgröße,  $p = \text{const.}$  (d.h.  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const.}$  hier  $\frac{\partial L}{\partial y'} = \text{const.}$ )

Verallgemeinerung auf eine Bahn im  $\mathbb{R}^f$ :

### Theorem:

Die Bahnkurve  $\mathcal{C}$  im  $\mathbb{R}^f$ , gegeben durch

$$\{(\mathbf{q}, t) | q_i = q_i(t) \quad i \leq i \leq f \text{ mit } f \text{ stetig und zweimal stetig differentierbare Funktion } q_i(t)\}$$

ist Extremalkurve des Funktional.

$$S = \int_{t_-}^{t_+} dt L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$$

Das heißt,  $S[\mathbf{q}]$  ist stationär bei festen Randpunkten  $\mathbf{q}(t_-) = \mathbf{q}_-$  und  $\mathbf{q}(t_+) = \mathbf{q}_+$  mit der Dichtefunktion:

$$L : \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit gewissen Glattheitsbedingungen an  $L$ . Das Funktional ist extremal genau dann, wenn:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, f \quad (3.1)$$

unter Vorgabe fester Randpunkte  $\mathbf{q}(t_{\pm}) = q_{\pm}$ . Dies sind die EULERgleichungen.

### Beweis:

Die  $f$  Vergleichsbahnen  $\mathbf{q}(t, \varepsilon)$  erfüllen  $\mathbf{q}(t, \varepsilon = 0) = \mathbf{q}(t)$  (optimale / stationäre Bahn). Wobei  $\mathbf{q}(t)$  die

extremale Bahn ist. Ebenfalls gilt, dass alle Vergleichsbahnen durch die Randpunkte gehen:

$$\mathbf{q}(t_{\pm}, \varepsilon) = \mathbf{q}(t_{\pm}) = \mathbf{q}_{\pm}$$

Desweiteren soll  $\mathbf{q}(t, \varepsilon)$  entwickelbar sein:

$$\mathbf{q}(t, \varepsilon) = \mathbf{q}(t) + \varepsilon \left. \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{TAYLOR in } \varepsilon)$$

$$(S[\mathbf{q}(t, \varepsilon)] - S[\mathbf{q}(t)]) \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} S' = \left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

$$\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_-}^{t_+} dt \sum_{i=1}^f \left( \left. \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right) = 0$$

Wegen  $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \dot{q}_i(t, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} q_i(t, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} q_i(t, \varepsilon)$  lässt sich die Zeitableitung partiell integrieren:

$$\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_-}^{t_+} dt \sum_{i=1}^f \frac{\partial q_i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} \right) + \left[ \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{t_-}^{t_+} = 0$$

da  $q_i(t, \varepsilon)|_{t_{\pm}} = q_{\pm}$  folgt für alle  $\varepsilon$ :  $\frac{\partial q_i(t_{\pm}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0$ . Die große Klammer muss also für jeden Index  $i$  einzeln 0 ergeben. Betrachten wir im Detail:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial q_i} + \sum_{j=1}^f \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^f \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j(t)$$

⇒ Die Euler-Gleichungen sind *gekoppelte implizite* Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Beispiel: Kürzeste Bahn:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = dt \\ \Rightarrow L[\mathcal{C}] &= \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \end{aligned}$$

also haben wir:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L\left(\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}, t\right) = L\left(\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = L(\dot{x}, \dot{y})$$

Die EULER-Gleichungen hierfür lauten:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \text{konst.}$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \text{konst.}$$

Da z.B.  $x$  zyklisch ist gilt  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = c = \text{const.}$  Damit erhalten wir also die Beziehung:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{c_2}{c_1} = \text{konst.}$$

Wir erhalten wieder eine Gerade:  $y' = \text{konst.}$

Die selbe Bahn/Kurve ergibt sich aus der Variationsrechnung für beliebige Parametrisierung.

Beispiel: Kürzeste Bahn in Polarkoordinaten<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}x(t) = r(t) \cos \varphi(t) &\Rightarrow \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\y(t) = r(t) \sin \varphi(t) &\Rightarrow \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi\end{aligned}$$

also ist die Geschwindigkeit in ebenen Polarkoordinaten nichts anderes als:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

Es folgt für  $L$ :

$$L[\mathcal{C}] = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}$$

Umparametrisieren ergibt:

$$L[\mathcal{C}] = \int_{r_A}^{r_B} dr \sqrt{1 + r^2 \varphi'^2} \quad \text{mit} \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dr}$$

Die kürzeste Bahn folgt nun aus der EULERgleichung mit

$$L(\varphi(r), \varphi'(r), r) = \sqrt{1 + r^2 \varphi'^2}$$

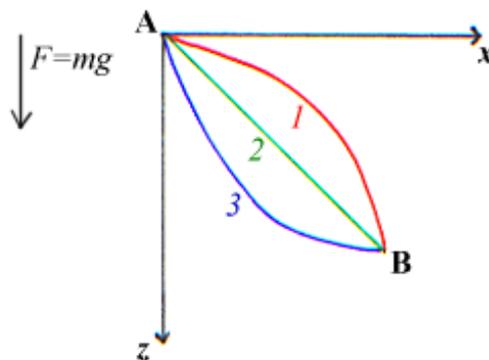
Eingesetzt ergibt dies:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dr} \frac{\partial L}{\partial \varphi'} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 = \frac{d}{dr} \frac{r^2 \varphi'}{\sqrt{1 + r^2 \varphi'^2}} = c = \text{konst.}$$

Um  $\varphi(r)$  oder  $\varphi'(r)$  zu finden, ist ein größerer Rechenaufwand als zuvor notwendig. Das liegt an der ungeschickten Wahl unserer Koordinaten. Das Ergebnis bleibt natrlich eine Gerade.

### 3.1.3 Klassisches Beispiel: Die Brachystochrone

**Historisches Problem:** BERNOULLI (1696)



Gesucht ist die Kurve, auf der ein Teilchen unter Einwirkung der Schwerkraft am schnellsten von A nach B kommt.

Das Teilchen ist bei A (oberhalb von B) anfänglich in Ruhe. Eine Bahn, auf der das Teilchen zuerst stark beschleunigt und dann mit größerer Geschwindigkeit entlangläuft ist womöglich schneller als die kürzeste Bahn.

Wir ermitteln die Zeit zum Durchlaufen der Bahn mit dem Bogenlängenelement  $ds$  und der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$ :

$$t[\mathcal{C}] = \int_A^B \frac{ds}{|\mathbf{v}|}$$

weil  $ds = |\mathbf{v}| dt$ , wobei  $v$  aus der Energieerhaltung bestimmt werden kann:

$$E = \text{konst.} = \frac{m}{2} v^2 - mgz = 0$$

<sup>1</sup>Dieses Beispiel wurde nicht in der Vorlesung besprochen.

Wahl der Anfangbedingungen bei A:  $v = 0, z = 0$ . Damit können wir  $v = \sqrt{2gz}$  ersetzen:

$$t[C] = \int_A^B \frac{ds}{\sqrt{2gz}} = \int_A^B dt \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}}{\sqrt{2gz}}$$

Durch Umparametrisieren mit  $t = t(x)$  folgt:

$$L[C] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{\frac{1 + z'(x)^2}{z(x)}}$$

gesucht ist  $z(x)$ , sodass  $F(C) = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{\frac{1+z'(x)^2}{z(x)}}$  extremal =  $\int_{x_A}^{x_B} dx L(z(x), z'(x), x)$  mit

$$L(z(x), z'(x), x) = \sqrt{\frac{1 + z'^2}{z}}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{Extremum}} \quad & \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial z'} = 0 \quad \text{wobei } z' = \frac{dz}{dx} \\ \Rightarrow \quad & \frac{\sqrt{1+z}}{z^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{z(1+z'^2)}} \end{aligned}$$

weiteres Differenzieren wird kompliziert und  $z'' = \frac{d^2 z}{dx^2}$  taucht auf.

**Tipp:** Verwende nicht die EULER-Gleichung wenn es auch einfacher geht!

### Wichtiger Trick: *Energieerhaltung*

Multiplikation der Euler-Gleichung mit  $z'$ , und danach anwenden der Produktregel liefert:

$$\begin{aligned} & z' \frac{\partial L}{\partial z} - z' \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial z'} = 0 \\ \Rightarrow & z' \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx} z' \frac{\partial L}{\partial z'} + \frac{\partial L}{\partial z'} z'' = 0 \\ \Rightarrow & \underbrace{\frac{\partial L}{\partial z} \frac{dz}{dx} + \frac{\partial L}{\partial z'} \frac{dz'}{dx}}_{(*)} - \frac{d}{dx} z' \frac{\partial L}{\partial z'} = 0 \end{aligned}$$

Die Klammer (\*) entspricht:  $= \frac{d}{dx} L(z(x), z'(x), x)$  genau dann, wenn  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ , weil gilt:

$$\frac{d}{dx} L(z(x), \dot{z}(x), x) = \frac{\partial L}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial z'} \frac{dz'}{dx} + \frac{\partial L}{\partial x}$$

dann folgt:

$$0 = \frac{d}{dx} \left( L - z' \frac{\partial L}{\partial z'} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

**Fazit:** Somit ergibt sich aus der EULER-Gleichung:

für  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$  gibt es Erhaltungsgröße

$$\boxed{E = L - z' \frac{\partial L}{\partial z'} = \text{const.}} = E(z(x), z'(x)) \quad \text{mit } \frac{d}{dx} E = 0$$

was ein großer Vorteil ist, weil  $E$  nur von  $z$  und  $z'$  (nicht aber von  $z''$ ) abhängt

In unserem Beispiel ist:

$$\begin{aligned} E &= z' \frac{z'}{\sqrt{z(1+z'^2)}} - \sqrt{\frac{1+z'^2}{z}} = \frac{-1}{\sqrt{2a}} = \text{const.} \quad \text{mit einer Länge } a \\ E &= \frac{1}{\sqrt{z(1+z'^2)}} (z'^2 - 1 - z'^2) = \frac{-1}{\sqrt{z(1+z'^2)}} \Leftrightarrow z(1+z'^2) = 2a = \text{const.} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{dz}{dx} = z' = \pm \sqrt{\frac{2a}{z} - 1} \end{aligned}$$

dabei ist  $a$  die Länge eine Integrationskonstante. Trennung der Variablen:

$$\int dx = x - x_0 = \int dz \sqrt{\frac{z}{2a - z}}$$

Variablensubstitution:  $z = a(1 - \cos \vartheta) \Leftrightarrow dz = a \sin \vartheta d\vartheta$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x - x_0 &= \int d\vartheta a \sin \vartheta \sqrt{\frac{a(1 - \cos \vartheta)}{a(1 + \cos \vartheta)}} \\ &= a \int d\vartheta \sin \vartheta \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}}} = 2a \int d\vartheta \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \\ &= a(\vartheta - \sin \vartheta) \end{aligned}$$

D.h. mit der Parametrisierung der Bahn durch  $\vartheta$  ist die Brachystochrone gegeben durch:

$$\begin{aligned} z &= a(1 - \cos \vartheta) \\ x &= a(\vartheta - \sin \vartheta) + x_0 \end{aligned}$$

$x_0$  und  $a$  sind zwei unbekannte Integrationskonstanten, die aus den Randbedingungen bei den Punkten

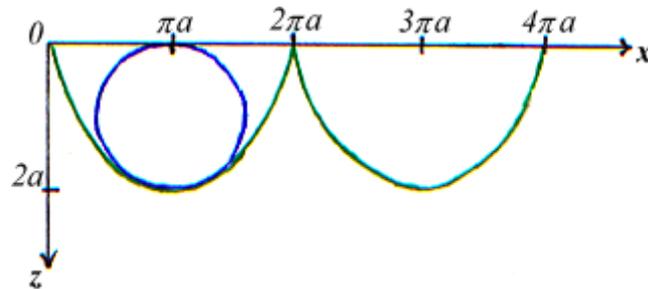


Abbildung 3.1: Die Brachystochrone ist hier ein Stück einer Zykloide, die man durch Abrollen eines Rades mit Radius  $a$  erhält.

A und B folgen z.B.:  $x(\vartheta_A) = z(\vartheta_A) \stackrel{!}{=} 0$  folgen.

$$\vartheta_A = 0 \quad x_0 = 0 \quad x(\vartheta_B) = x_B \quad z(\vartheta_B) = z_B$$

## 3.2 Lagrange Mechanik

### 3.2.1 Prinzip von Hamilton

**A) Newton'sche Bewegung eines Massepunktes im Potential** Nach NEWTON ist die Bahn des Massepunktes verknüpft mit

$$\text{Bahn: } t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{häufig } \mathbf{r} \hat{=} \mathbf{q})$$

$$\text{Geschwindigkeit: } \mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$$

$$\text{kinetischer Impuls: } \mathbf{p}(t) = m \mathbf{v}(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} T(\mathbf{v}) \quad \text{mit der Masse } m$$

$$\text{kinetische Energie: } T := \frac{m}{2} \mathbf{v}^2$$

$$\text{Kraft aus Potential: } \mathbf{F} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U(\mathbf{r}(t), t)$$

⇒ gegebene NEWTON'schen-Gleichung:  $\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F}$  ist äquivalent zu:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \underbrace{\frac{m}{2} v^2}_{=0 \text{ (*)}} - \underbrace{U(\mathbf{r}, t)}_{=0 \text{ (**)}} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \underbrace{\frac{m}{2} v^2}_{=0 \text{ (**)}} - U(\mathbf{r}, t) \right] = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \underbrace{(T - U)}_{=: L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (T - U) = 0$$

(\*) da  $U$  unabhängig von  $\mathbf{v}$  ist und (\*\*) da kinetische Energie nicht von  $\mathbf{r}$  abhängt.

Im Vergleich erkennt man, dass die NEWTON-Gleichung der EULER-gleichung (3.1) zur (LAGRANGE)-Dichte ist.

$$L = L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) = T - U = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}, t) = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 - U(\mathbf{r}, t) \quad (3.2a)$$

Das HAMILTON'sche Prinzip besagt, dass die Bewegungsbahnen des Massepunktes (Parameter  $m$ ) die "Extremalen,, der "Wirkung,, (des Wirkungsfunktional) sind.

$$S[\mathbf{r}(t)] = \int_{t_-}^{t_+} dt L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \quad (3.2b)$$

### Bemerkungen:

- Das Prinzip heißt auch „Prinzip der kleinsten Wirkung“
- In der Mechanik heißen die EULER-Gleichungen (3.2) ⇒ EULER-LAGRANGE-Gleichungen

**B) Die Einstein'sche Bewegung eines Massepunktes im Potential** Alles identisch zu (A), nur dass der Impuls  $\mathbf{p}$  die träge Masse enthält.

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = m(v) \mathbf{v} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( -m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{p} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \underbrace{-m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{=0} - \underbrace{U(\mathbf{r}, t)}_{=0} \right) \\ &= \stackrel{\text{Einstein}}{=} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \underbrace{-m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{=0} - U(\mathbf{r}, t) \right) \end{aligned}$$

Die Bahnen eines Massenpunktes der EINSTEIN'schen Mechanik im Potential  $U$  sind Extremalen der Wirkung

$$S = \int_{t_-}^{t_+} dt L(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = \int_{t_-}^{t_+} dt \left( -m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U(\mathbf{r}, t) \right) \quad (3.3)$$

**C) konservatives  $N$ -Teilchensystem (nach Newton)** Zunächst betrachten wir die NEWTON'sche Beschreibung für Bahn  $\mathbf{r}$ , Bahntangente (Geschwindigkeit)  $\mathbf{v}$  und Impuls  $\mathbf{p}$  mit der Masse des  $i$ -ten Teilchens

$m_i$ :

$$\begin{array}{l}
 t \rightarrow \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(t) \\ \mathbf{r}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_N(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{f=3N} \\
 \text{Tangentenvektor} \quad t \rightarrow \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1(t) \\ \mathbf{v}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_N(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_i(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_i(t) = \dot{\mathbf{r}}_i(t) \\
 \text{Impuls} \quad t \rightarrow \mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1(t) \\ \mathbf{p}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_N(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{p}_i(t) = m_i \mathbf{v}_i(t)
 \end{array}$$

dabei ist  $m_i$  die Masse des  $i$ -ten Teilchens.

konservatives Kraftfeld bedeutet:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1(\mathbf{r}(t)) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N(\mathbf{r}(t)) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}_i = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}(t)) = -\nabla_i U$$

mit einem(!) Potential  $U$  für alle Teilchen, das zeitunabhängig ist. ( $\frac{U}{t} = 0$ )

### Bemerkung

- $U$  kann *externes Potential* (externes Kraftfeld) sein

$$U(\mathbf{r}) = U^{\text{ext.}}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N U^{\text{ext.}}(\mathbf{r}_i)$$

wobei  $U^{\text{ext.}}$  gegeben ist (z.B. als Gravitationspotential  $U^{\text{ext.}} = m_i g z$ ).

- *internes Potential* (z.B. Paar-Wechselwirkungen)

$$U = U^{\text{int.}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} U^{\text{int.}}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

$U^{\text{int.}}$  kann z.B. COULOMB-Potential sein mit  $U = -\frac{q_i \cdot q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$ .

Damit das zweite NEWTON'sche Axiom (actio=reactio) erfüllt ist, muss  $U^{\text{int.}}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = U^{\text{int.}}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$  sein. Denn damit folgt für die Kraft auf ein Teilchen  $i$  vom Teilchen  $j$ :

$$\mathbf{F}_{i,j}^{\text{int.}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U^{\text{int.}}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} U^{\text{int.}}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = -\mathbf{F}_{j,i}^{\text{int.}}$$

also gleich der negativen Kraft von Teilchen  $i$  auf  $j$ .

Die NEWTON-Gleichungen  $\frac{d}{dt} \mathbf{p}_i = \mathbf{F}_i$  sind äquivalent zu:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} m_i \mathbf{v}_i &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} \left( \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} v_j^2 - U(\mathbf{r}) \right) \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \left( -U(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} v_j^2 \right)
 \end{aligned}$$

**Fazit:**

Die Bahnen des konservativen  $N$ -Teilchensystems nach NEWTON sind die Extremalen zur LAGRANGEDICHTE:

$$L(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} v_i^2 - U(\mathbf{r}) \quad (3.4)$$

**Bemerkung:**

- Salopp:  $L = T - U$  = kinetische Energie - potentielle Energie
- Konzept der Kraft (als ein Vektor) taucht nicht auf
- kartesisches Koordinatensystem verwendet. Die Gültigkeit der EULER-Gleichung nach Koordinatentransformation bleibt noch zu zeigen. Dann wird häufig  $U(\mathbf{r}) \rightarrow U(\mathbf{q}, t)$  bei Koordinatentransformation von  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{q}$ . Dabei wird auch  $T(\mathbf{v}) \rightarrow T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$  die kinetische Energie ortsabhängig.

**D) Newton'sche Mechanik eines geladenen Teilchens in elektromagnetischen Feldern** Wir untersuchen nun ein Teilchen der Ladung  $q$  in einem elektromagnetischen Feld. Dazu betrachten wir die LORENTZ-KRAFT (1.7):

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = q [\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t)]$$

wobei die  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  aus Potentialen bestimmbar sind: (1.5 / 1.6)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) - \partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ \text{und } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

- $\Phi$  ist ein skalares Potential,  $\mathbf{A}$  ein Vektorpotential.
- Die Potentiale sind jedoch nicht eindeutig. Dieselben  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder, die sich aus  $\Phi$  und  $\mathbf{A}$  ergeben, folgen auch aus  $\bar{\Phi}$  und  $\bar{\mathbf{A}}$  wenn  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\chi$  und  $\bar{\Phi} = \Phi - \partial_t\chi$ .
- $\mathbf{A}$ ,  $\phi$  geben für beliebige Funktion  $\chi$  die selben elektromagnetischen Felder

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{\mathbf{A}} &= \nabla \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla \chi}_{=0} = \mathbf{B} \\ -\nabla \bar{\phi} &= \partial_t \bar{\mathbf{A}} = -\nabla \phi + \nabla \partial_t \chi - \partial_t \mathbf{A} - \partial_t \nabla \chi = \mathbf{E} \end{aligned}$$

Beispiel: ein homogenes  $\mathbf{B}$ -Feld in  $\hat{z}$ -Richtung  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = B\hat{z}$  folgt aus

$$\mathbf{A} = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \bar{\mathbf{A}} = B \begin{pmatrix} -y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit der LORENTZKRAFT laute die  $x$ -Komponente der NEWTON-Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m v_x &= q [-\partial_t \phi - \partial_x A_x + v_y (\partial_x A_y - \partial_y A_x) - v_z (\partial_z A_x - \partial_x A_z)] \\ &= q \left[ -\frac{\partial}{\partial x} (\phi - v_y A_y - v_z A_z - \underbrace{v_x A_x}_*) - (\partial_t + \underbrace{v_x \partial_x}_* + v_y \partial_y + v_z \partial_z) A_x \right] \\ &= -q \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\phi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) - \frac{d}{dt} A_x(\mathbf{r}(t), t) \right] \end{aligned}$$

wobei bei  $*$  = 0 addiert wurde.

Analog für  $p_y$  und  $p_z$

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}(t) + q\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t)) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (-q\phi(\mathbf{r}(t), t) + q\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t))$$

NEWTONGleichungen können geschrieben werden als

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{m}{2} v^2 + q\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t) - q\phi(\mathbf{r}(t), t) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \underbrace{\left( \underbrace{\frac{m}{2} v^2 + q\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t) - q\phi(\mathbf{r}(t), t)}_{=0} \right)}_L \end{aligned}$$

**Fazit:** Die NEWTON'schen Bahnen in elektromagnetischen Feldern folgen der LAGRANGE-Dichte

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{m}{2} v^2 + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - q\phi(\mathbf{r}, t) \quad (3.5)$$

Bleibt nur noch die Frage nach der fehlenden Eindeutigkeit von  $\mathbf{A}$  und  $\phi$  zu klären. Bei Eichtransformation

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A - \nabla\chi \quad \text{und} \\ \bar{\phi} &= \phi + \partial_t\chi \end{aligned}$$

ändert sich  $L$  zu

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} v^2 + q\mathbf{v}(\bar{A} + \nabla\chi) - q(\bar{\phi} - \partial_t\chi) \\ &= \underbrace{\frac{m}{2} v^2 + q\mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{A}} - q\bar{\phi}}_{=: \bar{L}} + q \left( \partial_t\chi + \nabla\chi \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \\ &= \bar{L} + q \frac{d}{dt} \chi(\mathbf{r}(t), t) \end{aligned}$$

also  $\bar{L}$  unterscheidet sich von  $L$  durch ein totales Differential der Zeit. (Bedeutung erst später)

**Bemerkung:** Ersetzt man  $\frac{m}{2} v^2 \rightarrow -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , dann erhält man die EINSTEIN'sche Mechanik des geladenen Teilchens in  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Feld.

### 3.2.2 Elementare Beispiele

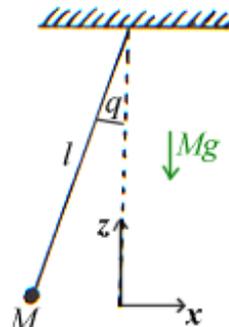
**A) Eindimensionale konservative Systeme** Ein Massenpunkt, dessen Position  $q(t) \in \mathbb{R}$  in einem gegebenen Potential  $U(\mathbf{q})$  variiert, sei modelliert durch

$$L = T - U = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q)$$

was zur EULER-LAGRANGE-Gleichung führt:

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$$

Beispiel: Ein starres Pendel im Schwerfeld  
Das Pendel hat den Freiheitsgrad des Winkels  $q$



$$T = \frac{1}{2}Ml^2\dot{q}^2 \quad \text{und} \quad U(q) = Mgz = Mgl(1 - \cos q)$$

Für ein Pendel der Länge  $l = 1$  folgt mit  $M = m$ :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - mg(1 - \cos q)$$

Da  $U(q)$  zeitunabhängig ist ( $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ), gilt Energieerhaltung. D.h.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \right) &= \frac{d}{dt} \left( \dot{q}^2 m - \frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q) \right) = \frac{d}{dt} (T + U) = \frac{d}{dt} E \quad \text{Gesamtenergie} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q) \right) = m\dot{q}\ddot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} \dot{q} = \dot{q} \left( m\ddot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} \right) = 0 \end{aligned}$$

die Gesamtenergie  $E = T + U = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + U(q)$  ist zeitlich konstant.

Der Massenpunkt benötigt also  $\Delta t = t_2 - t_1$  um von  $q_1 = q(t_1)$  nach  $q_2 = q(t_2)$  zu kommen.

$$t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int \frac{dt}{\dot{q}} = \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}}$$

da nach Energieerhaltung gilt:  $\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}$

Da  $\frac{m}{2}\dot{q}^2 \geq 0$  ist, erfolgt die Bewegung im Bereich gegeben durch  $U(q) \leq E$

Wir wollen nun eine Diskussion verschiedener möglicher / typischer Bahntypen anschließen:

- (i)  $E$  sei  $U_{min}$ ,  $\dot{q}$  sei 0:  $q(t) = q_{min}$  ist mögliche Bahn  
da  $U_{min}$  ein lokales Minimum ist und folgt  $\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q_{min}} = F = 0$   
Dieser Punkt ( $q = q_{min}$  heißt Gleichgewichtspunkt).

- (ii)  $U_{min} < E < U_{max}$  ( $q < q_{max}$ )  
hier ist  $\dot{q}(t) \neq 0$ . Im Allgemeinen jedoch gibt es zwei Umkehrpunkte  $q_+$  und  $q_-$  an denen die Geschwindigkeit verschwindet, nämlich die Punkte, für die gilt:

$$U(q_+) = U(q_-) = E$$

$q_- \leq q(t) \leq q_+$ : Bewegung verläuft zwischen den Umkehrpunkten.

→ geschlossene Bahnen, die anharmonische Oszillationen darstellen mit der Periode:

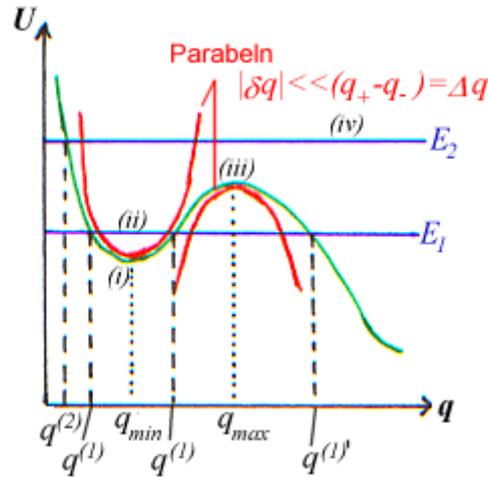
$$\frac{2\pi}{\omega} = T = 2 \int_{q_-}^{q_+} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}}$$

Die Bewegung ist periodisch:  $q(t + T) = q(t)$  Bemerkung: Im Allgemeinen hängt  $\omega$  also von Amplitude ( $q_+ - q_-$ ) =  $\Delta q$  ab.

- (iii)  $E = U_{max}$  und  $F = \left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q_{max}} = 0$

Da  $U_{max}$  lokales Maximum ist, haben wir ein labiles Gleichgewicht:  $q(t) = q_{max}$  ist Bahn

- (iv)  $E > U_{max}$ , es gibt nur noch einen Umkehrpunkt, an dem  $E = U(q_-)$   
Das Teilchen läuft nach  $q \rightarrow +\infty$  für  $t \rightarrow \infty$ .



### B) Linearisierungen um Gleichgewichtspunkte

- (i) Um die Punkte  $q_{min}$  und  $q_{max}$  aus Beispiel (A) kann die EULER-LAGRANGE-Gleichung linearisiert werden. Dies soll im allgemeinen, konservativen Fall von  $f$  Freiheitsgraden skizziert werden.

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) \quad \text{mit } \mathbf{q} \in \mathbb{R}^f$$

Ein Punkt  $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^f$  ist Gleichgewichtspunkt, genau dann, wenn

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_0) = - \left. \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} = 0$$

Wenn dort keine Kraft wirkt. Es gilt dann  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0$  ist Bahn.

**Beweis:**

$$U(\mathbf{q}) = E \quad \text{weil } T = 0 \quad \text{und } m\ddot{\mathbf{q}} = 0$$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t_0) + \dot{\mathbf{q}}(t_0)(t - t_0)$$

ergibt  $\mathbf{q}(t) \equiv \mathbf{q}_0$  wenn  $\dot{\mathbf{q}} = 0$  irgendwann einmal.

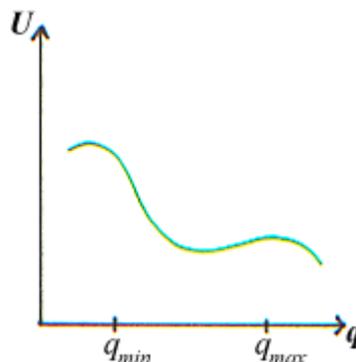
- (ii) Für kleine Abweichungen  $\delta \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_0$  vom Gleichgewichtspunkt werden die EULER-LAGRANGE-Gleichungen lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \ddot{q}_i = F_i(\mathbf{q}_0 + \delta \mathbf{q}(t)) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$F_i(\mathbf{q}_0) = F_i(\mathbf{q}) + \sum_{j=1}^f \left. \frac{\partial F_i}{\partial q_j} \right|_{\mathbf{q}_0} \delta q_j + \mathcal{O}(\delta \mathbf{q}^2)$$

$$\text{also: } \Rightarrow m_i \delta \ddot{q}_i = - \sum_{j=1}^f \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\mathbf{q}_0} \delta q_j(t) + \mathcal{O}(\delta \mathbf{q}^2)$$

mit der symmetrischen Matrix der zweiten Ableitung des Potentials ausgewertet am Gleichgewichtspunkt.



Zurück zum Beispiel:

An beiden Gleichgewichtspunkten  $q_{min}$  und  $q_{max}$  gilt:

Bei  $q_{min}$ :

$$U(q_{min} + \delta q) = U_{min} + \frac{1}{2} k \mathbf{q}^2 + \dots \quad \text{mit } k = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q_{min}}$$

$$\Rightarrow \delta \ddot{q} + \omega^2 \delta q = 0$$

Dabei ist  $k$  die Federkonstante der Rückstellkraft. Es kommt zu einer harmonischen Oszillation mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{q}^2}}$$

und beschränkter Amplitude. Man spricht von einem linear stabilen Gleichgewichtspunkt.

**Bemerkung:** Nichtlineare Terme können zum Anwachsen der Amplitude führen. Man spricht dann von *nichtlinearer Instabilität*

Bei  $q_{max}$ :

$$\mathbf{q}_{max} : U(q_{max} + \delta q) = U_{max} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \Big|_{q_{max}}}_{<0} \delta q^2 + \dots$$

$$\delta \ddot{q} - \alpha^2 \delta q = 0$$

$$\text{mit } \alpha = \sqrt{-\frac{1}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}}$$

gibt im Allgemeinen exponentiell anwachsende Ablenkungen.

$$\delta q(t) \sim e^{\alpha t} \rightarrow \infty \quad t \rightarrow \infty$$

(iii) kleine Schwingungen und charakteristische Frequenzen

Der Ansatz  $\delta q_i(t) = A_i e^{i\lambda t}$  mit dem Amplitudenvektor  $\mathbf{A}$  macht die EULER-LAGRANGE-Gleichungen zu einem Set von  $f$  homogenen, gekoppelten, linearen Gleichungen:

$$\left[ \begin{pmatrix} -m_1 \lambda^2 & & & \\ & -m_2 \lambda^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -m_f \lambda^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} & \cdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} & \ddots & \\ \vdots & & \frac{\partial^2 U}{\partial q_f^2} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_f \end{pmatrix} = 0$$

die nur eine nicht-triviale Lösung ( $\mathbf{A} \neq 0$ ) besitzen, wenn die Determinante der Matrix

$$\left| \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} - m_i \lambda^2 \delta_{ij} \right| = 0$$

Dies legt die (verallgemeinerten) Frequenzen  $\lambda^2 = \pm \omega^2(\alpha)$  für  $\alpha = 1, \dots, f$  als Eigenwerte fest. Dabei ist  $\lambda^2 \in \mathbb{R}$ , da  $\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}$  symmetrisch ist.

Ist eine der Frequenzen  $\lambda^2 < 0$ , dann ist der Gleichgewichtspunkt instabil, weil  $\delta \mathbf{q}(t) \sim e^{\pm \sqrt{\omega^2(\alpha)} t}$  folgt. Zu jedem  $\omega_\alpha$  gehört ein Eigenvektor  $\mathbf{A}_\alpha$ , der:

$$\sum_i \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} - m_i \omega_\alpha^2 \delta_{ij} \right) A_j^\alpha = 0$$

erfüllt, sodass die allgemeine Lösung:

$$\delta q_i(t) = \sum_{\alpha=1}^f A_i(\alpha) \left( c_\alpha^{(1)} e^{i\omega_\alpha t} + c_\alpha^{(2)} e^{-i\omega_\alpha t} \right)$$

lautet (mit den Integrationskonstanten  $c_\alpha^{(1,2)}$ , die aus Anfangswerten folgen).

Dieses Verfahren findet weite Anwendung, da viele Systeme (beispielsweise Moleküle, Festkörper, Pendel etc.) kleine Schwingungen um die Gleichgewichtspunkte machen.

**C) Bewegung im konservativen Zentralpotential** Sei  $U(\mathbf{r}(t), t) = U(r)$  Zentralpotential. D.h. ein Teilchen im Potential spürt nur radiale Kräfte:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} \quad \hat{\mathbf{r}} \parallel \mathbf{r}$$

Wie jetzt gezeigt werden soll, ist es im wesentlichen nur ein eindimensionales Problem. Unser Modell:

$$L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 - U(r)$$

lautet

Erinnerung: Es gibt eine extremale Wirkung, wenn die EULER-LAGRANGE-Gleichung gilt:

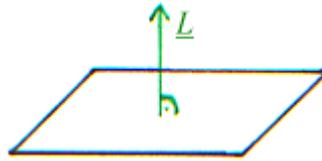
$$\frac{d}{dt} m \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}$$

(i) Drehimpulserhaltung.

$$\begin{aligned} \text{Drehimpuls} \quad \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \frac{d}{dt} \mathbf{L} \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{d}{dt} \mathbf{L} &= \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}}) = 0 \end{aligned}$$

d.h.  $\mathbf{L} = \text{const.}$  ist erhalten.

(ii) ebene Bewegung



$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0$$

weil  $\mathbf{L}$  ein konstanter Vektor ist, gibt  $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{L} = 0$  die Ebenengleichung. Deshalb liegt  $\mathbf{r}$  in der Ebene senkrecht zu  $\mathbf{L}$  durch den Ursprung. Wir wählen  $\mathbf{L} = l \hat{\mathbf{z}}$ . Die Bewegung erfüllt also  $z(t) = 0$ .

(iii) Ebene Polarkoordinaten:

Mit der Wahl der  $z$ -Achse parallel zu  $\mathbf{L}$ , d.h.  $\mathbf{L} = l \hat{\mathbf{z}}$  Bewegung in  $x, y$ -Ebene mit  $z(t) \equiv 0$

$$x(t) = r(t) \cos \phi(t) \quad \& \quad y(t) = r(t) \sin \phi(t)$$

und für die Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die LAGRANGEDichte:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(r) \\ &= \frac{m}{2} \left[ \left( \dot{r}^2 \cos^2 \phi + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi + \dot{r}^2 \sin^2 \phi + r^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi + 0 \right) - U(r) \right] \\ &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r) = L(r, \dot{r}, \dot{\phi}) \end{aligned} \quad (3.6a)$$

(iv) Drehimpulserhaltung II

weil nun  $\phi$  eine zyklische Variable ist, d.h.  $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$  gilt, folgt:

$$l = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi} = \text{const.} \quad (3.6b)$$

wobei  $l$  der Betrag des Drehimpulses ist, was man durch explizites Einsetzen  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{r}}$  sieht.

(v) Radialgleichung und effektives Potential

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{d}{dt} m\dot{r} = m\ddot{r} = \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \\ m\ddot{r} &= \frac{l^2}{m r^3} - \frac{\partial U}{\partial r} = - \frac{\partial}{\partial r} \left( U(r) + \frac{l^2}{2 m r^2} \right) = - \frac{\partial}{\partial r} U^{\text{eff.}} \end{aligned}$$

Wir haben die Gleichungen nun auf ein radiales Problem mit dem effektiven Potential mit Zentrifugalterm zurückgeführt (wobei der Bruch den Zentrifugalterm darstellt).

$$\begin{aligned} \text{also: } \quad m\ddot{r} &= - \frac{\partial U^{\text{eff.}}}{\partial r} \\ \text{mit } \quad U^{\text{eff.}}(r) &= U(r) + \frac{l^2}{2 m r^2} \end{aligned} \quad (3.6c)$$

Es verbleibt nur die Radialgleichung (3.6c) mit dem effektiven Potential  $U^{\text{eff.}}(r)$  zu lösen (dies gibt  $r(t)$  und mit (3.6b) folgt Winkelbewegung  $\phi(t) = \int dt \dot{\phi}$ )

(vi) Energieerhaltung

Zum Lösen von (3.6c) verwendet man nun

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + U^{\text{eff.}}(r) = \text{const.}$$

**Beweis:**

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} \left( m \frac{\dot{r}^2}{2} + U^{\text{eff.}}(r) \right) = \dot{r} \left( m\ddot{r} + \frac{\partial U^{\text{eff.}}}{\partial r} \right) = 0$$

Zur Bestimmung von  $r(\phi)$  verwenden wir die Integrabilität von  $E(r, \dot{r})$  und  $l(l, r, \dot{\phi})$ .

### 3.2.3 Axiome und Grundbegriffe der Lagrange-Mechanik

Die Formulierung der Mechanik nach LAGRANGE erfolgt mit dem HAMILTONSchen Extremalprinzip für Bahnkurven zur LAGRANGEDichte  $L$ .

#### 1. Axiom:

Ein mechanisches System entspricht einer Bahn  $\mathcal{C}$  im Konfigurationsraum  $\mathcal{M}$ .

$$\mathcal{C} : \{t, \mathbf{q} : \mathbf{q} = \mathbf{q}(t) \text{ für } t_- \leq t \leq t_+; \mathbf{q} \in \mathbb{R}^f\}$$

Bemerkungen:

- Die Begriffe werden noch sauberer definiert.
- Der Parameter  $t$  ist die Zeit
- Für  $n$  Teilchen ist der Raum  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{3n}$  und wird als Konfigurationsraum (Positionen- oder Lager-Raum) bezeichnet. Die Erklärung für  $f \leq 3n$  folgt
- Die Dimension  $f$  von  $\mathcal{M}$  ist die Zahl der Freiheitsgrade.
- Falls  $f$  Koordinaten ausgewählt werden  $(q_1, \dots, q_f)$ , mit denen jeder Punkt von  $\mathcal{M}$  dargestellt werden kann, heißen die  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_f)$  generalisierte Koordinaten.

#### 2. Axiom:

Die Dynamik ist bestimmt durch die Angabe einer Dichtefunktion  $L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$  (unter gewissen Regularitätsbedingungen), so dass die Bahnen  $\mathcal{C}$  des Systems Extremalen des HAMILTON'schen Wirkungsfunktionals  $S = \int_{t_-}^{t_+} dt L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$  sind.

**Bemerkungen:**

- Die Angabe von  $L$  heißt Modell des Systems
- $S$  heißt Wirkung, daher kommt der Name des „Prinzips kleinster Wirkung“

- Die EULER-LAGRANGE-Gleichungen (zweiter Art) lauten hierzu:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0} \quad i = 1, \dots, f \quad (3.7)$$

- Die  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  heißen (generalisierte oder kanonische) Impulse
- z.B. mit magnetischen Feldern  $L = \frac{m}{2}v^2 + q\mathbf{v}A$  stimmen kinetische und kanonische Impulse nicht überein:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A} \neq m\mathbf{v}$$

- $q_i$  und  $p_i$  heißen **zueinander konjugierte Variablen**. (wenn  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ )

Wichtige bisher schon besprochene Eigenschaften der Bewegung (= von  $L$ ) sind:

- Zyklische Variablen:  
Eine Variable  $q_i$  ist zyklisch wenn gilt:  $\frac{\partial L}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$ . Dann ist der zugehörige kanonische Impuls zeitlich konstant:  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \text{const.}$
- Energieerhaltung:  
Hängt  $L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$  nicht explizit von der Zeit ab, d.h.  $L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$  und damit  $\frac{\partial L}{\partial t}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = 0$ , dann ist

$$H = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

eine Erhaltungsgröße und  $\frac{d}{dt}H = 0$ . Oft entspricht  $H = E$  der Gesamtenergie des mechanischen Systems.

### 3.2.4 Hamilton'sche Funktionen

**A) Hamilton'sche Gleichungen** Das System der  $f$  EULER-LAGRANGE-Gleichungen sind  $f$  Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, f$$

Die zum System der Variationsrechnung für das Wirkungsfunktional gehören.

$$S = \int_{t_-}^{t_+} dt L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$$

Die EULER-LAGRANGE-Gleichungen sind äquivalent zu den  $2f$  Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\boxed{\frac{d}{dt} q_i(t) = \dot{q}_i(t) = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p_i}} \quad i = 1, \dots, f$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} p_i(t) = \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q_i}} \quad i = 1, \dots, f \quad (3.8)$$

HAMILTON'sche Gleichungen

wobei

$$H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = \dot{\mathbf{q}}\mathbf{p} - L = \left( \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - L$$

Dabei hängt die sogenannte HAMILTON'sche Funktion  $H$  von den zueinander konjugierten Variablen  $\mathbf{q}$  (Ort) und  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  (kanonischer Impuls) ab:

$$\boxed{H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \dot{\mathbf{q}}\mathbf{p} - L}$$

Bei der Berechnung von  $\mathbf{H}$  muss also  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  gefunden werden um  $\dot{q}$  zu eliminieren. Dies gelingt durch Invertierung von

$$\mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

**Beispiel:**

Eindimensionale Bewegung im Potential. Laut NEWTON gilt:

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$$

Die kinetische Energie  $T$  und die potentielle Energie  $U$  sind gegeben durch:

$$T = \frac{m}{2} \dot{q}^2 \quad \text{und} \quad U = U(q)$$

Die LAGRANGE-Funktion lautet dann:

$$L(q, \dot{q}) = T - U = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q)$$

Der Impuls  $p$  ist nichts anderes als:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

Dessen Invertierung lautet damit also:

$$\dot{q} = \frac{1}{m} p$$

Die HAMILTON-Funktion sieht dann folgendermaßen aus:

$$H = \dot{q}p - L = \frac{pp}{m} - \frac{1}{2m}p^2 + U(q) = \frac{p^2}{2m} + U(q) = T + U$$

EULER-LAGRANGE-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$$

HAMILTON'sche Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \end{aligned}$$

Mit den selben Anfangsbedingungen legen die HAMILTON-Gleichungen und die EULER-Gleichungen die selben Bahnen fest!

**Beweis:** über Betrachtung des totalen Differentials

$$dH(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Achtung:  $H$  hängt nicht von  $\dot{q}$  ab!

Vergleichen mit dem Differential  $dX$  von  $X = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  also

$$dX(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}, t) = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial t} dt + \left( \mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) d\dot{\mathbf{q}}$$

Behauptung:

Dmit  $dH \stackrel{!}{=} dX$ , muss  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  sein, genau so wie  $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$  und  $\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$ . Außerdem gilt mit diesen Beziehungen, (mit der zugehörigen EULER-Gleichung):

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

**Bemerkungen:**

- Die HAMILTON'sche Funktion  $H$  spielt beim Übergang zur Quantenmechanik eine zentrale Rolle

- $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  ist Funktion im  $2f$ -dimensionalen *Phasenraum*, wenn Konfigurationsraum  $f$ -dimensional ist
- Jedes Variationsproblem lässt sich mit  $L$  oder  $H$  formulieren (falls Inversion  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  möglich ist)
- für ein mechanisches Problem ist häufig  $L = T - U$  mit  $U = U(\mathbf{q})$  und  $T = \sum_i \frac{m}{2} \dot{q}_i^2$ , sodass  $p_j = m_j \dot{q}_j \Rightarrow \dot{q}_j = \frac{p_j}{m_j}$

$$H = \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - L = 2T - (T - U) = T + U$$

damit ist  $H$  die Gesamtenergie. Es gilt dann auch:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_i} = m_j \delta_{ij}$$

sodass  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  nach  $\dot{\mathbf{q}} = g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  auflösbar ist, nämlich  $\dot{q}_j = \frac{1}{m_j} p_j$ .

### 3.2.4.1 Energieerhaltung

Aus dem totalen Differential von  $H$  folgt die totale Zeitableitung (mit den HAMILTON'schen Gleichungen):

$$\frac{dH}{dt}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial t} = -\dot{\mathbf{p}} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Wenn die HAMILTON'sche Funktion (bzw. die LAGRANGE-Dichte) nicht explizit von der Zeit  $t$  abhängt (also  $-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = 0 \Rightarrow H = E = \text{const.}$ ), dann ist  $H$  insgesamt eine Konstante, die man häufig einfach Gesamtenergie nennt.

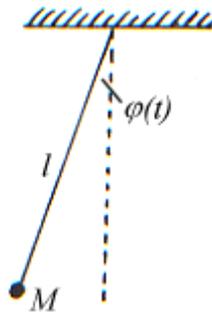
#### Bemerkungen:

- Systeme mit  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  heißen autonom
- $E$  ist oft Gesamtenergie
- Erhaltungsgrößen / Konstanten der Bewegung / Erste Integrale (erhaltene Energie und kanonischer Impuls einer zyklischen Variable) sind nützlich zur Bestimmung der Bahnen

### 3.2.5 Zwangsbedingungen

#### (A) Holonome Zwangsbedingungen Bsp.:

##### (i) Starres (ebenes) Pendel



Die Behauptung, der Massepunkt hängt an einer Stange der festen Länge  $L$  ist eine Zwangsbedingung.  $|\mathbf{r}(t)| = L$  ist eine Modellierung des Festkörpers Stange.

##### (ii) Zwei starr gekoppelte Pendel

Seien zwei Pendel durch eine Feder gekoppelt

$$L = L_1 + L_2 + \frac{\alpha}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

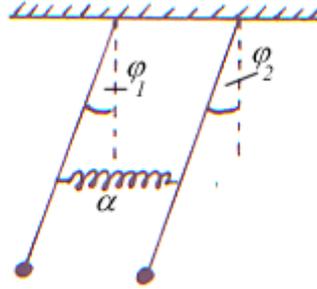


Abbildung 3.2: (starr) gekoppelte Pendel

Im Grenzfall  $\alpha \rightarrow \infty$ : Starre Kopplung wird modelliert durch die Zwangsbedingung  $\varphi_1 = \varphi_2$ . (siehe Aufgabe 38)

**Bemerkung:**

Nur selten (hier in (ii)) verstehen wir mechanische Geräte (Stangen, Federn, Schaniere etc.), welche Zwangsbedingungen realisieren. Ziel: Allgemein wollen wir jedoch technische Geräte einfach modellieren. Das machen wir durch Zwangsbedingungen

**Definition:** Sei ein mechanisches System nach LAGRANGE gegeben im  $f$ -dimensionalen Konfigurationsraum durch die LAGRANGEDICHTE

$$l = l(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), t) = l(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

Das System von  $n$  Gleichungen

$$\begin{aligned} F_1(q_1(t), \dots, q_f(t), t) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(q_1(t), \dots, q_f(t), t) &= 0 \end{aligned}$$

kurz  $F_i(\mathbf{q}(t), t) = 0$  für  $1 \leq i \leq n$  ( $n < f$ ) gibt  $n$  **holonome Zwangsbedingungen**.

Als Reaktion auf diese Zwangsbedingungen wirkt das System mit Zwangskräften  $\mathbf{Z}$  nach außen, d.h. auf die mechanischen Geräte, die die Zwangsbedingungen erzwingen.

(iii) **Perle auf rotierendem Ring im Schwerfeld** Ein Ring mit Radius  $R$ , der sich um die vertikale  $\hat{z}$ -Achse durch seinen Mittelpunkt mit fester Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dreht, auf dem ein Massepunkt  $m$  reibungsfrei gleitet.

Seine Polarkoordinaten lauten also:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos \varphi(t) \sin \vartheta(t) \\ y(t) &= r(t) \sin \varphi(t) \sin \vartheta(t) \\ z(t) &= r(t) \cos \vartheta(t) \end{aligned}$$

mit LAGRANGEDICHTE

$$\Rightarrow l = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) - m g r \cos \vartheta$$

Und die Zwangsbedingungen für  $m$  lauten:

$$\begin{aligned} r(t) &= R && \text{(fester Radius des Ringes)} \\ \varphi(t) &= \omega t && \text{(konstante Rotation)} \end{aligned}$$

Die 3 Koordinaten des Massepunktes unterliegen den Zwangsbedingungen: für  $\mathbf{r}$  in Polarkoordinaten also:

$$\begin{aligned} F_1(r, \varphi, \vartheta, t) &= r^2 - R^2 = 0 \\ F_2(r, \varphi, \vartheta, t) &= \varphi - \omega t = 0 \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

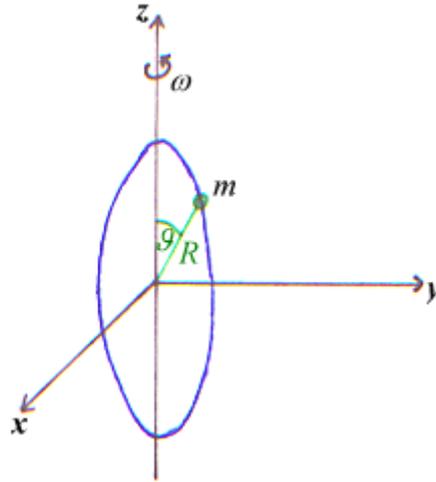


Abbildung 3.3: Perle auf rotierendem Ring

- Koordinaten sind wegen Zwangsbedingungen nicht unabhängig voneinander.
- Zeitunabhängige Zwangsbedingungen (d.h. alle  $F_i(\mathbf{q}, t)$  sind  $F_i(\mathbf{q})$ ,  $\frac{\partial F_i}{\partial t} = 0$ ) heißen *skleronom*. Zeitabhängige heißen *rheonom*.
- Nicht holonome Zwangsbedingungen lassen sich nicht in Form  $F_i(\mathbf{q}(t), t) = 0$  bringen, da sie die Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  enthalten, so dass es keine Stammfunktion gibt.

**(B) Lagranges System mit Zwangsbedingungen** Satz (i): Ein System mit  $f$  Freiheitsgraden

$$l = l(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$$

wird durch  $n$  funktional unabhängige holonome Zwangsbedingungen.

$$F_i(q_1, \dots, q_f, t) = 0 \quad 1 \leq i \leq n < f$$

auf einen  $F = f - n$ -dimensionalen Konfigurationsraum  $M$  gezwungen, der beschrieben sei durch  $F$  lokale Koordinaten  $\mathbf{Q}$ , also  $Q_1, \dots, Q_F$ .

Wenn in  $M$  die alten Koordinaten  $\mathbf{q}$  durch die neuen Koordinaten  $\mathbf{Q}$  ausgedrückt werden können, d.h.  $q_i = f_i(\mathbf{Q}, t)$  für  $1 \dots f$  so lautet die neue LAGRANGEDichte  $L$ , die das System vollständig in  $M$  beschreibt:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) &= L(Q_1, \dots, Q_F, \dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_F, t) \\ &= l(q_1 = f_1(\mathbf{Q}, t), \dots, \underbrace{q_i = f_i(\mathbf{Q}, t)}_{(*)}, \dots, \dot{q}_1, q_f = \frac{d}{dt} f_1(\mathbf{Q}, t), \dots, \underbrace{\dot{q}_i = \frac{d}{dt} f_i(\mathbf{Q}, t)}_{(**}), \dots, \frac{d}{dt} f_f, t) \end{aligned}$$

(\*):  $i$ -te Komponente von  $q_i = f_i(\mathbf{Q}(t), t) = q_i(\mathbf{Q}, t)$  (letzte Gleichheit als Abkürzung)

(\*\*):  $i$ -te Komponente der Geschwindigkeit  $\dot{q}_i = \frac{d}{dt} f_i(\mathbf{Q}, t) = \frac{d}{dt} q_i(\mathbf{Q}, t) = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^F \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j$

**Satz (ii):** Ist das System gegeben durch  $L$  in  $M$  gelöst (z.B. durch EULER, LAGRANGE, Energiesätze), so ist das Problem mit  $l$  gelöst, und man erhält die Zwangskräfte, indem man die  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{Q}(t), t)$  in die ursprüngliche EULER-LAGRANGE-Gleichung von  $l$  einsetzen.

$$\text{d.h.} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} \Bigg|_{q_i(t)=f_i(\mathbf{Q}, t)} =: Z_i \quad 1 \leq i \leq f$$

Dies ist die Definition der Zwangskraft, dass man in die ursprüngliche EULER-LAGRANGE-Gleichung zu  $l$ , die aus dem  $\mathbf{Q}(t)$  bestimmten ursprünglichen Koordinaten  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{Q}, t)$  einsetzt.

**Bew:** von Satz (i) in 3.4.3  
von Satz (ii) gibt die Definition

**Bem:** Satz gibt allgemeines Lösungsverfahren.

**Zu Bsp (iii):**

1. Formuliere  $l = U - T$  (z.B. in Kartesischen Koordinaten)

$$l(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - U(r) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad (\text{Ausgangspunkt})$$

2. Berücksichtige Zwangsbedingungen durch Einführung geeigneter krummliniger Koordinaten um Zwangsbedingungen einfach zu formulieren, hier Polarkoordinaten  $r, \varphi, \vartheta$  mit denen der neue Konfigurationsraum  $M$  lautet:
3. Berücksichtige Zwangsbedingungen, und finde neue Variable  $Q$  in  $M$ , die uneingeschränkt variiert. hier:  $Q(t) = \vartheta(t)$  als Winkel zur  $\hat{z}$ -Achse.

$$M = \{Q : Q(t) = \vartheta(t) | 0 \leq Q \leq \pi\} \quad (F = 3 - 2 = 1)$$

Die ursprünglichen Koordinaten lauten in  $M$  durch  $Q$  ausgedrückt:

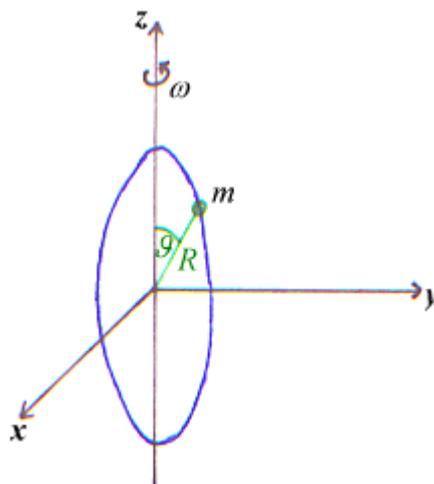
$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos \omega t \sin Q(t) \\ y(t) &= R \sin \omega t \sin Q(t) \\ z(t) &= R \cos Q(t) \end{aligned}$$

und erfüllen die Zwangsbedingungen:  $Zb_1$  und  $Zb_2$

4. Stelle neues  $L$  auf (im  $F = 1 = \dim M$ ):

$$\begin{aligned} L(Q, \dot{Q}, t) &= l(x(t) = R \cos \omega t \sin(Q(t)), y(t) = \dots, \dot{x} = -R\omega \sin \omega t \sin Q(t) + R\dot{Q} \cos \omega t \cos Q(t), \dots) \\ &= \frac{m}{2} \left( R^2 \dot{Q}^2 + R^2 \omega^2 \sin^2 Q \right) - mg R \cos Q \end{aligned}$$

5. Löse  $L(Q, \dot{Q}, t)$  durch LAGRANGE / HAMILTON - Formalismus, um  $Q(t)$  aus den Anfangsbedingungen  $Q(t_0), \dot{Q}(t_0)$  zu bestimmen.
6. Falls von Interesse, bestimme ursprüngliche Koordinaten  $(x, y, z)$  oder  $(r, \varphi, \vartheta)$  aus  $Q(t)$  um Zwangskraft zu bestimmen. Hier z.B.  $Z_r$  (radiale Zwangskraft).



$$Z_r = \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial l}{\partial r} \Bigg|_{\substack{r=R; \\ \varphi=\omega t; \\ \vartheta=Q(t)}} = m \left( \ddot{r} - \left( \dot{Q}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 Q \right) r + g \cos Q \right) \Bigg|_{\substack{r=R; \\ \varphi=\omega t; \\ \vartheta=Q(t)}} = mR \left( \underbrace{\dot{Q}^2}_{(i)} + \underbrace{\omega^2 \sin^2 Q}_{(ii)} + \underbrace{mg \cos Q}_{(iii)} \right)$$

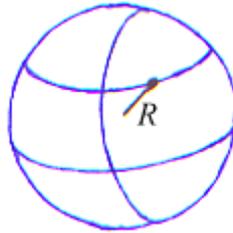
- (i): Zentrifugalkraft für Bewegung entlang des Rings.  
(ii): Radiale Komponente ( $\sin Q$ ) der Zentrifugalkraft bei Rotation um die  $\hat{z}$ -Achse im Abstand  $R \sin Q$ .  
(iii): Radiale Komponente der Gewichtskraft

**Bem:**

- Genau diese Zentralkraft muss der Ring aushalten
- Behandlung von Zwangsbedingungen nach LAGRANGE einfacher, als nach NEWTON
- Alternatives Lösungsverfahren zur Behandlung von (nicht-homonomen) Zwangsbedingungen verwendet LAGRANGE-Multiplikatoren. (s. in Lehrbüchern, wir etwa NOLTING, "Grundkurs Theoretische Physik" Band 2)

**3.3 Mathematischer Einschub**

In diesem Einschub werden wir etwas Geometrie behandeln. Eine Motivation dazu liefert der nächste Paragraph

**3.3.0 Motivation**

Zunächst untersuchen wir die Bewegung eines Massenpunktes auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius  $R$  (entspricht sphärisches Pendel). Für diese Bewegung gilt die Zwangsbedingung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad R = 1 \text{ o.B.d.A.}$$

Die Bahn des Punktes liegt in der Menge aller Punkte auf der Oberfläche der sogenannten „Einheitskugel“ oder auch „Einheitsphäre“, die durch:

$$S^{(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

definiert ist.

Somit ist die Einheitsphäre der Konfigurationsraum  $S^{(2)} = M$ .

Es stellt sich nun die Frage, wie man in diesem Konfigurationsraum rechnet. Beispielsweise interessiert man sich für die Geschwindigkeit („die Ableitung der Bahnkurve“). Für zwei Orte in  $S^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &\in M = S^{(2)} \\ \mathbf{r}_2 &\in M = S^{(2)} \\ \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 &\notin M \end{aligned}$$

gilt aber (i.A.). Wenn wir z.B. TAYLOR-entwickeln

$$\mathbf{r}(t) \approx \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)}{t_2 - t_1} (t - t_1) + \mathbf{r}(t_1) \xrightarrow{t_2 \rightarrow t_1} \mathbf{v}(t_1)(t - t_1) + \mathbf{r}(t_1)$$

haben wir das Problem, dass dieser Ausdruck für  $\mathbf{r}(t)$  nicht im Konfigurationsraum liegt,  $\mathbf{r}(t) \notin M$ . Somit muss geklärt werden, wie die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  und die Beschleunigung  $\dot{\mathbf{v}}(t)$  definiert werden muss, wenn die Bewegung ganz in  $S^{(2)}$  verlaufen soll.

In der Newton'schen Mechanik benötigt man die Beschleunigung!

**Lösung:**

Die analytische Mechanik (nach LAGRANGE, HAMILTON etc.) verwendet generalisierte Koordinaten.

## 3.3.1 Karten und Koordinaten

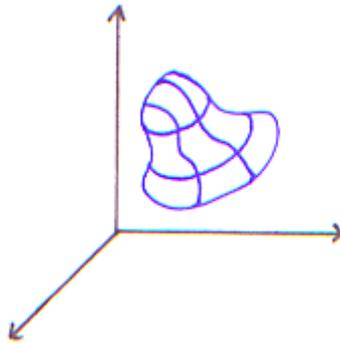


Abbildung 3.4: zur Definition von Karten

**A) Definition:** Für eine Menge  $M$  (Konfigurationsraum nach Lagrange) von Punkten im  $\mathbb{R}^n$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$ , wollen wir Koordinaten einführen, um jeden Punkt aus  $M$  zu bezeichnen („labeln“). Koordinaten sind Tupeln von  $f \leq n$  reellen Zahlen  $q_1, \dots, q_f$  aus einem offenen Gebiet  $U \subseteq \mathbb{R}^f$

**Bemerkungen:**

- Die Zahl  $f$  der notwendigen Koordinaten heißt Dimension von  $M$ .
- kartesische Koordinaten  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$  leisten das Gewünschte, wenn im  $\mathbb{R}^n$  eingebettet ist, häufig sind aber „krummlinige“ Koordinaten viel nützlicher als kartesische.

**Definition:**

Eine **Karte** ist eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^f$  mit den Koordinaten Punkt  $(q_1, \dots, q_f) \in U$  zusammen mit eindeutig umkehrbaren Abbildungen von  $U$  in eine Untermenge  $f(U) \subset M$ . ( $\subset \mathbb{R}^n$ )

$$f : U \mapsto f(U) \subset M; \quad r_i = f_i(q_1, \dots, q_f) \quad i = 1 \dots n$$

Was wir hier unter Karten verstehen, kann man vergleichen mit Landkarten die jeden Punkt einer geographischen Region genau beschreiben.

1. Beispiel:

$M = S^{(1)}$  Einheitskreis mit  $n = 2$  und damit  $\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$S^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

a) in kartesischen Koordinaten:

Sei  $U$  gegeben:  $q \in ]-1, 1[ = U$

Eine Abbildung sei:  $f : x = q \quad y = \sqrt{1 - q^2}$

sodass  $f_1(U) = \{\text{Halbkreis}, y > 0\}$

Andere Abbildung sei  $f_2 : x = q \quad y = -\sqrt{1 - q^2}$

sodass  $f_2(U) = \{\text{Halbkreis}, y < 0\}$

b) Karte in Polarkoordinaten:

$\varphi_1 \in ]0, 2\pi[$

$x = \cos \varphi_1 \quad y = \sin \varphi_1$

$$f(u) = \left\{ \text{Kreis} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

**Bem.:**  $S^{(1)}$  ist Konfigurationsraum des Pendels (2.3.2)

## 2. Beispiel:

Wir betrachten wieder die Einheitskugel  $M = S^{(2)}$  in  $\mathbb{R}^3$ :  $S^{(2)} = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Damit folgt  $f = 2$ .

a) Zunächst wollen wir dieses Problem in kartesischen Koordinaten behandeln:

$$(q_1, q_2) \subset \left\{ \text{offener Einheitskreis } \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \text{ mit } q_1^2 + q_2^2 < 1 \right\} = U$$

Mit der Abbildung in die Kugel:

$$f: \quad x = q_1, \quad y = q_2, \quad z = \sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2}$$

$$f(u) : \{ \text{Halbkugel } z > 0 \}$$

b) Karte in der stereographischen Projektion für  $y = 0$ :

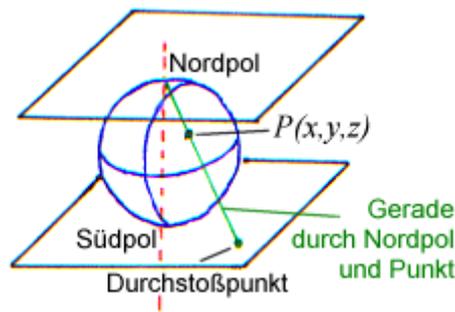


Abbildung 3.5: stereographische Projektion ergibt sich als Durchstoßpunkt der Gerade durch den Nordpol und dem Punkt auf der Erde mit der Tangentialebene des Südpols.

$$\text{Geradengleichung: } g(s) = z + \frac{1-z}{(-x)}(s-x)$$

$$\text{Durchstoßpunkt: } g(q_1) = -1$$

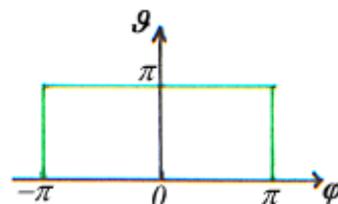
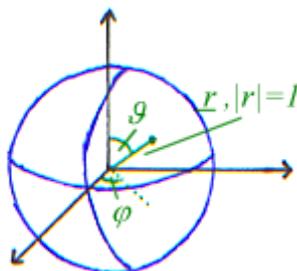
$$\Rightarrow q_1 = \frac{z}{1-z}$$

$$\text{also die Fläche der Karte: } U = \mathbb{R}^2 \quad -\infty < q_1, q_2 < \infty$$

$$\text{Das Bild ist: } f(U) = \left\{ \text{Einheitskugel ohne Nordpol, } S^{(2)} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

$$\text{Umkehrabbildung: } f^{-1}: \quad q_1 = \frac{2x}{1-z} \quad q_2 = \frac{2y}{1-z}$$

c) Karte in Polarkoordinaten



$$\begin{aligned}
 U &= -\pi < \varphi < \pi & 0 < \vartheta < \pi \\
 x &= \cos \varphi \sin \vartheta \\
 f: \quad y &= \sin \varphi \sin \vartheta & f(U) &= S^{(2)} \setminus \underbrace{\{x = -\sin \vartheta, y = 0, z = \cos \vartheta, 0 \leq \vartheta \leq \pi\}}_{\text{Datumslinie}} \\
 z &= \cos \vartheta
 \end{aligned}$$

Umkehrung:

$$\vartheta = \arccos z \quad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arccot} \frac{x}{y} & y > 0 \\ 0 & y = 0 \\ -\operatorname{arccot} \frac{x}{-y} & y < 0 \end{cases}$$



**Bemerkungen:**

- Eine Karte reicht typischerweise nicht aus, um die Einheitssphäre ganz darzustellen.
- $U$  soll eine offene Menge sein, um infinitesimale Verschiebungen  $dq_i$  um jeden Punkt zuzulassen; dadurch sind Ableitungen möglich.

Die Lösung von LAGRANGE zum Problem, das in der Motivation gestellt wurde, lautet, dass wir nur in  $U$  differenzieren müssen und nicht im Konfigurationsraum  $M$ . Für die Geschwindigkeit benötigen wir nur  $\dot{\varphi}(t)$  und  $\dot{\vartheta}(t)$ .

Da  $U$  eine offene Menge und einfache „flache“ Teilmenge des  $\mathbb{R}^f$  ist, können wir das und es ist wie gewohnt.

**Definition:**

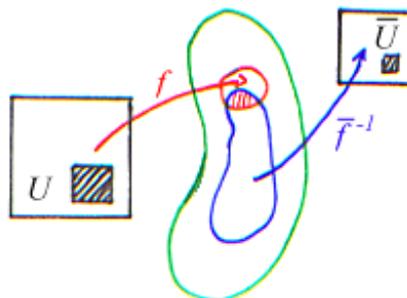
Ein **Atlas** ist eine Sammlung von „kompatiblen“ Karten, so dass jeder Punkt von  $M$  in mindestens einer Karte dargestellt werden kann.

Zwei Karten  $U$  und  $\bar{U}$  haben einen überlappenden Bildbereich in  $M$ :  $f(U) \cap \bar{f}(\bar{U}) = \bar{M} \neq \emptyset$ .

Beide Karten heißen **kompatibel**, wenn die Abbildungen:

$$\begin{aligned}
 f^{-1} \circ \bar{f} &: q_i = \bar{g}_i(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_f) \\
 \bar{f}^{-1} \circ f &: \bar{q}_i = g_i(q_1, \dots, q_f)
 \end{aligned} \quad \text{für } i = 1, \dots, f$$

differenzierbar und zueinander invers sind.



Diese Formulierung ist viel komplizierter, als was man sich darunter vorstellen muss. Vergleichen wir hier wieder mit Landkarten, so sind dort zwei Landkarten genau dann kompatibel, wenn die selbe Strecke auf beiden Karten auch gleich lang ist, dazu muss man vielleicht auf der einen von Inch in Zentimeter umrechnen, aber es gibt diese Umrechnungsformeln und sie sind umkehrbar.

### 3.3.2 Koordinatentransformationen

Der Übergang  $\mathbf{q} \rightarrow \bar{\mathbf{q}}$  oder  $\bar{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{q}$  heißt **Koordinatentransformation** (oder auch Punkttransformation). Diese Definition der Koordinatentransformation ist viel allgemeiner gehalten als bei der Relativitätstheorie (vgl. LORENTZTRANSFORMATION), die linear war.

In der analytischen Mechanik muss nur die Kompatibilität von Koordinaten bei Koordinatentransformationen gesichert sein.

#### Satz:

Eine differenzierbare Koordinatentransformation mit JACOBI-Determinante  $\neq 0$  im Punkt  $P$  ist lokal umkehrbar und gibt zulässige Koordinatentransformation in Umgebung von  $P$ .

#### Beweis:

Eine Koordinatentransformation  $\bar{q}_i = g_i(q_1, \dots, q_f) = g_i(\mathbf{q})$  für  $i = 1 \dots f$  ist im Punkt  $P$  differenzierbar, wenn die JACOBI-Determinante  $J$  von Null verschieden ist, d.h.:

$$\det \left. \frac{\partial g_i}{\partial q_j} \right|_P = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial q_f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_f}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial g_f}{\partial q_f} \end{pmatrix} \right|_P \neq 0$$

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt dann, dass die  $f$  Gleichungen für die  $\bar{q}_i$ :

$$F_i(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_f, q_1, \dots, q_f) = \bar{q}_i - g_i(\mathbf{q}) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, f$$

aufgelöst werden können nach den  $\mathbf{q} = \bar{g}(\bar{\mathbf{q}})$

Beispiel: ebene Polarkoordinaten:

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad -\infty < x, y < \infty$$

also:

$$\varphi = \operatorname{arccot} \frac{x}{y}, \quad y \neq 0, \quad \varphi = 0, \quad y = 0 \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad 0 < r < \infty$$

$$J = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0 \quad \text{für } r \neq \infty$$

**Fazit:** Es genügt bei einer Koordinatentransformation in der analytischen Mechanik sicher zu stellen, dass die JACOBI-Matrix  $\neq 0$  ist (fast überall).

### 3.3.3 Koordinatentransformation zur Eliminierung von Zwangsbedingungen

#### Definition:

- $m$  holonome Zwangsbedingungen ( $F_i(q_1, \dots, q_l, t) = 0$ ) sind **funktional unabhängig**, wenn eine differenzierbare Koordinatentransformation:

$$q_i = f_i(Q_1, \dots, Q_F, \bar{q}_{F+1}, \dots, \bar{q}_f, t) \quad i = 1..f$$

existiert, so dass die Zwangsbedingungen lauten:

$$F_i(\dots q_i(\mathbf{Q}, \bar{\mathbf{q}}) \dots) = \bar{F}_i(Q_1, \dots, Q_F, \bar{q}_{F+1}, \dots, \bar{q}_f, t) = 0$$

und die Funktionaldeterminante im Punkt  $P$  mit  $i = 1, \dots, m$ :

$$\operatorname{Det} \left\{ \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \bar{q}_j} \right\} \neq 0 \quad \text{erfüllt, für } j = F + 1, \dots, f \text{ wobei } F = f - m \text{ und } i = 1, \dots, n$$

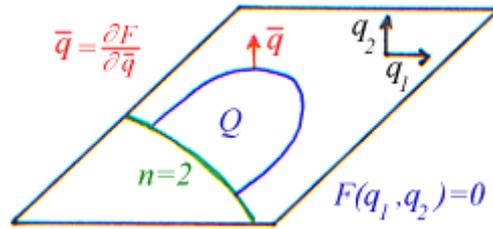
Nach dem Satz über implizite Funktionen können dann die  $m$  Zwangsbedingungen  $F_i = 0$  in der Umgebung von  $P$  eindeutig aufgelöst werden nach

$$\bar{q}_i = g_i(Q_1, \dots, Q_F, t) \quad F + 1 \leq i \leq f$$

sodass dies eingesetzt in Zwangsbedingungen diese erfüllt.

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(\mathbf{Q}, t), t), t) = 0$$

und damit ist es gelungen auf  $M$  die alten Koordinaten  $\mathbf{q}$  durch die neuen  $\mathbf{Q}$  auszudrücken und die Zwangsbedingungen automatisch zu erfüllen.



Beispiel<sup>2</sup>:

$M$  sei als Konfigurationsraum gegeben durch die Zwangsbedingung:

$$F(q_1, q_2) = 0$$

dann ist  $f = 2$  und  $F = 1$ .

Wir betrachten als Beispiel ein Pendel der festen Länge  $l = 1$ , zunächst haben wir  $f = 2$  Koordinaten ( $q_1$  &  $q_2$ ) mit der Zwangsbedingung:

$$F(q_1, q_2) = q_1^2 + q_2^2 - 1 = 0$$

Die Zwangsbedingung ist funktional unabhängig, also führen wir eine Koordinatentransformation in Polarkoordinaten durch:

$$\begin{aligned} q_1 &= \bar{q} \cos Q = f_1(\bar{q}, Q) & 0 < \bar{q}, 0 < Q < 2\pi \\ q_2 &= \bar{q} \sin Q = f_2(\bar{q}, Q) \end{aligned}$$

Die Zwangsbedingung lautet dann:

$$\bar{F}(\bar{q}, Q) = F(f_1, f_2) = \bar{q}^2 - 1 = 0$$

Und weil  $\det \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{q}} = 2\bar{q} \neq 0$ , kann man also  $\bar{F} = 0$  und man kann nach  $\bar{q} = g(Q)$  auflösen. In diesem liegt ein Spezialfall vor, nämlich dass  $\bar{q} = 1 = const.$ , also unabhängig von  $Q$  ist.

**Fazit:** Die Betrachtung der Funktionaldeterminanten genügt, um die Zwangsbedingungen durch die Wahl geschickter Koordinaten zu eliminieren.

**Zur Erinnerung: Satz über implizite Funktionen:**

Seien  $U_1 \subset \mathbb{R}^k$  und  $U_2 \subset \mathbb{R}^m$  offene Teilmengen und

$$F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x, y) \mapsto F(x, y)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei  $(a, b) \in U_1 \times U_2$  ein Punkt mit

$$F(a, b) = 0.$$

Die  $m \times m$ -Matrix

$$\frac{\partial F}{\partial y} := \frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

<sup>2</sup>Dieses Beispiel wurde nicht in der Vorlesung besprochen.

sei im Punkt  $(a,b)$  invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung  $V_1 \subset U_1$  von  $a$ , eine Umgebung  $V_2 \subset U_2$  von  $b$  sowie eine stetig differenzierbare Abbildung  $g : V_1 \rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^m$  mit  $g(a) = b$ , so dass

$$F(x,g(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in V_1$$

Ist  $(x,y) \in V_1 \times V_2$  ein Punkt mit  $F(x,y) = 0$ , so folgt  $y = g(x)$ .<sup>3</sup>

### 3.3.4 Differenzierbare Mannigfaltigkeit

#### Definition:

Eine zusammenhängende Menge ist ein  $f$ -dimensionale *differenzierbare Mannigfaltigkeit*, wenn ein Atlas aus kompatiblen Karten existiert, so dass jeder Punkt von  $M$  in mindestens einer Karte vorhanden ist.

#### Bemerkungen:

- Mannigfaltigkeiten sind Konzepte zur Verallgemeinerung des Raumes auf krummlinige Koordinaten.
- Differentiation etc. wird mit den Koordinaten in den kartesischen Koordinaten  $U \subset \mathbb{R}^f$  durchgeführt.
- Der Konfigurationsraum  $M$  eines LAGRANGE-Systems ist eine  $f$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

## 3.4 Symmetrien und Erhaltungssätze

Symmetrien und Erhaltungssätze sind Einsichten in mechanische Systeme, die aus der Formulierung als Variationsprinzip nach LAGRANGE abgeleitet werden können.  
(analoge Ergebnisse gelten für alle Variationsprobleme)

### 3.4.1 Bahndeterminismus

Wir erinnern uns an die Beobachtung von NEWTON:

Durch Anfangsorte und Anfangsgeschwindigkeiten sind die Bahnen eindeutig mit der NEWTON'schen Bewegungsgleichung festgelegt:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$$

natürlich stellt sich nun die Frage, ob dies auch in der Formulierung der Mechanik nach LAGRANGE gilt. Dazu betrachten wir die EULER-LAGRANGE-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 = \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \left( + \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)$$

Wir definieren die sogenannte LEGENDRE-Matrix:

$$L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$

Wenn die LEGENDRE-Matrix  $L_{ij}$  invertiert werden kann (gemäß den Rechenregeln aus der Linearen Algebra bedeutet dies, dass ihre Determinante von Null verschieden sein muss), dann sind die EULER-LAGRANGE-Gleichungen äquivalent zu folgenden expliziten Differentialgleichungen 2<sup>ter</sup> Ordnung:

$$\ddot{q}_i + \left( \sum_{j=1}^f (L^{-1})_{ij} \sum_k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0$$

Diese Gleichungen liefern nach den Sätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen eindeutige Lösungen zu den Anfangswerten:

$$q(t_0) = q_0 \quad \text{und} \quad \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0 \quad \text{für } i = 1 \dots f$$

<sup>3</sup>Der Beweis des Satzes und weitere Anmerkungen z.B. in [For]

Daraus folgt, dass es sich auch bei der LAGRANGE-Formulierung der Mechanik um eine eindeutige deterministische Bewegung handelt, für den Fall, dass die Determinante der LEGENDRE-Matrix von Null verschieden ist. Dann legen also die Anfangswerte für Ort und Geschwindigkeit die Bahn eindeutig fest.

**Bemerkung:**

Ein Gegenbeispiel, wo Variationsrechnung keine eindeutige Lösung liefert, ist das Beispiel der kürzesten Bahn in der Ebene:

$$L = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}$$

$$L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$

$$\Rightarrow L_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{x}^2 & -\dot{x}\dot{y} \\ -\dot{x}\dot{y} & \dot{y}^2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}$$

mit  $\det(L_{ij} \equiv 0)$ .

Es existiert also keine eindeutige Lösung, was wir nicht erwartet haben. Über die Geschwindigkeiten kann keine Aussage getroffen werden.

$\Rightarrow$  Gerade kann mit beliebiger Geschwindigkeit  $v$  durchlaufen werden

### 3.4.2 Kovarianz

**Definition:**

**Kovariant** also (**form-**)**invariant** heißen Bewegungsgleichungen, die in beliebigen Koordinatensystemen dieselbe funktionale Form annehmen.

Die Idee ist, dass die Physik unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist.

**Bemerkung:**

Die NEWTON'sche Mechanik mit  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$  ist nur kovariant unter Galilei-Transformation, ansonsten treten Scheinkräfte auf.

**Satz:**

Die Eigenschaft einer Kurve, eine Extremale des Wirkungsfunktional zur LAGRANGEDichte zu sein, ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten.

Dieser Satz bedeutet, dass die EULER-LAGRANGE-Gleichungen kovariant unter beliebigen zulässigen Koordinatentransformationen (Punkttransformation) sind.

Die Kovarianz ist der große Vorteil der Variationsrechnung!

Wir wollen im Folgenden den Satz beweisen:

Die Behauptung lautet, dass aus:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} = 0 \quad (\text{z.B. kartesische Koordinaten})$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0 \quad (\text{z.B. Polarkoordinaten})$$

die selbe Bahn folgt, wenn die Koordinaten zusammenhängen durch Koordinatentransformation:

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{Q}, t)$$

und beide LAGRANGEDichten durch Einsetzen der Koordinaten verknüpft sind.

$$L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = l\left(\mathbf{f}(\mathbf{Q}, t), \frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{Q}, t), t\right)$$

Wir stellen folgende Vorüberlegungen an (mit EINSTEIN'scher Summenkonvention):

$$\frac{d}{dt} q_i = \dot{q}_i = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k$$

da  $f$  nur von Koordinaten  $\mathbf{Q}$  abhängt (und  $\dot{\mathbf{Q}}$  nicht auftaucht)

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \quad (*)$$

da  $\dot{Q}_j$  nur explizit auftaucht.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial Q_j} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial Q_j \partial Q_k} \dot{Q}_k \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_j} \quad (**)$$

Damit folgt für  $X := \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L}{\partial Q_j}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial Q_j} &= \frac{\partial l}{\partial Q_j} = \sum_i \frac{\partial l}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \sum \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_i \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} \stackrel{*}{=} \sum_i \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} &\stackrel{\text{Prod.-Reg.}}{=} \sum_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \sum_i \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right) \end{aligned}$$

Die letzten drei Formeln liefern:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = \sum_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \sum_i \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right)$$

da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial Q_j \partial t} + \sum_k \frac{\partial^2 f_i}{\partial Q_j \partial Q_k} \dot{Q}_k \stackrel{**}{=} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}$$

folgt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$$

Somit ist bewiesen, dass die EULER-LAGRANGE-Gleichungen für die  $\mathbf{Q}$ -Koordinaten gelten, weil sie für die  $\mathbf{q}$ -Koordinaten gelten.

also

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial l}{\partial Q_j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} = 0$$

### 3.4.3 Kovarianz unter holonomen Zwangsbedingungen

In 3.2.5 wurde behauptet, dass das LAGRANGE-System  $l(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  mit  $n$  Zwangsbedingungen  $F_i(\mathbf{q}, t)$  für  $i = 1, \dots, n$  gelöst wird durch  $L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)$  in der  $F=f$ - $n$  dimensionalen Mannigfaltigkeit (Konfigurationsraum)  $\mathcal{M}$ . In 3.3.3 wurden Koordinaten gefunden, so dass innerhalb von  $\mathcal{M}$  gilt:

$$q_i = f_i(\mathbf{Q}, \bar{\mathbf{q}}, t) \quad i = 1, \dots, f$$

und alle  $\bar{q}_i$  durch die  $\mathbf{Q}(t)$  bestimmt sind:

$$\boxed{\bar{q}_i = g_i(\mathbf{Q}, t)} \quad \text{für} \quad i = F + 1, \dots, f$$

Die eingeschränkten Koordinaten  $\bar{\mathbf{q}}$ , die über die Zwangsbedingungen durch die  $\mathbf{Q}$  festgelegte Werte annehmen, sichern uns, dass  $\mathbf{F}(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, t)), t) = 0$  für alle  $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}$ . Damit können wir fortfahren

$$L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = l(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), t) \frac{d}{dt} q(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{q}), t)$$

Bei der Berechnung der Bahn in der Variationsrechnung können also nur die  $Q_1, \dots, Q_F$  variiert werden, während die  $\bar{q}_{F+1}, \dots, \bar{q}_f$  aus  $\mathbf{Q}$  folgen und ihre Werte  $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(\mathbf{Q})$  annehmen. Die Variation der Wirkung unter  $Q_i(t) \rightarrow Q_i(t, \varepsilon) = Q_i(t) + \varepsilon \delta Q_i(t)$  (Vergleichsbahnen) lautet:

$$\frac{dS}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0 = \int_{t_-}^{t_+} dt \sum_{j=1}^F \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial Q_j} \right) \delta Q_j(t)$$

weil die  $\bar{\mathbf{q}}$  feste Funktionen der  $\mathbf{Q}$  sind.

Zu beachten ist, dass die  $\delta Q_i$  beliebige Funktionen darstellen bis auf Anfangs- und Endpunkte, für die gilt:  $\delta Q_i(t_{\pm}) = 0$ .  $\left. \frac{dQ}{dq} \right|_q = 0$  zu setzen bedeutet die  $F$  EULER-LAGRANGE-Gleichungen zu lösen. Folglich gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} \neq 0$$

### 3.4.4 Eichinvarianz

Die Idee ist: Beim Variationsprinzip werden Integrale miteinander verglichen. Das heißt aber nicht, dass die Integranden auch gleich sein müssen.

**Satz:** Mit einer beliebigen Funktion  $\chi = \chi(\mathbf{q}, t)$ , die nicht von  $\dot{\mathbf{q}}$  abhängt, ergeben  $L$  und  $\bar{L} = L + \frac{d}{dt} \chi(\mathbf{q}, t)$  die selben extremalen Bahnen.

**Beweis:** Der Wert der Wirkung  $\bar{S}$  lautet dann:

$$\bar{S} = \int_{t_-}^{t_+} dt \bar{L} = \int_{t_-}^{t_+} dt L + \int_{t_-}^{t_+} \frac{d}{dt} \chi(\mathbf{q}, t) dt = S + \underbrace{\chi(\mathbf{q}(t_+), t_+) - \chi(\mathbf{q}(t_-), t_-)}_{\text{konstant}}$$

**Bemerkung:**

- Die hinteren Terme bilden eine Konstante, da beim Vergleich der Bahnen alle durch die Anfangs- und Endpunkte gehen. Diese Konstante beeinflusst die Bahn also nicht.
- Das erklärt das Verhalten von  $L$  bei Eichtransformation der elektromagnetischen Potentiale  $\phi$  und  $\mathbf{A}$  in 3.2.1 D

Es gilt:

$$\bar{\phi} = \phi + \partial_t \chi \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \nabla \chi \quad \text{und also} \quad \bar{L} = L - q \frac{d}{dt} \chi$$

mit Ladung  $q$ , was also die Bahnen von Teilchen in elektromagnetischen Feldern invariant lässt.

### 3.4.5 Das Noether-Theorem

Das NOETHER-Theorem beschreibt den Zusammenhang zwischen Symmetrien der LAGRANGEDICHTE  $L$  und Erhaltungsgrößen

**A) Erinnerung: Autonome Systeme** vgl. 3.2.4B

Wenn die Lagrangedichte ein autonomes System beschreibt, also wenn gilt  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , dann ist die HAMILTON'sche Funktion konstant:

$$H = E = \text{const.}$$

$$H = \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{p}} - L = \text{const.} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} H = \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  bedeutet, dass das System zeitlich invariant ist. Ob wir die Bewegung bei  $t_0$  starten (mit den Anfangsbedingungen  $\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$ ) ist identisch zu der Bewegung, die bei  $t'_0 = t_0 + \delta t_0$  gestartet wird mit den gleichen Anfangsbedingungen. Beide Anwendungen sind gleich bis auf eine zeitliche Verschiebung um  $\delta t_0$ . Sei die eine Bahn  $\mathbf{q}(t, t_0)$ , dann ist die zeitlich verschobene Bahn  $\mathbf{q}'(t, t'_0) = \mathbf{q}(t + \delta t_0, t_0)$

**Bemerkungen:**

- Häufig ist  $H = T + U = E$  die Gesamtenergie. Dann spricht man von Energieerhaltung.
- Im Falle rheonomer Zwangsbedingungen, die aber auf ein autonomes  $L$  führen, ist  $H = \text{const.} \neq$  Gesamtenergie, weil die Zwangskräfte Arbeit leisten (siehe Perle auf drehendem Ring (...)). Das ergibt sich aus dem Vergleich von  $H = T + U$  und  $\dot{Q} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} - L$ .

ges. Energie:  $E = T + U = \frac{m}{2}v^2 + mgz = \frac{m}{2}R^2(\omega^2 \sin^2 Q + \dot{Q}^2) + mgR \cos Q$

$$H = \dot{Q} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} - L(Q, \dot{Q}) = \frac{m}{2}R^2(-\omega^2 \sin^2 Q + \dot{Q}^2) + mgR \cos Q \quad \text{also } H \neq E$$

Zwangskraft  $Z_\varphi = \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(Q,t)} = m\omega R^2 \sin 2Q \dot{Q} \quad \text{leistet Arbeit}$

**B) Erinnerung: Zyklische Variable** Zu einer zyklischen Variablen  $q_i$  (d.h.  $q_i$  taucht nicht in  $L$  auf,  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ) gehört eine Erhaltungsgröße, der zugehörige kanonische Impuls:

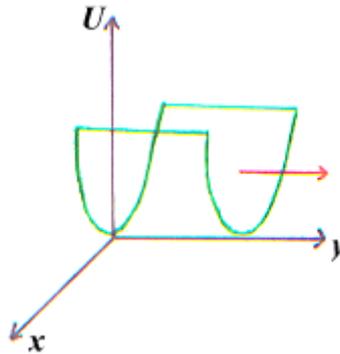
$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const.}$$

**Beweis:** EULER-LAGRANGE-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Beispiel:

in Ebene  $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U$ , sei z.B.  $U(x) = \frac{k}{2}x^2$  mit  $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ , also konstant entlang der  $y$ -Achse



$$\Rightarrow p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = \text{const.}$$

Der Impuls in  $y$ -Richtung ist konstant. Das Potential  $U$  (und damit  $L$ ) ist invariant (symmetrisch) unter Verschiebung entlang der  $y$ -Achse, d.h. unter der Abbildung  $y \rightarrow y' = y + \alpha$ . D.h. es gilt:

$$L'(x, y' - \alpha, \dot{y}', \dot{x}) = L(x, y', \dot{x}, \dot{y}')$$

$L$  ändert sich bei der Verschiebung (Koordinatentransformation) entlang der  $y$ -Achse nicht!

**Bemerkung:** Verschiebung entlang der  $X$ -Achse  $x \rightarrow x' = x + \beta$ :

$$L' = \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 - \dot{y}'^2) - U(x' - \beta) \\ \neq L(x', y, \dot{x}', \dot{y}')$$

da z.B. im harmonischen Fall

$$U(x' - \beta) = \frac{k}{2}x'^2 - \frac{k}{2}(2x'\beta - \beta^2) \neq U(x') = \frac{k}{2}x'^2$$

Natürlich gilt die Kovarianz und  $L'(x', \dots)$  gibt die selbe Bahn, wie  $L(x)$ . Jedoch liefert eine Symmetrie  $L' = L$ , sofort eine Erhaltungsgröße.

Die Idee stammt von EMMY NOETHER aus dem Jahr 1918: Wenn ein System invariant/symmetrisch ist unter kontinuierlicher Verschiebung, dann gibt es eine Erhaltungsgröße.

**C) Noether-Theorem** Betrachtet werde eine kontinuierliche Abbildung  $h^\alpha$  des Konfigurationsraumes  $\mathcal{M}$  (Verschiebung)

$$h^\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} : \bar{q}_i = h_i^\alpha(\mathbf{q}, t) \quad i = 1, \dots, f$$

die nach  $\alpha$  stetig differenzierbar sei, für  $\alpha = 0$  die identische Abbildung  $\bar{q}_i = h_i^\alpha(\mathbf{q}, t)|_{\alpha=0} = q_i$  sei und invertierbar ist, d.h.  $q_i = \bar{h}_i^\alpha(\bar{\mathbf{q}}, t)$ . Wenn LAGRANGEDichte  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  bis auf eine Eichtransformation invariant bleibt.

$$\begin{aligned} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= L(\bar{\mathbf{h}}^\alpha(\bar{\mathbf{q}}, t), \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{h}}^\alpha(\bar{\mathbf{q}}, t), t) \\ &=: \bar{L}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t, \alpha) \quad \text{Definition von } \bar{L} \\ &= L(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) + \frac{d}{dt} G(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha) \end{aligned}$$

(mit der alten LAGRANGE-Dichte!)

Dann ist folgende Funktion  $J$  konstant:

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(\bar{\mathbf{q}}, \alpha, t)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial G(\bar{\mathbf{q}}, \alpha, t)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial G}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \text{const.}$$

$J$  ist eine Erhaltungsgröße, ein Integral der Bewegung.

**Bemerkung:**

- Zu jeder Symmetrie gehört eine Erhaltungsgröße
- Nicht verwechseln mit Kovarianz! Bei der Koordinatentransformation durch Einsetzen von  $\bar{L}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, \alpha, t) = L(\bar{\mathbf{h}}^\alpha(\bar{\mathbf{q}}, t), \dot{\bar{\mathbf{h}}}^\alpha(\bar{\mathbf{q}}, t), t)$  folgt die selbe Bahn aufgrund der Kovarianz, die Funktionen  $L$  und  $\bar{L}$  sind jedoch unterschiedlich.

**Beweis:** Nach der Annahme gilt für alle  $\alpha$  (allerdings ist nur  $\alpha = 0$  benötigt):

$$\frac{d}{d\alpha} L(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) \Big|_{\alpha=0} - \frac{d}{d\alpha} \left( \bar{L}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, \alpha, t) - \frac{d}{dt} G(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha) \right) \Big|_{\alpha=0} = 0$$

Dies ist das Gleiche wie

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \bar{L}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, \alpha, t) - \frac{d}{dt} G(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha) \right) \Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} \left( L(\bar{\mathbf{h}}^\alpha(\bar{\mathbf{q}}, t), \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{h}}^\alpha(\bar{\mathbf{q}}, t), t) - \frac{d}{dt} G(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha) \right) \Big|_{\alpha=0} = 0$$

Mit EINSTEIN'scher-Summenkonvention geschrieben sieht das folgendermaßen aus:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{h}_i^\alpha}{\partial \alpha} + \partial L \partial \dot{q}_i \frac{\partial \dot{\bar{h}}_i^\alpha}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \alpha} G(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha) \Big|_{\alpha=0} = 0$$

weil bei einem festen  $\bar{\mathbf{q}}$  die Ableitung  $\frac{d}{d\alpha} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha}$  wird.

Die EULER-Gleichungen bringen uns:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

und es gilt:

$$\frac{\partial \dot{\bar{h}}_i^\alpha}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{h}_i^\alpha}{\partial \alpha}$$

Daraus folgt:

$$\frac{d}{dt} \left[ \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial G(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha)}{\partial \alpha}}_J \right] \Big|_{\alpha=0} = 0$$

**Bemerkung:**

- Dies ist ein konstruktiver Beweis!
- Er erfordert eine kontinuierliche Abbildung (Parameter  $\alpha$ ). Das Noether-Theorem liefert keine Erhaltungsgrößen bei diskrete Symmetrien (z.B. Spiegelung)
- Symmetrie  $\rightarrow$  Erhaltungsgröße Umkehrung gilt in LAGRANGE-Mechanik nicht! (Gegenbeispiel: RUNGE-LENZ-Vektor beim  $\frac{1}{r}$ -Potential)( $\rightarrow$  HAMILTON Mechanik 3.5.4)

**D) Homogenität Translationsinvarianz und Impulserhaltung (beim N-Teilchen-System)**

Räumlich homogen (translationsinvariant) bedeutet, dass eine Verschiebung

$$\bar{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{a} \quad i = 1, \dots, N \text{ Teilchenindex} \quad \text{mit } \mathbf{a} : \text{beliebiger Vektor}$$

die LAGRANGEDichte invariant lässt. D.h.:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i^2 - U(\bar{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{a}, \dots, \bar{\mathbf{r}}_N + \mathbf{a}) \\ &\stackrel{\text{Bed.}}{=} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i^2 - U(\bar{\mathbf{r}}_1, \dots, \bar{\mathbf{r}}_N) \\ \text{d.h.} \quad \bar{L}(\bar{\mathbf{r}}_i, \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i) &= T(\dot{\bar{\mathbf{r}}}_i) - U(\bar{\mathbf{r}}_i) \end{aligned}$$

Dies erfüllt die Zwangsbedingungen

(i)  $U = \text{const.}$  ( $\rightarrow$  langweilig)

(ii) abgeschlossenes  $N$ -Teilchen-System mit nur internen Wechselwirkung;  $U$  hängt nur von Abstandsvektoren  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0$  ab

$$U = \bar{U}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \dots)$$

$\Rightarrow$  folgen drei erhaltene Größen (da drei Verschiebungen mit  $a_x, a_y, a_z$ )

$$\begin{aligned} J_{a_x}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial a_x} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_{i=1}^N m \dot{x}_i = p_{x_i} \end{aligned}$$

$x$ -Komponente des Gesamtimpulses wobei verwendet wurde

$$\mathbf{r}_i = \bar{\mathbf{r}}_i + \mathbf{a} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial a_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Insgesamt folgt aus den drei Verschiebungen, dass für den Gesamtimpuls folgt:

$$\mathbf{p} = \sum_i^N \mathbf{p}_i = \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \text{const.}$$

Der Gesamtimpuls  $\mathbf{P}$  ist erhalten bei Homogenität des Raums.

**E) Isotropie des Raums und Drehimpulserhaltung** Räumlich isotrop bedeutet, dass eine Drehung um einen beliebigen Winkel  $\alpha$  um eine beliebige Achse das System invariant lässt.

Wähle die  $z$ -Achse parallel zur Drehachse mit Drehmatrix  $R_\alpha$

$$\underline{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt also  $\bar{\mathbf{r}}_i = \underline{R}_\alpha \dot{\mathbf{r}}_i$  Damit für die umgekehrte Abbildung

$$\mathbf{r}_i = \underline{R}_\alpha^T \bar{\mathbf{r}}_i \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \underline{R}_\alpha^T \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i$$

Weil  $RR^T = 1$  orthogonal ist, und weil der Ort und die Geschwindigkeit als Vektoren gleich transformiert werden. Damit folgt für  $\bar{L} = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  eingesetzt:

$$\begin{aligned}\bar{L} &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i \underbrace{R_\alpha R_\alpha^T}_{=1} \dot{\mathbf{r}}_i - U(\dots, \underline{R}_\alpha^T(\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j), \dots) \\ &\stackrel{*}{=} L(\bar{\mathbf{r}}, \dot{\bar{\mathbf{r}}}) \Leftrightarrow U(\dots, \underline{R}_\alpha^T(\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j), \dots) \\ &= U(\dots, \bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j, \dots)\end{aligned}$$

(\*) Symmetrie, falls das Potential rotationssymmetrisch ist.

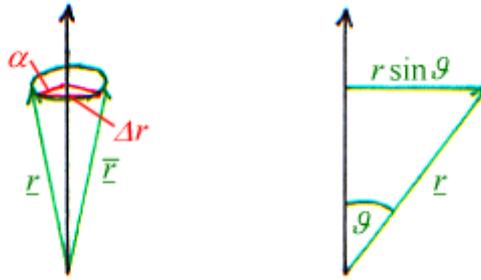
Wenn  $U = U(\dots, |\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j|, \dots)$ , dann ist  $U$  invariant unter beliebiger Rotation und es folgt, dass es Erhaltungsgröße gibt, die Drehimpuls genannt werden. Da jede Drehung in drei Drehungen um drei Achsen zerlegt werden kann, gibt es drei erhaltene Größen  $\rightarrow$  Drehimpuls  $\mathbf{L}$  ist ein Vektor.

$\rightarrow$  Für die Behauptung der Erhaltungsgröße wird

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}_i(\bar{\mathbf{r}}_i, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$$

benötigt weil  $\Delta \mathbf{r} \perp \mathbf{z}$  und  $\mathbf{r}$  für  $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Delta \mathbf{r} &= \alpha \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r} \quad \alpha \rightarrow 0 \\ \rightarrow \mathbf{r}_i &\rightarrow \bar{\mathbf{r}}_i + \alpha \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{r}}_i + \mathcal{O}(\alpha^2)\end{aligned}$$



Erhaltungsgröße  $J$  lautet:

$$J_z = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}_i) = \hat{\mathbf{z}} \cdot \sum_{i=1}^N \underbrace{(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)}_{L_i} = L_z$$

$L_z$  ist die  $z$ -Komponente des Gesamtdrehimpulses  $\mathbf{L}$ , dessen drei Komponenten also bei Isotropie des Raums erhalten sind.

**F) Galilei-Invarianz und Schwerpunktsatz** Wenn ein homogenes System unter einer (speziellen) GALILEI-Transformation  $\bar{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{v}t$  bis auf eine Eichtransformation invariant ist, d.h.

$$\bar{L} = \sum_i \frac{m_i}{2} (\dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{v})^2 - U \left( \underbrace{(\dots, \bar{\mathbf{r}}_i + \mathbf{v}t) - (\bar{\mathbf{r}}_j + \mathbf{v}t), \dots}_{(*)} \right)$$

und das System homogen ist, d.h.  $(*) = U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$  also

$$\begin{aligned}\bar{L} &= \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 - U(\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j) + \sum_i \frac{m_i}{2} (2\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + v^2) \\ &= L(\bar{\mathbf{r}}, \dot{\bar{\mathbf{r}}}) + \frac{d}{dt} \sum_i \frac{m_i}{2} (2\mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{r}}_i + v^2 t)\end{aligned}$$

Weil eine Eichtransformation mit  $G = \sum_i \frac{m_i}{2} (2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + v^2)$  die Bahn nicht ändert, gibt es die 3 Erhaltungsgrößen

$$\mathbf{J} = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{m_i}{2} (2\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_i + v^2 t) \Big|_{\mathbf{v}=0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{v}t) = \underline{\underline{1}}t$$

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{p}_i t - m_i \mathbf{r}_i = -M\mathbf{R}_0 = \text{const.}$$

Zur Berechnung benötigen wir „Matrix“ somit folgt mit dem Gesamtimpuls  $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t)$  gilt

$$M\mathbf{R}(t) = \sum_i m_i \mathbf{r}_i(t) = \mathbf{p}t + M\mathbf{R}_0$$

also bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig gleichförmig (wobei  $M = \sum_i m_i$  Gesamtmasse).  
Bei einer Koordinatentransformation auf das mit  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P}}{M}$  bewegte Bezugssystem (Schwerpunktsystem) wird  $\mathbf{R}$  also Erhaltungsgröße.

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0$$

und bewegt sich nicht.

## 3.5 Hamilton'sche Mechanik II

### 3.5.0 Motivation

Weg von NEWTON zu HAMILTON!

	NEWTON	EULER-LAGRANGE-Gleichung	HAMILTON'sche-Gleichung
	$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$	$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$	$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} ; \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$
Forminvarianz: unter Transformationen	Galilei-Transformation (sonst + Scheinkräfte)	KT $\bar{\mathbf{q}}' = \mathbf{f}(\mathbf{q}, t)$ Kovarianz unter Koordinatentransformation	kanonische Trafo. $\mathbf{q} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ hier Orte und Impulse gleich behandelt

### 3.5.1 Phasenraum

Der Phasenraum ist eine 2f-dimensionale Mannigfaltigkeit, gebildet mit den kanonischen Koordinaten  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\text{Position}, \text{Impuls})$ . *Erinnerung:*  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$

Die mechanische Bewegung entspricht einer Bahn im Phasenraum  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  festgelegt durch die HAMILTON'schen Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} ; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad 1 \leq i \leq f$$

und Anfangsbedingungen:  $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0 ; \mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0$  mit  $t = t_0 = 0$

**Sätze über Differentialgleichungen:** Zu jedem Startpunkt  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$  gehört genau eine Bahn, die keine Andere schneidet.

**Bsp.:** Pendel im Schwerfeld

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega_0^2 (1 - \cos q) = T + U$$

Autonomes Problem  $\Rightarrow H = \mathbf{E} = \text{const.}$

Die Abbildung  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  die jeden Anfangspunkt  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$  des Phasenraums zu einem  $t \neq t_0$  den Punkt  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  zuordnet, heißt *Phasenraumfluss*.

### 3.5.2 Satz von Liouville

Der Phasenraumfluss erhält das Volumen, d.h. füllen die Startwerte für viele Bahnkurven den Bereich  $D(t_0)$  des Phasenraums mit dem Volumen  $V_0$  aus, dann füllen die  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  Punkte der Lösungen der HAMILTON-Gleichungen zu den (vielen) Startpunkten einen anderen Bereich  $D(t)$  aus, der aber das selbe Volumen  $V(t) = V_0$  einnimmt

#### Bemerkung:

Dies ist die Grundlage der statistischen Mechanik ( $f \approx 10^{23}$ ).

#### Beweis:<sup>4</sup>

$$V_0 = \int_{D(t_0)} \prod_{i=1}^f dq_i^0 dp_i^0$$

Volumen für  $t > t_0$

$$V(t) = \int_{D(t)} \prod_{i=1}^f dq_i(t) dp_i(t)$$

mit Abkürzungen

$$\mathbf{X} = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \quad 2f\text{-dimensionaler Vektor}$$

$$\mathbf{X}^0 = (\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0) \quad 2f\text{-dimensionaler Vektor}$$

$$V(t) = \int_{D(t)} \prod_i dX_i \stackrel{(*)}{=} \int_{D(t_0)} \prod_i dX_i^0 \underbrace{\det \left\{ \frac{\partial X}{\partial X_j^0} \right\}}_{(**)}$$

(\*): Transformation der Integrationsvariablen

(\*\*): Funktionaldeterminante  $J$  der Transformation; die Behauptung lautet also  $J = 1$

Weil  $J(t)$  erfüllt (o.B.d.A.  $t_0 = 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(t) &= \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial X_i(t)}{\partial X_j(t_0=0)} \right| = \frac{d}{ds} \left| \frac{\partial X_i(t+s)}{\partial X_j(t=0)} \right|_{s=0} \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{d}{ds} \left| \frac{\partial X_i(t+s)}{\partial X_k(t)} \frac{\partial X_k(t)}{\partial X_j(0)} \right|_{s=0} \\ &\stackrel{\text{Det-Prod-Reg}}{=} \frac{d}{ds} J(s) \Big|_{s=0} = J(t) \end{aligned}$$

genügt es im Folgenden  $\frac{d}{dt} J(t) \Big|_{t=t_0=0}$  zu betrachten.

Dazu muss die Funktionaldeterminante:

$$\det \left\{ \frac{\partial X_i}{\partial X_j^0} \right\} \Big|_{t=t_0+\delta t} = ?$$

betrachtet werden. Mit einer Taylorentwicklung:

$$X_i(t) = X_i^0 + \underbrace{F_i}_{(*)} \underbrace{\delta t}_{(**)} + \mathcal{O}(\delta^2)$$

(\*): Abkürzung      (\*\*):  $\delta t = t - t_0$

$$\text{mit } F_i = \dot{X}_i \Big|_{t=t_0} = \begin{cases} \dot{q}_i(t_0) \\ \dot{p}_i(t_0) \end{cases}$$

erhält man:

$$\Rightarrow \text{Funktionalmatrix } \frac{\partial X_i}{\partial X_j^0} = \delta_{ij} + \frac{\partial F_i}{\partial X_j^0} \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

<sup>4</sup>der Beweis wurde in der Vorlesung nicht besprochen!

Damit folgt für die Determinante (nach Sätzen aus der linearen Algebra):

$$\begin{aligned} \det \left\{ \frac{\partial X_i}{\partial X_j^0} \right\} &= \det \left\{ \delta_{ij} + \frac{\partial F_i}{\partial X_j^0} \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) \right\} = 1 + \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i}{\partial X_i^0} \delta t + \delta(\delta t^2) \\ &= 1 + \text{Spur} \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial X_j^0} \right\} \delta t + \mathcal{O}(t^2) \end{aligned}$$

(Nebenbemerkung: Beweis der letzten Gleichung siehe Entwicklungssatz der Determinante)

$$\text{Spur} \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial X_j^0} \right\} = \underbrace{\sum_{i=1}^f \frac{\partial \dot{q}_i(t_0)}{\partial q_i^0} + \frac{\partial \dot{p}_i(t_0)}{\partial p_i^0}}_{\text{Divergenz des Phasenraumflusses}} = (*)$$

und mit den HAMILTON-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i(t_0) &= \left. \frac{\partial H}{\partial p_i} \right|_{t_0} \\ \dot{p}_i(t_0) &= - \left. \frac{\partial H}{\partial q_i} \right|_{t_0} \end{aligned}$$

$$(*) = \underbrace{\sum_{i=1}^f \frac{\partial}{\partial q_i^0} \frac{\partial H}{\partial p_i^0} - \frac{\partial}{\partial p_i^0} \frac{\partial H}{\partial q_i^0}}_{\text{Divergenz des Phasenraumflusses}} = 0$$

also folgt  $\frac{d}{dt} J(t) = 0 \cdot J(t)$  und weil  $J(0) = 1$ , also  $J(t) \equiv 1$

$$\Rightarrow V(t) = \int_{D(t_0)} \prod_i dX_i^0 = V(0)$$

□

**Bemerkung:** Der Phasenfluss ist divergenzfrei! (Vergleichbar mit inkompressiblen Flüssigkeiten aus der Hydrodynamik)

### 3.5.3 Poisson-Klammern

( $\Rightarrow$  Kommutator in der Quantenmechanik)

**A) Definition:** Für zwei beliebige Funktionen / Variablen im Phasenraum  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  und  $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  ist die POISSON-Klammer definiert durch:

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

Sie ist selber eine Funktion von  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ .

<b>B) Fundamentale Eigenschaften</b>	Antisymmetrie	$\{F, G\} = -\{G, F\}$
	$\Rightarrow$	$\{F, F\} = 0$
	Linearität mit $c_1, c_2 = \text{const.}$ :	$\{c_1 F_1 + c_2 F_2, G\} = c_1 \{F_1, G\} + c_2 \{F_2, G\}$
	Nullelement	$\{F, \text{const.}\} = 0$
	Produktregel	$\{F, G_1 G_2\} = \{F, G_1\} G_2 + G_1 \{F, G_2\}$
	JAKOBIidentität	$\{F, \{G_1, G_2\}\} + \{G_1, \{G_2, F\}\} + \{G_2, \{F, G\}\} = 0$

**C) Fundermentale Beispiele:**

1.  $\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}$  ;  $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
2.  $\{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$  ;  $\{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

**D) Hamilton'sche Bewegungsgleichungen Satz:**

Die totale Zeitableitung einer im Phasenraum definierten Funktion  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  entlang der durch die Bewegung des Systems gegebene Bahn (d.h.  $\mathbf{q}(t)$  und  $\mathbf{p}(t)$  aus HAMILTON-Gleichung) lautet:

$$\frac{d}{dt} F(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \left\{ F, \underbrace{H}_{\text{H-Fkt.}} \right\}$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left[ \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] \\ &\stackrel{\text{H-Gl.}}{=} \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ &= \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned}$$

**Fundamentales Bsp.:**

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \hat{=} \text{Hamilton-Gleichungen}$$

weil  $\frac{\partial}{\partial t} q_i = \frac{\partial}{\partial t} p_i = 0$

**E) Erhaltungsgröße Satz:**

Eine Funktion  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , die also nicht explizit von der Zeit abhängt, ist eine Erhaltungsgröße genau dann, wenn ihre POISSONKlammer mit der HAMILTON-Funktion verschwindet:

$$\boxed{\{F, H\} = 0}$$

**Beweis:**

$$\frac{d}{dt} F = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{F(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \text{konst.}}$$

**F) Koordinatenunabhängigkeit Satz:**

Die POISSONklammern sind unabhängig von der Wahl der sog. „kanonischen Koordinaten“, d.h. man kann sie mit einem beliebigen Set von Koordinaten formulieren, die über sog. *kanonischen Transformationen* miteinander verknüpft sind.

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \{F, g\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} &= \sum_{i=1}^f \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \\ &= \sum_{i=1}^f \frac{\partial F}{\partial Q_i} \frac{\partial G}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial G}{\partial Q_i} = \{F, g\}_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}} = K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \end{aligned}$$

Anwendung:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2m} (q_1^2 + q_2^2) + U(q_1 - q_2) \\
 \text{Impuls: } p &= p_1 + p_2 \\
 \{P, H\} &= \{p_1, H\} + \{p_2, H\} = \{p_1, U\} + \{p_2, U\} \\
 &= \sum_{i=1}^2 \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_i}}_{=0} \frac{\partial U}{\partial p_i} - \frac{\partial p_i}{\partial p_i} \frac{\partial U}{\partial q_i} \\
 \left(-\frac{\partial U}{\partial q_2}\right) &= -\frac{\partial U}{\partial q_2} - \frac{\partial U}{\partial q_2} \\
 U = U(q_1 - q_2) \quad \Rightarrow \quad &= -\frac{\partial U}{\partial q_1} - \left(-\frac{\partial U}{\partial q_1}\right) = 0
 \end{aligned}$$

⇒ Erhaltungsgröße!

**Bemerkungen:**

- Eine Größe  $F$  ist also eine Erhaltungsgröße, wenn ihr Kommutator (ihre POISSONKlammer) mit der HAMILTON-Funktion  $H$  verschwindet.

- 

$$\{H, H\} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = E = \text{const.} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Die Bedingung, dass die Gesamtenergie  $E$  konstant ist, ist gleichbedeutend, damit, dass die Hamiltonfunktion nicht explizit von der Zeit abhängt.

- Wir können folgern, dass der Gesamtimpuls  $\mathbf{P}$  eines  $N$ -Teilchensystems erhalten bleibt, wenn:

$$\{\mathbf{p}, H\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \text{const.}$$

### 3.5.4 Symmetrietransformation

**A) Definition der Erzeugenden einer Symmetrietransformation** Sei eine kontinuierliche Abbildung des Phasenraums in sich gegeben durch eine kanonische Transformation:  $\mathbf{q}^\alpha = \mathbf{q}^\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  und  $\mathbf{p}^\alpha = \mathbf{p}^\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  (mit differenzierbarer, invertierbarer Abbildung, die abhängig vom Parameter  $\alpha$  ist,  $\mathbf{q}^{\alpha=0}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}^{\alpha=0}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}$ ) Dann heißt  $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  die **Erzeugende** der Abbildung, wenn eine beliebige Variable  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  sich unter der Abbildung so transformiert, dass gilt:

$$\left. \frac{d}{d\alpha} F(\mathbf{q}^\alpha, \mathbf{p}^\alpha) \right|_{\substack{\alpha=0 \\ \mathbf{q}, \mathbf{p} \text{ fest}}} = \{F, G\}$$

In der POISSON-Klammer rechts tauchen nur die Variablen  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  auf.

**Bemerkung:**

Wie beim NOETHER-Theorem wird nur die Ableitung bei  $\alpha = 0$  benötigt.

### B) Verallgemeinertes Noether-Theorem Satz:

Wird die kontinuierliche Abbildung („Verschiebung“;  $\mathbf{q}^\alpha = \mathbf{q}^\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ,  $\vec{P}^\alpha = \vec{P}^\alpha(\mathbf{q}, \vec{p})$ ) durch eine kanonische Transformation gegeben und ist die HAMILTONfunktion invariant, d.h.  $H(\mathbf{q}^\alpha, \mathbf{p}^\alpha) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , dann ist die dazu gehörende Erzeugende eine Erhaltungsgröße. Umgekehrt ist jede Erhaltungsgröße eine Erzeugende einer Symmetrietransformation.

In dieser Umkehrung liegt die Verallgemeinerung zum bisher bekannten NOETHER-Theorem, diesen Schluss kann man nicht aus dem bekannten erhalten.

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow 0 \stackrel{*}{=} \frac{d}{d\alpha} H(\mathbf{q}^\alpha, \mathbf{p}^\alpha) \Big|_{\alpha=0} = \{H(\mathbf{q}, \mathbf{p}), G(\mathbf{q}, \mathbf{p})\} \\
 \Leftrightarrow \quad G(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \text{const.}
 \end{aligned}$$

Dabei wurde bei \* die Invarianz von  $H$  wie oben beschrieben verwendet.

Im nächsten Abschnitt ist nur noch die Aussage, dass die Verschiebung eine kanonische Transformation sein muss, zu diskutieren.

### 3.5.5 Kanonische Transformation

Für das NOETHER-Theorem war eine beliebige Koordinatentransformation  $\mathbf{q}^\alpha = \mathbf{q}^\alpha(\mathbf{q}, t)$  möglich, unter der Bedingung, dass die Transformation kompatibel ist (Bedingung aus der Mathematik). Für die Formulierung im Phasenraum sind allgemeinere Transformationen:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^\alpha &= \mathbf{q}^\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \mathbf{p}^\alpha &= \mathbf{p}^\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p})\end{aligned}$$

möglich, nur müssen diese gewisse Bedingungen erfüllen. Man hat nun mehr Freiheit, als beim LAGRANGE-Formalismus, weil man die Koordinaten  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$  bei der Transformation miteinander verknüpfen kann. (auch die Zeit  $t$  kann in den Transformationen explizit auftreten: das wird hier aber nicht betrachtet)

#### Definition:

Eine zeitunabhängige Transformation im Phasenraum:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{q}, \mathbf{p} \\ \mathbf{q}, \mathbf{p} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{array} \right.$$

ist *kanonisch*, genau dann wenn die fundamentalen POISSON-Klammern invariant sind, d.h.:

$$\begin{aligned}\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} &= 0 \quad \& \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \\ \Leftrightarrow \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} &= 0 \quad \& \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}\end{aligned}$$

#### Satz:

Kanonische Transformationen erhalten die POISSON-Klammern.

#### Beweis:

$$\begin{aligned}\{F(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), G(\mathbf{Q}, \mathbf{P})\} &= \sum \frac{\partial F}{\partial Q_i} \frac{\partial G}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial G}{\partial Q_i} \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{ij} \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \right) \frac{\partial G}{\partial P_i} - \dots \\ &= \sum \frac{\partial F}{\partial q_j} \left( \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \frac{\partial G}{\partial P_i} - \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \frac{\partial G}{\partial Q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial P_j} (\dots) \\ \Rightarrow \{F(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), G(\mathbf{Q}, \mathbf{P})\} &= \sum_j \frac{\partial F}{\partial q_j} \{q_j(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), G(\mathbf{Q}, \mathbf{P})\} + \frac{\partial F}{\partial p_j} \{p_j(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), G(\mathbf{Q}, \mathbf{P})\}\end{aligned}$$

Verwendet man nun die letzte Gleichung für  $G(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = q_e(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  oder  $G = p_e(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  dann werden die POISSON-Klammern zu den Fundamentalen POISSON-Klammern, wenn diese schon bekannt sind ( $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ ), dann folgt:

$$\{G(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), q_e(\mathbf{Q}, \mathbf{P})\} = - \frac{\partial G}{\partial p_e}$$

Einsetzen liefert dann mit der Ersetzung  $F \rightarrow G$ :

$$\{F, G\} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j}$$

Damit ist also:

$$\{F(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), G(\mathbf{Q}, \mathbf{P})\} = \{F(\mathbf{q}, \mathbf{p}), G(\mathbf{q}, \mathbf{p})\}$$

#### Bemerkung:

- kanonische Transformationen lassen die HAMILTON'schen Bewegungsgleichungen invariant. (Anwendung des Satzes)

- Der Phasenfluss  $(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{p}(t_0)) \rightarrow (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  ist für jedes  $t$  eine kanonische Transformation (ohne Beweis).

**Satz:**

Die Transformation gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \mathbf{q} + \alpha \frac{\partial G(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ \mathbf{p}^\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \mathbf{p} - \alpha \frac{\partial G(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}} + \mathcal{O}(\alpha^2)\end{aligned}$$

ist kanonisch (linear in  $\alpha$ ) ( $G$  wird *Erzeugende* genannt)

**Beweis:**

$$\begin{aligned}\{q_i^\alpha, p_j^\alpha\} &= \{q_i, p_j\} + \alpha \left[ \left\{ \frac{\partial G}{\partial p_i}, p_j \right\} - \left\{ q_i, \frac{\partial G}{\partial q_j} \right\} \right] + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \delta_{ij} + \alpha \sum_l \frac{\partial^2 G}{\partial p_i \partial q_l} \delta_{jl} - \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial p_l} \delta_{il} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \delta_{ij} + \mathcal{O}(\alpha^2)\end{aligned}$$

damit folgt für eine beliebige Funktion  $F$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha} F(\mathbf{q}^\alpha, \mathbf{p}^\alpha) \Big|_{\alpha=0} &= \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i^\alpha} \frac{dq_i^\alpha}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial p_i^\alpha} \frac{dp_i^\alpha}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \\ \Rightarrow \frac{d}{d\alpha} F(\mathbf{q}^\alpha, \mathbf{p}^\alpha) \Big|_{\alpha=0} &= \{F, G\}\end{aligned}$$

Aus diesem Grund, wird  $G$  als *Erzeugende* der Transformation bezeichnet.

Dies haben wir für die HAMILTON-Funktion schon angewendet, mit dieser Erzeugenden  $G$  können wir also  $\frac{d}{d\alpha} H \Big|_{\alpha=0}$  berechnen.

### 3.6 Näherungsverfahren und Störungstheorie

**Liste von exakt lösbaren Problemen der Physik:**

- freies Teilchen (klassisch, Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie)
- harmonischer Oszillator
- $\frac{1}{r}$ -Potential (KEPLER, H-Atom, SCHRÖDINGER)
- 2-Niveau System (PAULI, DIRAC)
- zweidimensionaler Ising Magnet (ONSAGER)

Da diese List der idealen Probleme, welche mit Physik eindeutig gelöst werden können sehr beschränkt ist, soll hier der Versuch behandelt werden, reale Probleme durch Störungsverfahren mit solchen ideale Probleme zu nähern (zu lösen).

#### 3.6.1 Asymptotische Entwicklungen und O- Symbol

- TAYLOR-Entwicklung

$$f(x) = f(0) - x f'(0) - \frac{1}{2} x^2 f''(0) + \dots \quad \text{nur für } x \ll 1 \text{ gültig}$$

- Asymptotische Näherung

$$F(x, \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^M c_n(x) \varepsilon^n$$

$$\varepsilon = 0 \quad f(x, \varepsilon) \sim c_n(x)$$

hierbei ist die Koonvergenz nicht interessant

### 3.6.2 Multiskalenverfahren

ungedämpfter, anharmonischer Oszillator folgt die Differentialgleichung:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 (x + Ax^2 + Bx^3) = 0$$

Anfangsbedingungen sind  $x(t=0) = t$  und  $\dot{x}(t=0) = 0$  und  $O(x^4)$  wird vernachlässigt.

Reskalieren:

$$y(t) := \frac{x(t)}{\varepsilon} \quad \dot{y}(t) + \omega_0^2 (y + \varepsilon Ay^2 + \varepsilon By^3) = 0$$

mit  $y(0) = 1$  und  $\dot{y} = 0$ . Dieses Problem ist nicht eindeutig lösbar!

In dem Fall  $\varepsilon = 0$  liegt ein harmonischer Oszillator vor mit

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$y(t) = R \cos(\omega_0 t + \theta)$$

natürliche Skala  $\tau_0 = \omega_0 t$

$$V = \omega_0^2 \left( \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} Ax^3 + \frac{1}{4} Bx^4 \right)$$

Energieerhaltung:

$$H = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E$$

$$\Rightarrow V(x) \leq E$$

#### Gestörtes Problem

Ansatz der regulären Störungsentwicklung:

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots$$

Verwende:  $\tau_0 = \omega_0 t$

$$\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau_0} \quad \frac{d^2}{dt^2} = \omega_0^2 \frac{d^2}{d\tau_0^2} := d_\tau^2$$

$$\frac{d^2}{d\tau_0^2} y - y + \varepsilon Ay^2 + \varepsilon By^3 = 0$$

Die Störungsentwicklung eingesetzt ergibt:

$$(d_\tau^2 y_0 + y_0) \varepsilon^0 + (d_\tau^2 y_1 + Ay_0^2 + y_1) \varepsilon^1 + (d_\tau^2 y_2 + By_0^3 + 2Ay_0 y_1 + y_2) \varepsilon^2 + \dots = 0$$

$$\varepsilon^0 : \quad d_\tau^2 y_0 + y_0 = 0$$

$$y_0 = R \cos(\tau_0 + \theta)$$

$$\varepsilon^1 : \quad d_\tau^2 y_1 + y_1 = -Ay_0^2 = -AR^2 \cos^2(\tau_0 + \theta) = -\frac{1}{2} AR^2 (1 + \cos(2(\tau_0 + \theta)))$$

Lösung:

$$y = -\frac{1}{2} AR^2 + \frac{1}{6} AR^2 \cos(2(\tau_0 + \theta))$$

$$\varepsilon^2 : \quad d_\tau^2 y_2 + y_2 = -By_0^3 - 2Ay_0 y_1 = \left( -\frac{3}{4} BR^2 + \frac{5}{6} A^2 R^2 \right) \cos(\tau_0 + \theta) = c \cos(\tau_0 + \theta) + \text{andere Terme}$$

$$y_2(\tau_0) = c \tau_0 \sin(\tau_0 + \theta) + \text{nicht anwachsender Term}$$

reguläre Störungstheorie:

$$\begin{aligned} \overline{y}(t) &= \frac{x(t)}{\varepsilon} & y(t) &= y_0 + y_1\varepsilon + y_2\varepsilon^2 + \dots \\ x(t) &= \varepsilon x_0(t) + \varepsilon^2 x_1(t) + \varepsilon^3 t\omega_0 \cos(\tau_0 + \varepsilon) \end{aligned}$$

**Multiskalenverfahren**

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \omega_0 t & \tau_2 &= \varepsilon^2 t\omega_0 \\ y(t) &= R(\tau_2) \cos(\tau_0 + \theta(\tau_2)) \\ \frac{d}{dt} x(t) &= \frac{d}{dt} x(\tau_0, \tau_2) = \omega_0 \left( \frac{\partial x}{\partial \tau_0} + \varepsilon^2 \frac{\partial x}{\partial \tau_2} \right) \end{aligned}$$

mit  $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial \tau_0}$ :

$$\begin{aligned} & \ddot{y} + y + \varepsilon A y^2 + \varepsilon^2 B y^3 = 0 \\ \Rightarrow \quad \varepsilon^0 (\partial_0^2 y_0 + y_0) + \varepsilon^1 (\partial_0^2 y_1 + A y_0^2 + y_1) + \varepsilon^2 ((2\partial_0 \partial_2) y_0 + \partial_0 r y_0 + B y_0^3 + 2A y_0 y_1 + y_2) + \dots = 0 \end{aligned}$$

$$\varepsilon^0 : y_0 = R(\tau_2) \cos(\tau_0 + \theta)$$

$$\varepsilon^1 : y_1 = -\frac{A}{2} R(\tau_2) + \frac{1}{6} A R(\tau_2) \cos(2(\tau_0 + \theta(\tau_2)))$$

$$\varepsilon^2 : \partial_0^2 y_2 + y_2 = \cos(\tau_0 + \theta) \left[ \frac{3}{4} B R^2 + \frac{5}{6} A^2 R^2 - 2R \partial_2 \theta(\tau_2) \right] + \sin(\tau_0 + \theta) [2\partial_2 R] + \text{nicht interessante Terme}$$

nach POINCARÉ:

$$\begin{aligned} \partial_2 R &= 0 & \partial_2 \theta &= -\frac{1}{2R} C \stackrel{R=1}{=} \frac{3}{8} B - \frac{5}{12} A^2 \\ \Rightarrow \quad R(\tau_2) &= 1 - \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \Rightarrow \quad O(\tau_2) &= \left( \frac{3}{8} B - \frac{5}{12} A^2 \right) \tau_2 = \left( \frac{3}{8} B - \frac{5}{12} A^2 \right) \varepsilon^2 \omega_0 t \end{aligned}$$

$$x(t) = \varepsilon \cos(\omega t) + \varepsilon^2 A \left( \frac{1}{6} \cos(2\omega t) - \frac{1}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \dots$$

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{3}{8} B - \frac{5}{12} A^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)$$

### 3.6.3 Fast kreisförmige Bahn in Zentralpotential

Beim KEPLER-Problem lässt sich  $r(t)$  und  $\phi(t)$  nicht so einfach berechnen, wie die  $r(\phi)$ . Wir haben eine Potentialfunktion  $U(r)$

LAGRANGE:  $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - U(r)$

nach (3.2.2) folgt:

$$\begin{aligned} m \ddot{r} &= -\frac{\partial}{\partial r} U^{\text{eff.}}(r) \\ U^{\text{eff.}}(r) &= U(r) + \frac{L^2}{2mr} \\ U^{\text{eff.}}(t) &= U^{\text{eff.}}(\varrho) + \frac{\partial U^{\text{eff.}}}{\partial r} \varrho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U^{\text{eff.}}}{\partial r^2} \varrho^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U^{\text{eff.}}}{\partial r^3} \varrho^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 U^{\text{eff.}}}{\partial r^4} \varrho^4 \end{aligned}$$

mit  $\varrho(t) = r(t) - \varrho$

$$\begin{aligned} \varrho &\Rightarrow \frac{\partial U^{\text{eff.}}}{\partial r} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{L^2}{r^2} = \frac{\partial U}{\partial r} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{m} \frac{\partial^2 U^{\text{eff.}}}{\partial r^2}} \end{aligned}$$

$$\ddot{\varrho}(t) + \omega_0^2(\varrho + A\varrho^2 + B\varrho^3 + \dots) = 0$$

mit

$$A = \frac{1}{2} \frac{U'''^{\text{eff.}}}{U''^{\text{eff.}}} \quad B = \frac{1}{6} \frac{U''''^{\text{eff.}}}{U''^{\text{eff.}}}$$

Näherung für kleine maimlae Auslenkung

$$\varepsilon = -ep \quad \text{mit} \quad 0 < e \ll 1$$

Dabei ist  $e$  die Exzentrizität.

Lösung:

$$r(t) = p \left[ 1 - e \cos(\omega t) + pAe^2 \left( \frac{1}{6} \cos(2\omega t) - \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right]$$

mit  $\omega = \omega_0 \left[ 1 + e^2 p^2 \left( \frac{3}{8} B - \frac{5}{12} A^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right]$

$\phi(t)$  durch Umformungen mit KEPLER-Gesetz.  
für die Erde ist  $e = 0,0167$ .

### 3.6.4 Reguläre Störungstheorie

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + Ax^2 + Bx^3) = 0 \quad x(t=0) = \varepsilon$$

Multiskalenverfahren:

$$x(t) = \varepsilon \cos(\omega t) + \varepsilon^2 A \left( \frac{1}{6} \cos \left( 2\omega t - \frac{1}{2} \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{3}{8} B - \frac{5}{12} A^2 \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

KEPLER-Problem:

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r} U^{\text{eff.}}(r) \quad U^{\text{eff.}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

für eine fast kreisförmige Bahn  $r(t) \approx p$

$$r(t) - p = \varrho(t) \quad U^{\text{eff.}}(r) = U^{\text{eff.}}(p) + \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_p \varrho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U^{\text{eff.}}}{\partial r^2} \Big|_p \varrho^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U^{\text{eff.}}}{\partial r^3} \Big|_p \varrho^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 U^{\text{eff.}}}{\partial r^4} \Big|_p \varrho^4$$

$$\ddot{\varrho}(t) = \omega_0^2(\varrho + A\varrho^2 + B\varrho^3) = 0 \quad A = \frac{U'''^{\text{eff.}}}{U''^{\text{eff.}}} \quad B = \frac{1}{6} \frac{U''''^{\text{eff.}}}{U''^{\text{eff.}}}$$

$$r(t) = p \left[ 1 - e \cos(\omega t) + pAe^2 \left( \frac{1}{6} \cos(2\omega t) - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$\omega = \omega_0 \left[ 1 + e^2 p^2 \left( \frac{3}{8} B - \frac{5}{12} A^2 \right) \right]$$

$$r_+ - r_- = r \left( t = \frac{\pi}{\omega} \right) - r(t=0) = 2ep$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{mp^2} \left[ 1 + e^2 \left( \frac{3}{2} + Ap \right) + 2e \cos(\omega t) + e^2 \left( \frac{3}{2} - Ap \right) \cos(\omega t) \right]$$

$$\Omega = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \dot{\phi}(t) = \underbrace{\Omega_0}_{=\frac{L}{mp^2}} \left( 1 + e^2 \left( \frac{3}{2} + Ap \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right)$$

$$\phi(t) = \Omega \left( t + \frac{2e}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{e^2}{2\omega} \left( \frac{3}{2} - Ap \right) \sin(2\omega t) + \mathcal{O}(\omega^3) \right)$$

KEPLER:

$$\begin{aligned}
 U(r) &= -\frac{\gamma m M}{r} \quad \frac{L^2}{mp^3} = \frac{\gamma m M}{p^2} \Rightarrow p = \frac{L^2}{\gamma m^2 M} \\
 \omega_0 &= \frac{L}{mp^2} \quad \Omega_0 = \frac{L}{mp^2} \quad A = -\frac{3}{p} \quad B = \frac{b}{p^2} \\
 \omega &= \omega_0 \left( 1 - \frac{3}{2} e^2 + \mathcal{O}(e^3) \right) \quad \Omega = \omega \\
 \phi(t) &= \omega t + 2e \sin(\omega t) + \frac{5e^2}{4} \sin(2\omega t) + \mathcal{O}(e^3)
 \end{aligned}$$

Periheldrehung des Merkur:

$$\begin{aligned}
 U^{\text{eff.}} &= U^{\text{eff.}} + \delta r \\
 U(r) &= -\frac{\gamma m M}{r} - \frac{\gamma m_J m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{P_J^2 + r^2 - 2rP_J \cos \vartheta}} \\
 \text{für } r \ll P_J : &\approx -\frac{\gamma m M}{r} - \frac{\gamma m_J m}{P_J} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{r}{P_J} \right)^2 + \mathcal{O} \left( \frac{r}{P_J} \right)^4 \right)
 \end{aligned}$$

$$\Delta\phi_{\text{Merkur}} \approx 2 \cdot 10^{-6} / \text{Jahrhundert}$$

$$\text{EINSTEIN: } \Delta\phi_{\text{Merkur}} \approx 5 \cdot 10^{-7} / \text{Jahrhundert}$$

Dabei ist erstaunlich, dass der Wert von EINSTEIN besser ist!

## 4 Thermische Physik

### 4.1 Einleitung

Mechanik: eine Bewegungsgleichung pro Freiheitsgrad eines Systems; lösen  $\Rightarrow$  Verhalten des Systems  
makroskopische Körper: aufgebaut aus  $\sim 10^{23}$  Kerne und zugehörige Elektronen  
 $\Rightarrow$  Versuch, möglichst viele mikroskopische Eigenschwingungen durch makroskopische, gemittelte Größen auszudrücken:

- Druck  $P$
- Dichte  $\rho$
- Temperatur  $T$
- spezifische Wärme
- Ausdehnungskoeffizient
- Wärmeleitfähigkeit

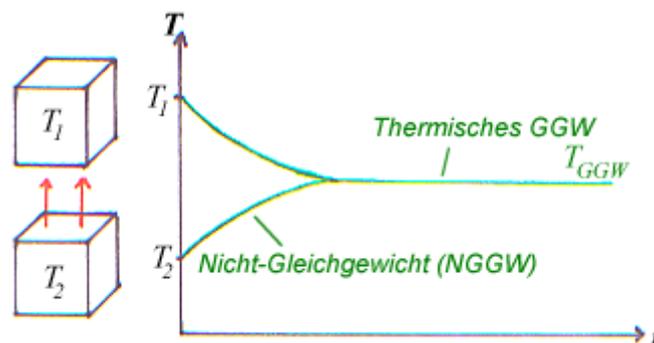
**allgemein:** nur Mittelwerte (räumlich und zeitlich gesehen)

- Messungen mit einer hohen Auflösung  $\rightarrow$  Fluktuationen
- interessant z.B.:
  - (Wahrscheinlichkeits-) Verteilungsfunktionen (*mikroskopisch*)
  - Aggregatzustand als Folge *makroskopischer* Größen, z.B. Temperatur, Druck oder Dichte
- Weitere Größen, weniger aus dem Alltag bekannt:
  - Entropie
  - freie Energie
  - Enthalpie
  - Chemisches Potential
- statistische Physik: Erklärung thermodynamischer Beziehungen aus makroskopischen Modellen
- *Thermodynamik*: axiomatisch postuliert 4 Hauptsätze.

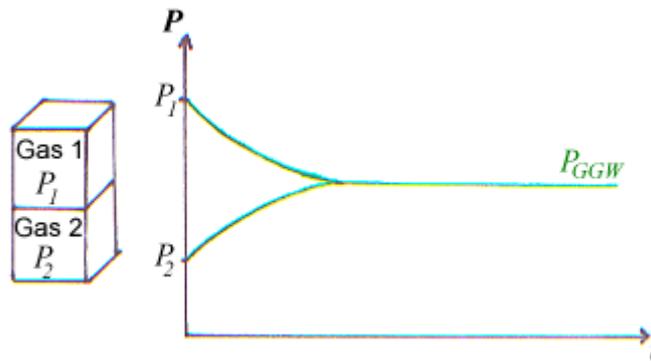
### 0. Hauptsatz der Thermodynamik:

Befinden sich zwei Körper im thermischen Gleichgewicht mit einem dritten, so stehen sie auch untereinander im thermischen Gleichgewicht.

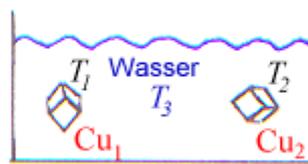
Beispiel 1: zwei Kupfer-Blöcke:



Beispiel 2: Verbindung zweier Gasvolumina



Beispiel 3: zwei Kupfer-Blöcke in Wasser



Aussage: Wenn sowohl der erste, als auch der zweite Kupferblock im thermischen Gleichgewicht mit dem Wasser steht, dann stehen auch die beiden Kupferblöcke untereinander im thermischen Gleichgewicht.

## 4.2 Die Temperatur

- Messgeräte: diverse Thermometer
- Vorschlag: PARACELSIUS (1742)
  - Glasrohr mit Quecksilber (Hg)  
Der Trick dabei ist die Volumensänderung einer Flüssigkeit sichtbar zu machen. Dazu lässt man die Flüssigkeit in einer kleinen Kapillaren, die an das feste Volumen angeschlossen ist, sich ausdehnen.
  - Annahme: Wärmeausdehnung des Quecksilbers ist linear mit Temperatur  $T$

$$L(T) = L(0) \cdot (1 + \alpha T) \quad (4.1)$$

- $T = 0^\circ\text{C}$ : *Tripelpunkt von Wasser* (Koexistenz von Eis, Wasser und Wasserdampf)
- $T = 100^\circ\text{C}$ : *Siedepunkt* des Wassers unter Normaldruck ( $P = 1013,251\text{hPa}$ )
- Achtung: Abweichungen durch nichtlineare Terme z.B. bis etwa  $1^\circ\text{C}$  bei  $50^\circ\text{C}$

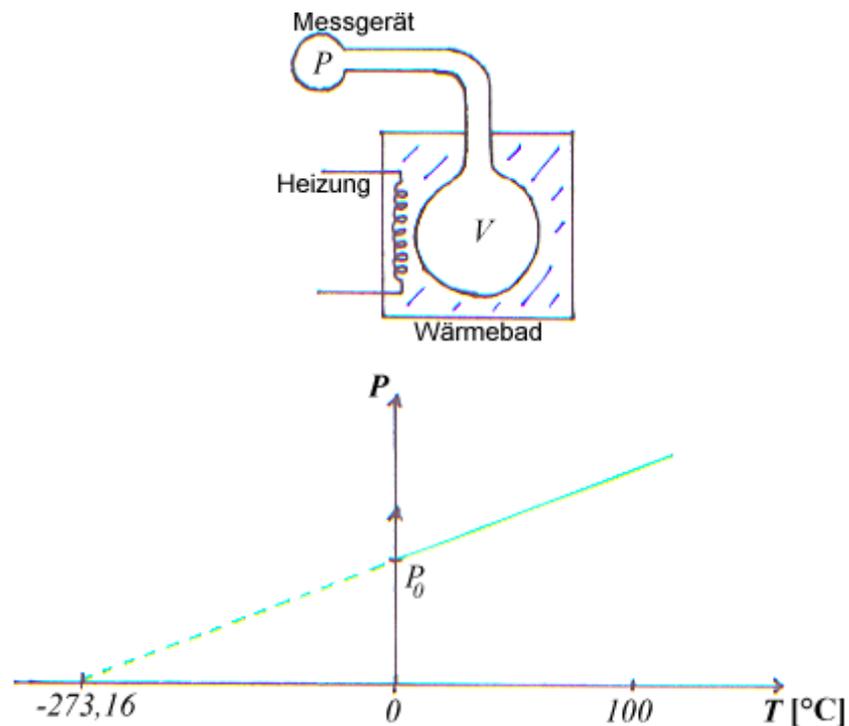
### 4.2.1 Das Gay-Lussac-Thermometer

- bessere Linearität über weiten Bereich, von  $T$ : Gase, insbesondere Edelgase und für einen besonders weiten Bereich Helium
- bei konstantem Volumen  $V$   
Gasdruck  $P$  linear zur Temperatur

$$P(t) = P_0(1 + \gamma \cdot T) \quad (4.2)$$

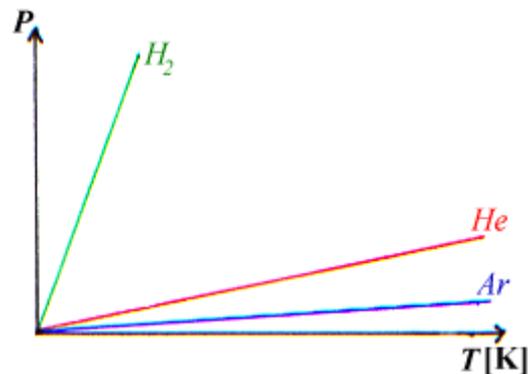
mit

$$\gamma = \frac{1}{273,16^\circ\text{C}}$$



⇒ KELVIN-Skala:

$$T[\text{K}] = 273,16\text{K} + T_C[^\circ\text{C}] \quad (4.3)$$



experimentelle Beobachtung:  $P(t)$  steigt invers proportional zur molaren Masse  $m$  des Gases, z.B.:

$$\begin{aligned} \text{H}_2: & \quad m \approx 2 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \\ \text{He}: & \quad m \approx 4 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \\ \text{Ar}: & \quad m \approx 40 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \end{aligned}$$

$$\frac{P}{T} \propto \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{P}{T} \propto N \Rightarrow P \propto NT \quad (4.4)$$

mit  $N$ : Anzahl der Gasatome bzw. Gasmoleküle

## 4.3 Das ideale Gas

### 4.3.1 Ideales-Gas-Gesetz

experimentell bei  $T = \text{const.}$ :

$$P \propto \frac{1}{V} \quad \text{bzw.} \quad PV = \text{const.}$$

mit (4.4) führt zum Gesetz des idealen Gases

$$PV = k_B NT \quad (4.5)$$

BOLTZMANN-Konstante:

$$k_B = 1,3806 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$k_B T$ : typische Energieskala für mikroskopische, fluktuierende Systeme.

**molare Schreibweise:**

$$N = N_A n$$

mit  $N_A$  AVOGADRO-Konstante  $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$  und  $n$ : Anzahl der Mole.

$$PV = k_B N_A n T = R n T \quad (4.6)$$

dabei ist  $R = k_B N_A$  die ideale Gaskonstante  $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$   
diese Gleichung gilt nur für ein ideales Gas!

mit molarem Volumen  $\bar{V}$ :

$$P\bar{V} = RT \quad (4.7)$$

bei  $P = 1013,25 \text{ hPa}$  und  $T = 273,16 \text{ K}$  (Normalbedingungen, also mittlerer Druck auf Meereshöhe)

$$\Rightarrow \quad \bar{V} = 22,411$$

Größenordnung der Dichte idealer Gase (Luft etc.) unter Normalbedingungen:  $\approx 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$   
mittlerer Abstand der Gasteilchen  $\approx 2 - 3 \text{ nm}$

- Variablen  $P$ ,  $T$ ,  $\bar{V}$  von Stoffmenge unabhängig  $\rightarrow$  intensive Größen
- $V$ ,  $n \rightarrow$  extensive Größen

**Zustandsdiagramme eines idealen Gases**

**Achtung:** für  $T \rightarrow 0 \xrightarrow{\text{id. Gas}} \bar{V} \rightarrow 0, P \rightarrow 0$

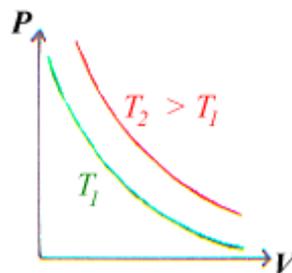


Abbildung 4.1: Isotherme ( $T = \text{const.}$ ); Hyperbeln im  $P - \bar{V}$ -Diagramm

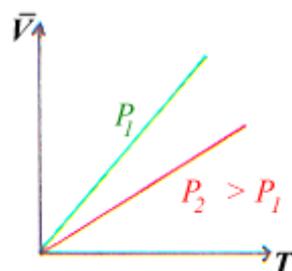


Abbildung 4.2: Isobare ( $P = \text{const.}$ ); Geraden im  $\bar{V} - T$ -Diagramm

aber:

- endliches Eigenvolumen der Gasteilchen  $\Rightarrow \bar{V} \neq 0$

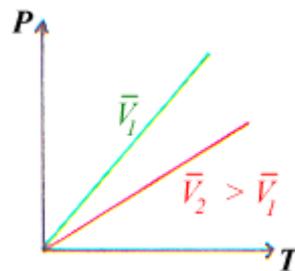
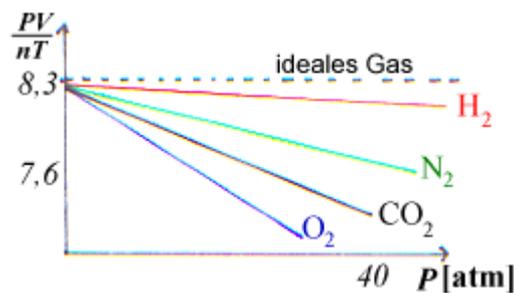


Abbildung 4.3: Isochore ( $V = \text{const.}$ ); Geraden im  $P - T$ -Diagramm

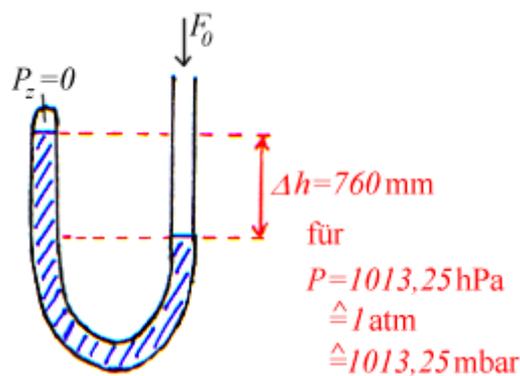
- endliche Kräfte zwischen Gasteilchen  $\Rightarrow P \neq 0$
- $\Rightarrow$  (4.5) gilt nicht für tiefe Temperaturen, für kleine Volumen bzw. große Drücke
- Gültigkeitsbereich von speziellen Gasen, z.B.



- nicht berücksichtigt:  
Phasenübergänge Gas  $\rightarrow$  Flüssigkeit  $\rightarrow$  Festkörper  
(siehe Kapitel (4.4) bzw. (4.5))

### 4.3.2 Barometrische Höhenformel

Versuch: TORRICELLI'sches U-Rohr



Das Gewicht der Atomsphäre führt zum Luftdruck  $P_0$  und drückt die Quecksilbersäule nach unten, sodass der Höhenunterschied  $\Delta h$  zustande kommt.

$$P(h + dh) < P(h)$$

$$dP = P(h + dh) - P(h) = -\frac{mg}{A}$$

$$\rho A dh \frac{g}{A} = -g \rho dh$$

wegen  $PV = \text{const.}$  für eine konstante Temperatur (!) und  $\rho = \frac{M}{V}$ :

$$\Rightarrow \frac{P}{\rho} = \text{const.} = \frac{P_0}{\rho_0} \Rightarrow \rho = \rho_0 \frac{P}{P_0} \Rightarrow dP = -\frac{\rho_0}{P_0} g P dh$$

Integration von  $\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g dh$  liefert:

$$\ln P = -\frac{\rho_0}{P_0} gh + c$$

mit  $P(h=0) = P_0 \Rightarrow c = hP_0$

$$P = P_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{P_0} h} = P_0 e^{-\frac{h}{h_0}}$$

### Barometrische Höhenformel

$h_0 = 8330$ . Dabei wurde die Annahme gemacht, dass die Temperatur überall konstant ist, was unrealistisch ist! In der Realität nimmt die Temperatur meist mit der Höhe ab. Eine bessere Näherung liefert die „Standard-Atmosphäre“ mit  $T = 15^\circ\text{C}$  auf Meereshöhe und einem Gradienten von  $0,65 \frac{\text{K}}{\text{km}}$ .

### 4.3.3 Mikroskopisches Modell des idealen Gases

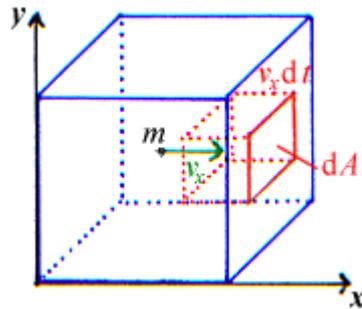
- erste, vereinfachter Einblick in kinetische Gastheorie von MAXWELL und BOLTZMANN
- mikroskopisches Modell für das ideale Gasgesetz  $\rightarrow$  Akzeptanz: „Atomhypothese“,

#### A) Mittlerer Druck $\langle P \rangle$ Modell:

- ideales Gas besteht aus sehr kleinen harten Kugeln mit dem Radius  $r_0$
- Wechselwirkungspotential:

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{für } r < 2r_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Annahme:  $r \gg r_0$   
 $\Rightarrow$  Kugeln fliegen nahezu unbeeinflusst statistisch verteilt durcheinander (typische  $\langle r \rangle \approx 3\text{nm}$ ,  $r_0 \approx 0,1\text{nm}$ )
- Kugeln stoßen nur mit Wänden des Behälters  $\rightarrow$  Reflexion



- Anzahldichte:  $n_0 = \frac{N}{V}$
- davon fliegen  $n_x$  mit  $v_x$  Richtung  $dA$   
 $\Rightarrow$  Reflexion und Impulsänderung  $2mv_x$  auf die Wand

$$\Rightarrow P = \frac{dF}{dA} = \frac{d}{dt} \frac{2mv_x \cdot z}{dA}$$

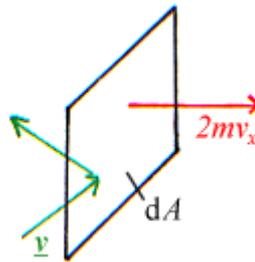
mit

$$z = \frac{\text{Anzahl der Teilchen auf } dA}{\text{Zeit}}$$

$$z = n_x v_x dA dt$$

$$\Rightarrow P = 2mn_x v_x^2$$

- nur normale Komponente  $v_x$  führt zu Impulsübertrag



- Isotropie des Systems:

$$\Rightarrow \langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$$

mit

$$\langle v_x \rangle := \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} N(v_x) v_x dv_x$$

$N(v_x)$ : (Geschwindigkeits-) Verteilungsfunktion

beachte:  $\langle v_x^2 \rangle \neq 0 = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} N(v_x) v_x^2 dv_x$

$\Rightarrow$  mittlerer Druck :

$$\langle P \rangle = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{nur } v_x > 0} n_0 2m \langle v_x^2 \rangle = n_0 m \langle v^2 \rangle$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow \langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

Isotropie:  $\Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle \Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$

damit:  $\langle P \rangle = P = \frac{1}{3} n_0 m \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n_0 \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle E_{kin} \rangle$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} N \langle E_{kin} \rangle = PN$$

Vergleich mit der Zustandsgleichung vom idealen Gas:

$$Nk_B = PV \quad \langle P \rangle \equiv P$$

$$\Rightarrow \langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

Damit erhalten wir das Ergebnis, dass die Temperatur proportional zur mittleren kinetischen Energie der Teilchen ist. Damit ist dies eine mikroskopische Definition der Temperatur!

Dabei hatten wir  $f = 3$  Freiheitsgrade der Translation betrachtet. Aus der statistischen Physik bekommt man das Ergebnis, allgemein pro Freiheitsgrad gilt:

$$\boxed{\langle E_{kin} = \frac{1}{2} k_B T \rangle} \tag{4.8}$$

**Gleichgewichtssatz**

Beispiele für Freiheitsgrade:

- Translation  $E_i \rightarrow 0$
- Rotation  $E_i \approx 1\text{meV}$
- Vibration  $E_i \approx 10 - 100\text{meV}$
- elektronische Anregung  $E_i \approx 1\text{eV}$

Komplikation durch die Quantenmechanik:

- Energie in mikroskopischen Systemen besitzt diskretes Energiespektrum  $E_i$   
 $\Rightarrow$  keine thermische Anregung als Freiheitsgrad für  $k_B T \ll E_i$   
 Vergleich dazu:  $k_B T = 26\text{meV}$  bei  $300\text{K}$

**B) Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung** Ziel: Berechnung der Anzahl  $dN_v$  von Teilchen im Geschwindigkeitsintervall  $(v, v + dv)$ .

Sei  $dN_v$  Anzahl der Teilchen in  $(v_x, v_x + dv_x)$ . Damit ist die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Teilchen in  $(v_x, v_x + dv_x)$  zu finden:

$$\frac{dN_x}{N} =: p(v_x) dv_x$$

Dabei ist  $p$  die *Wahrscheinlichkeitsdichte* bzw. die *Verteilungsfunktion*.

Symmetrieeigenschaften von  $p$  für ein isotropes System:

$v_x$  ist äquivalent zu  $-v_x \Rightarrow$  es existiert eine Funktion  $f$  mit

$$p(v_x) dv_x = f(v_x^2) dv_x$$

$$p(v_y) dv_y = f(v_y^2) dv_y$$

$$p(v_z) dv_z = f(v_z^2) dv_z$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei  $v$ -Komponenten in einem bestimmten Intervall liegen, ist

$$p(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = \frac{dN_{xyz}}{N} = \frac{dN_x}{N} \frac{dN_y}{N} \frac{dN_z}{N} = f(v_x^2) f(v_y^2) f(v_z^2) dv_x dv_y dv_z \quad (4.9)$$

mit  $dN_{xyz}$  als Anzahl der Teilchen in Element  $d\mathbf{v}$  des  $\mathbf{v}$ -Raumes. jedes Teilchen hat den Wert  $\mathbf{v}$ , der

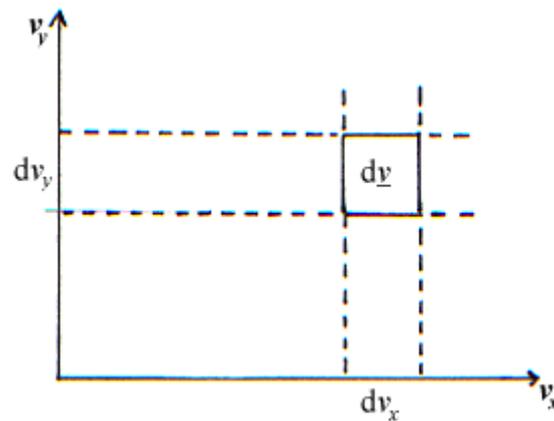


Abbildung 4.4: 2-dimensionales Beispiel des Geschwindigkeitsraums

durch den Punkt im  $\mathbf{v}$ -Raum realisiert ist.

$\Rightarrow$  Anzahl der Punkte im Element  $(v_x, v_x + dv_x, v_y + dv_y)$ :

$$dN_{xy} = n f(v_x^2) f(v_y^2) dv_x dv_y$$

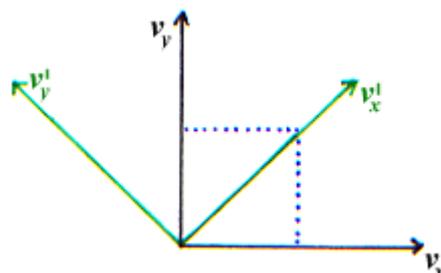
**Suche nach Funktion  $f$ :**

Trick: Drehung des Koordinatensystems so, dass

a)  $v'_y = 0$  und

b) keine Änderung  $dN_{xy}$

$$\Rightarrow f(v_x^2) f(v_y^2) = f(v_x'^2) f(v_y'^2)$$



$$v_x'^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$f(v_x^2)f(v_y^2) = f(v_x^2 + v_y^2)f(0) \tag{4.10}$$

berechne Funktion:

- $f(0)$  sei  $\alpha \Rightarrow \alpha f(x+y) = f(x)f(y)$  mit  $x := v_x^2$  und  $y := v_y^2$
- $x+y$  sei  $\xi \Rightarrow \alpha f(\xi) = f(x) + f(y)$
- nach  $x$  ableiten:  $\alpha \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \alpha f'(\xi) = f'(x)f(y)$
- nach  $y$  ableiten:  $\alpha \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \alpha f(\xi) = f'(x)f'(y)$

daraus folgt:

$$f(x)r'(y) = f'(x)f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(y)}{f(y)}$$

$v_x^2$  ist unabhängig von  $E$   $v_y^2$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\gamma = \text{const.}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(0)e^{-\gamma x} = \alpha e^{-\gamma v_x^2}$$

$$f(v_x^2) = \alpha e^{-\gamma v_x^2}$$

Normierbarkeit von  $f \Rightarrow \gamma > 0$

Für die Dichte der Teilchen im Intervall  $(\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v})$  folgt:

$$\frac{dN_{xyz}}{dv_x dv_y dv_z} = D\alpha^3 e^{-\gamma v^2} \tag{4.11}$$

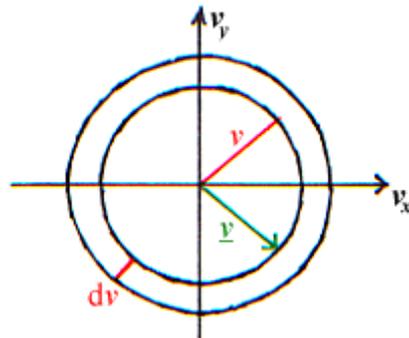
- Isotropie:

$$\Rightarrow p(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \alpha^3 e^{-\gamma v^2} \div \mathbf{v} \tag{4.12}$$

(3dimensionale GAUSSfunktion

- Anzahl  $\frac{dNv}{N}$  der Teilchen mit Geschwindigkeitsbetrag in  $(v, v + dv)$

$p(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$ ·Volumen einer Kugelschale mit Radius  $v$  und Dicke  $dv$



$$\Rightarrow N_v = N\alpha^3 e^{-\gamma v^2} 4\pi v^2 dv$$

$$p(v) dv = 4\pi\alpha^3 v^2 e^{-\gamma v^2} dv$$

$$N = \int_v dN = 4\pi\alpha^3 \underbrace{\int_0^\infty dv v^2 e^{-\gamma v^2}}_{\frac{1}{4} \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma^{\frac{3}{2}}}}$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (4.13)$$

Berechnung von  $\gamma$ :

$$\langle E_{kin} \rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \frac{1}{N} \int \frac{1}{2}mv^2 dN_v = 2\pi\alpha^3 \int_0^\infty dv v^4 e^{-\gamma v^2} = \frac{3}{2}k_B T \quad (4.14)$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{m}{2k_B T}$$

$$dN_v = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 dv \quad (4.15a)$$

$$p(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 \quad (4.15b)$$

Dies nennt man die MAXWELL'sche Geschwindigkeitsverteilung  
unwahrscheinlichste Geschwindigkeit:  $\frac{dp}{dv} = 0$

$$\Rightarrow v_N = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (4.16)$$

mittlere Geschwindigkeit:  $\bar{v} = \int_0^\infty v p(v) dv$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = \frac{2v_w}{\sqrt{\pi}} \quad (4.17)$$

mittleres Geschwindigkeitsquadrat:

$$\bar{v}^2 = \int_0^\infty v^2 p(v) dv \quad \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_N$$

Bemerkung:  $v_w < \bar{v} < \sqrt{\bar{v}^2}$   
da  $p(v)$  nicht symmetrisch um  $v_w$ , hochenergetische Ausläufer

Beispiel: N<sub>2</sub> bei  $T = 300\text{K}$ :

$$m(\text{N}_2) = 4,67 \cdot 10^{-26} \text{kg}$$

Daraus folgt:

- $v_w = 422 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- $\bar{v} = 476 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- $\sqrt{\bar{v}^2} = 517 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Vergleich: Schallgeschwindigkeit  $v_s = 330 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Messung  $p(v)$  im Experiment:

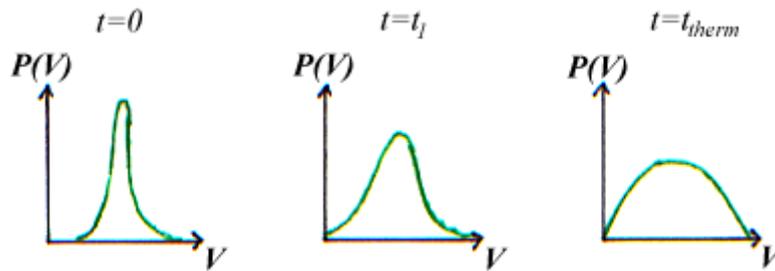
- Generation Molekularstrahl
- mechanischer Geschwindigkeits-Selektor

## 4.4 Reale Gase

Wie nehmen Gase aus beliebigen Anfangsbedingungen herausdas thermische Gleichgewicht mit MAXWELL'scher Geschwindigkeitsverteilung an?

→ Stöße zwischen den Gasteilchen

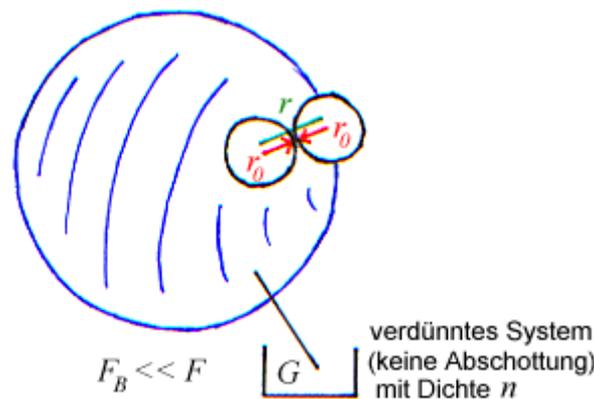
⇒ Thermalisierung



BOLTZMANN-Gleichung

**4.4.1 Stoßquerschnitt und mittlere freie Weglänge**

Wie weit fliegt ein Teilchen im Mittel *ballistisch*, bis es durch Stoß mit anderen Teilchen abgelenkt wird? Streuquerschnitt  $\sigma$  beim Stoß harter Kugeln



Stoß für  $r < 2r_0 \Rightarrow \sigma = (2r_0)^2\pi$   
 $\Rightarrow$  Gesamtfläche  $F_B$  der Target-Teilchen im Volumen  $F\Delta x$

$$F_B = \underbrace{n\Delta x F}_{N} \sigma \tag{4.18}$$

damit ergibt sich der Stoßquerschnitt auf dem Weg  $\Delta x$ :

$$\frac{F_B}{F} = n\sigma\Delta x$$

Anzahl der Teilchen  $\Delta N$ , die einen Stoß erfahren haben

$$\Delta N = -Nn\sigma\Delta x$$

Anzahl der Teilchen, die nicht gestreut wurden:

$$N(x) = N_0 e^{-n\sigma x} = N_0 e^{-\frac{x}{l}}$$

$$l = \frac{1}{n\sigma} \quad \text{mittlere freie Weglänge im Gas}$$

Beispiel:  $N_2$  bei 300K und  $P = 10^5 \text{Pa}$  mit  $\sigma = 45 \cdot 10^{-16} \text{cm}^2$

$$\Rightarrow l \approx 7 \cdot 10^{-9} \text{m} = 70 \text{nm}$$

$\hat{=}$  ballistische Flugzeit:

$$\tau \approx 1,5 \cdot 10^{-10} \text{s} = 150 \text{ps}$$

Streurrate:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{150}$$

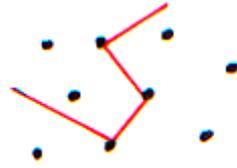


Abbildung 4.5: „random walk“ der Gasteilchen

#### 4.4.2 Diffusion als Beispiel für einen Transportprozess

im Gleichgewicht: Isotropie

⇒ kein mittlerer Massenstrom  $\mathbf{j}$  in ausgezeichnete Richtung.

*jetzt*: Dichte der Teilchen sei 1-dimensional ortabhängig  $n(x)$

Daraus folgt ein effektiver Massenstrom  $j_x$  in Richtung der  $x$ -Achse durch fehlende Isotropie.



Da mehr Teilchen zur Verfügung stehen im dichteren Bereich, bewegen sich die Teilchen eher von dem Bereich der höheren Dichte in den Bereich der niedrigeren Dichte.

**Fick'sches Gesetz:**

$$j_x = -\frac{l\langle v \rangle}{3} \frac{dn}{dx} = -D \frac{dn}{dx} \quad (4.19)$$

mit Diffusionskonstante  $D = \frac{l\langle v \rangle}{3}$ ; mit  $l = \frac{1}{n\sigma}$  und  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$

⇒ Diffusionskonstante für das ideale Gas:

$$D = \frac{1}{n\sigma} \sqrt{\frac{8k_B T}{9\pi m}}$$

Erhaltung der Gesamtmasse ⇒ **Kontinuitätsgleichung:**

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j_x(t)}{\partial x} = 0$$

⇒ **Diffusionsgleichung:**

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (4.20)$$

analog gilt für drei Dimensionen:

FICK'sches Gesetz:  $\mathbf{j} = -D \text{grad } n$

Kontinuitätsgleichung  $\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$

Diffusionsgleichung  $\frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} = D \nabla^2 n(\mathbf{r},t)$

#### 4.4.3 Van-der-Waals'sche Zustandsgleichungen

Gase bei hoher Dichte (z.B. bei hohem Druck oder tiefer Temperatur)

I) Eigenvolumen der Gasmoleküle nicht mehr klein gegenüber Gasvolumen  $V$

⇒ Korrekturgröße  $b$  in der idealen Gasgleichung

$$P(\bar{V} - b) = RT$$

- $b$  ist abhängig vom „Volumen“ der Gasteilchen bzw. physikalischer ausgedrückt von der Form und Stärke des Kraftpotentials zwischen diesen  
 $\Rightarrow$  spezoifisch für jedes Gas
- für das Modell harter sphärischer Kugeln ist  $b = 4NV_a$  mit  $V_a = \frac{4}{3}r_0^3\pi$

II) Potentielle Energie der Teilchen durch die gegenseitige Kraftwirkung nicht mehr vernachlässigbar im Vergleich zu  $\langle E_{kin} \rangle$

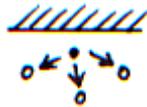
- im Inneren des Volumens:



$$\langle \sum \mathbf{F}_i \rangle = 0$$

Die Kräfte kompensieren sich

- am Rand des Volumens, also an einer Wand



$$\langle \mathbf{F}_i \rangle \neq 0$$

keine Kompensation der Begrenzungswand

$\Rightarrow$  Korrekturterm in der idealen Gasgleichung durch den sog. *Binnendruck*

$$(P + P_B)(\bar{V} - b) = RT$$

- Binnenkraft auf einzelnes Teilchen an der Grenzfläche:

$$F_{Bi} \propto n_i F_i \propto \rho$$

- der Binnendruck ist proportional zur Kraft  $F_B$  auf das einzelne Teilchen und zur Teilchendichte  $\rho$

$$P_B \propto F_{Bi} \rho \propto \rho^2 \quad \Rightarrow P_B = \frac{a}{\bar{V}^2}$$

mit Parameter  $a$ : Stoffkonstante, abhängig von Art und Stärke der Wechselwirkung der Gasteilchen  
 $\Rightarrow$  VAN-DER-WAALS-Zustandsgleichung:

$$\left( P + \frac{a}{\bar{V}^2} \right) \cdot (\bar{V} - b) = RT \quad (4.21)$$

Verlauf der Isothermen  $P(V)$

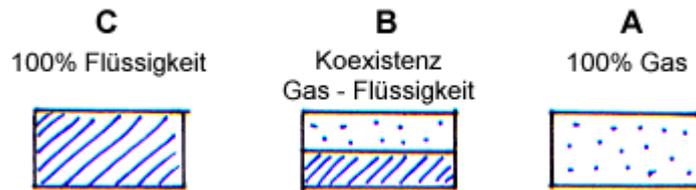
für  $T = \text{const.}$  im VAN-DER-WAALS-Gesetzes am Beispiel  $\text{CO}_2$  (wichtig: für jedes Gas individuell)

- hohe Temperaturen (z.B.  $T = 370\text{K}$ ): Verlauf der Isotherme nahe eines ideales Gases
- $T_c = 300\text{K}$ : Plateau in der Isotherme; bei  $P_c, V_c \rightarrow$  „kritischer Punkt“
- $T < T_c$ : Bereich in VAN-DER-WAALS-Isotherme mit

$$\left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_{T=\text{const.}} > 0 !$$

$\rightarrow$  multistabil!?

- experimentell: Der Druck  $P$  steigt von hohem Volumen  $V$  kommend kontinuierlich bis Punkt A und bleibt dann konstant auf einem Plateau ABC.  
Physik: Kondensation von Gas zu Flüssigkeit von



Koexistenz zweier Phasen.

- für noch kleinere Volumen sehr steiler Anstieg des Drucks wegen der geringen Kompressibilität A ( $\bar{V} \rightarrow b$ )

Dies war ein erstes Beispiel für den Phasenübergang von zwei Aggregatzuständen.

Möglichkeit der Phasenseparation als

- kritisches Phänomen bzw. Instabilität oder
- spontane Brechung der Symmetrie

Dies war in unserem Modell nicht vorgesehen. Daher kommt auch die Abweichung zwischen Theorie und der Realität.

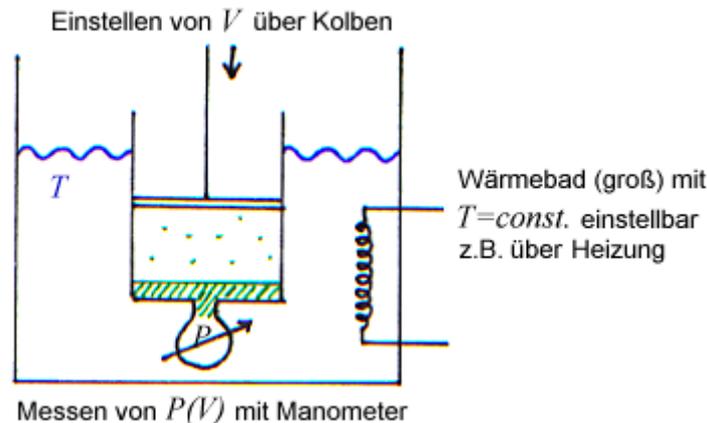


Abbildung 4.6: Experimentelle Bestimmung der Isotherme

## 4.5 Thermische Eigenschaften der Materie

### 4.5.1 Spezifische Wärme

aus (4.3.3) wissen wir, dass  $T \propto \langle E_{kin} \rangle$

$\Rightarrow$  zur Erhaltung der Temperatur eines Körpers (Gas, Flüssigkeit, Festkörper) muss Energie zugefügt werden.  $\Rightarrow$  Wärme(-Energie)  $\Delta Q$

experimentell: für einen Körper mit der Masse  $M$ :

$$\Delta Q = c \cdot M \Delta T = cM(T_2 - T_1)$$

Dabei ist  $c$  die spezifische Wärme. Außerdem ist  $C = cM_{\text{Mol}}$  die molare Wärmekapazität und  $cM$  die Wärmekapazität.

**Beachte:**

- $c$  ist eine Funktion der Temperatur, keine Materialkonstante

$$c := \frac{1}{M} \frac{dQ}{dT}$$

- Erwärmung von Bremsen eines KFZ ist ein Beispiel für die Umwandlung von makroskopischer kinetischer Energie in mikroskopische kinetische Energie, also Wärme
- Die Energieform Wärme ist speziell, da wir keine mikroskopische Kontrolle über  $10^{23}$  Freiheitsgrade eines makroskopischen Körpers besitzen.

⇒ Wärme kann nicht vollständig in andere Energieformen zurückgewandelt werden. Dies wird uns auf den 2. Hauptsatz der Thermodynamik (4.6) führen.

**spezifische Wärme eines einatomigen Gases** Wir betrachten  $N$  Teilchen im Volumen  $V$ . Nach dem Verteilungssatz wissen wir:

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2} N k_B T$$

Die *innere Energie*  $U$  ist die gesamte mikroskopische Energie der Teilchen, also kinetische ( $E_{kin}$ ), Rotations- ( $E_{rot}$ ), Vibrations- ( $E_{vib}$ ), elektrischer ( $E_r$ ) und potentieller Energie ( $E_{pot}$ ). Dabei hat ein ideales, einatomiges GAS nur drei Freiheitsgrade der kinetischen Energie:

$$\Rightarrow U = \frac{3}{2} k_B T$$

es gilt in diesem Spezialfall:

$$dU = dQ$$

$$\Rightarrow c_V = \frac{1}{M} \left( \frac{dU}{dT} \right)_{V=\text{const.}} \quad (4.22)$$

⇒ spezifische Wärme des idealen Gases bei konstantem Volumen:

$$c_V = \frac{3}{2} \frac{N k_B}{M} \quad (4.23)$$

$$\Rightarrow C_V = c_V M_{\text{Mol}} = \frac{3}{2} \frac{N}{N_A} N_A k_B = \frac{3}{2} R \quad (4.24)$$

**Fazit:** Die molare Wärmekapazität eines idealen Gases ist nicht temperaturabhängig.

## 4.6 8



## A Literaturverzeichnis

- [Zth] Optik. Lichtstrahlen - Wellen - Photonen. von Wolfgang und Ursula Zinth. Oldenbourg Verlag München Wien. ©2005 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, München.
- [For] Analysis 2. Differentialrechnung im  $\mathbb{R}^n$ , gewöhnliche Differentialgleichungen. Otto Forster. 6. Auflage. Vieweg & Sohn Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2005.
- [De1] Experimentalphysik 1. Mechanik und Wärme. Wolfgang Demtröder. 3. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2005.
- [De2] Experimentalphysik 2. Elektrizität und Optik. Wolfgang Demtröder. 3. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2005.
- [No2] Grundkurs Theoretische Physik 2. Analytische Mechanik. Wolfgang Nolting. 6. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2004.

### Weitere Literaturhinweise zum Vertiefen und Weiterarbeiten:

- [Je2] Mechanik II. Theoretische Physik: Eine Einführung in die mathematische Naturbeschreibung. Rainer J. Jelitto. Band 2. 2. Auflage. AULA-Verlag GmbH, Wiesbaden 1994.
- [Je3] Elektrodynamik. Theoretische Physik: Eine Einführung in die mathematische Naturbeschreibung. Rainer J. Jelitto. Band 3. 3. Auflage. AULA-Verlag GmbH, Wiesbaden 1994.
- [No4] Grundkurs Theoretische Physik 4. Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik. Wolfgang Nolting. 6. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2005.
- [LL1] Lehrbuch der theoretischen Physik. Mechanik. Band 1. L.D. Landau, E.M. Lifschitz. 14. Auflage. Deutsch Verlag, Frankfurt am Main, 2004.
- [Arn] Mathematical methods of classical mechanics. V. S. Arnold. Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, New York 1978.
- [Sch] Theoretische Physik: Band 1. Mechanik von den Newtonschen Gesetzen zum deterministischen Chaos. Florian Scheck. 7. Auflage. Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, New York 2003.
- [Hin] Perturbation methods. E. J. Hinch. Cambridge University Press, Cambridge 2002.



## B Abbildungsverzeichnis

1.1	H-Feld im Kondensator	9
1.2	Leitfähigkeit in Abhängigkeit der Temperatur	11
1.3	Ausbreitung der Welle nach d'Alambert	15
1.4	Lichtkegel zur Trennung der Bereiche, die zum Signal beitragen	17
1.5	zirkulare Polarisierung	20
1.6	elliptische Polarisierung	21
1.7	FOURIERtransformation am Beispiel einer GAUSS-Glocke	24
1.8	anisotroper Kristall	30
1.9	Brewsterwinkel	32
1.10	Phasensprung für Reflexion am optisch dichteren Medium	40
1.11	Reststrahlreflexion	41
1.12	Reststrahlbande	42
1.13	Skinlänge	43
1.14	Phasensprung bei Reflexion am optisch dünneren Medium	47
1.15	Brewsterwinkel	47
1.16	Strahlenbündel	48
1.17	Fata Morgana	49
1.18	Reflexionsgesetz	49
1.19	Brechungsgesetz	50
1.20	Strahlableitung durch ein Prisma	50
1.21	Abbildung an einem sphärischen Spiegel	52
1.22	Abbildung durch eine brechende Kugelfläche	52
1.23	Bildkonstruktion eines ausgedehnten Körpers durch eine dünne Sammellinse	53
1.24	Bildkonstruktion eines ausgedehnten Körpers an einer dicken Linse	54
1.25	Schematische Darstellung eines Projektionsapparates	55
1.26	fotographische Kamera	56
1.27	Schematischer Aufbau des menschlichen Auges	57
1.28	Normal- und Falschsichtigkeit des menschlichen Auges	57
1.29	Michelson-Interferometer	59
1.30	Beugung an einer Rechteckblende	71
1.31	Beugung an einer kreisförmigen Blende	72
1.32	Fouriertransformation verschiedener Öffnungen	73
1.33	Beugung am Einfachspalt; Lage der Minima und Maxima	74
1.34	Beugungsbild eines Gitters aus 5 Spalten	76
1.35	Streuprozess einer einfallenden Welle	77
1.36	Streudiagramm	78
1.37	Strahlungsdiagramm eines Hertz-Oszillators	81
1.38	Versuch zur Rayleigh-Streuung	82
2.1	Tensoren am Beispiel von Rotation des Koordinatensystems	85
2.2	Transformation zweier Koordinatensysteme	87
2.3	Michelson-Morley-Versuch	88
2.4	Darstellung von cosh, sinh und tanh	90
3.1	Schaubild einer Brachystochrone als Stück einer Zykloide	106
3.2	(starr) gekoppelte Pendel	119
3.3	Perle auf rotierendem Ring	120
3.4	zur Definition von Karten	123
3.5	Stereographische Projektion	124
4.1	Isotherme	150
4.2	Isobare	150

4.3 Isochore . . . . .	151
4.4 2-dimensionales Beispiel des Geschwindigkeitsraums . . . . .	154
4.5 „random walk“ der Gasteilchen . . . . .	158
4.6 Experimentelle Bestimmung der Isotherme . . . . .	160

## Stichworte

- AVOGADRO-Konstante, 150
- AIR-Funktion, 61
- Atlas, 125
- Auge, 56
- autonome Systeme, 118
  
- Bahn, 99
- BESSEL-Funktion, 74
- Beugungsordnung, 76
- Binnendruck, 159
- BOLTZMANN-Konstante, 150
- Brachystochrone, 106
- Brechungsgesetz, 37
- Brechungsindex
  - außerordentlicher, 31
  - ordentlicher, 31
- BREWSTER-Winkel, 46
  
- CELVIN, 148
  
- D'ALEMBERT, 15
- Datumslinie, 125
- diamagnetisch, 11
- Dichtefunktion, 102
- Dielektrische Funktion, 27
- Dielektrizitätskonstante, 11
- Diffusionsgleichung, 158
- Diffusionskonstante, 158
- DIRAC-Delta-Spike, 13
- Dispersionsrelation, 16
- Dopplereffekt
  - longitudinaler, 93
- DRUDE-Modell, 29
  
- Eichinvarianz, 131
- EINSTEIN'sche Summenkonvention, 87
- Erzeugende, 142
- EULER-LAGRANGE-Gleichungen, 107
- EULER-Gleichung, 101
- EULERGleichungen, 102, 103
- evaneszente Felder, 38
- Extinktionskoeffizient, 28
  
- Faltung, 75
- Faltungstheorem, 25
- FARADAY'sches Induktionsgesetz, 8
- Fernrohr, 58
- FICK'sches Gesetz, 158
- forminvariant, 129
- Fouriertransformation, 22
- Frequenz, 18
- FRESNEL'sche Formeln, 46
- Funktional, 100
  - funktional unabhängig, 126
  
- GALILEI-Transformation, 87
- GALILEI-Invarianz, 135
- Gaskonstante, 150
- GAUSS-Funktion, 23
- GAY-LUSSAC-Thermometer, 148
- Geodate, 102
- Gewichtsfunktion, 64
- Gleichgewichtspunkt, 111
- Gleichgewichtssatz, 153
- Gruppeneigenschaft, 91
- Gruppengeschwindigkeit, 64
  
- Höhenformel, barometrische, 152
- HAMILTON'sche Bewegungsgleichungen, 117
- HAMILTON'sche Funktion, 116
- HAMILTON'sche Prinzip, 107
- Hauptsatz der Thermodynamik, 147
- HELMHOLTZ-Gleichungen, 67
- HUGYNS'sches Prinzip, 26
  
- Ideales-Gas-Gesetz, 150
- Impuls, kanonisch, 102
- inhomogene Wellen, 38
- Instabilität, nichtlinear, 113
- Interferenzen
  - dünner Schichten, 59
  - gleicher Neigung, 60
  - Vielfachinterferenzen, 61
  - zweier Punktquellen, 58
- Isobare, 150
- Isochore, 150
- Isotherme, 150, 159
- Isotropie, 134
  
- JAKOBIidentität, 138
  
- Kamera, 56
- Karte, 123
  - in Polarkoordinaten, 124
- KELVIN-Skala, 149
- Kohärenz
  - longitudinal, 66
  - transversal, 66
- kojugierte Variablen, 116
- Koordinaten, kartesische, 83
- Koordinatentransformation, 126, 129
- Kovarianz, 129
- Kreisfrequenz, 18
- Kristall
  - anisotrop, 30
  - optisch einachsig, 31

- Kugelwellen, 17  
 LAGRANGE-Dichte, 107, 110  
 LAMBERT-BEER-Gesetz, 28  
 Langenkontraktion, 92  
 LARMOR-Formel, 79  
 LARMOR-Frequenz, 97  
 LEGENDRE-Matrix, 128  
 Leitfähigkeit, 11  
 Linsenformel, 53  
 Linsenschleiferformel, 53  
 LIOUVILLE, Satz von, 137  
 LORENZT-Kraft, 96  
 LORENTZtransformation, 85  
 LORENZ-Modell, 27  
 LORENZ-Kraft, 10  
 Lupe, 58  
  
 Magnetisierungsdichte, 10  
 Mannigfaltigkeit, 128  
 Materialgleichungen, 10  
 Maxima, 73  
 MAXWELL'sche GESchwindigkeitsverteilung, 156  
 MAXWELL-Gleichungen, 7  
     homogen, 7  
     inhomogen, 8  
 MAXWELL'sches Verschiebungsgesetz, 9  
 Metallspiegel, 43  
 MICHELSON-Interferometer, 58  
 MICHELSON-MORLEY, 88  
 MIE-Streuung, 77  
 Mikroskop, 58  
 Minima, 73  
 MINKOWSKI-Kraft, 96  
 MINKOWSKIraum, 83  
 monochromatische Wellen, 18  
  
 NOETHER-Theorem, 133, 140  
  
 OHM'scher Leiter, 42  
 optische Achse, 30  
  
 paramagnetisch, 11  
 Parseval-Beziehung, 26  
 Pendel, 118  
 Permeabilität, 10  
 Phase, 15  
 Phasen, 160  
 Phasengeschwindigkeit, 16, 64  
 Phasenraum, 136  
 PLANCK'sche Konstante, 21  
 POISSON-Klammern, 138  
 Polarisierung, 19  
     elliptisch, 20  
     lineare, 20  
     zirkulare, 20  
 Polarisationsdichte, 10, 11  
 Polarisierbarkeit, 10  
 Poynting-Satz, 14  
  
 Poynting-Vektor, 13, 34  
  
 Raum-Zeit-Koordinaten, 83  
 RAYLEIGH-Streuquerschnitt, 82  
 Reflexionsgesetz, 37  
 Reflexionskoeffizient, 39  
 Reststrahlbande, 42  
  
 Schwerpunktsatz, 135  
 Skineffekt, 43  
 SNELLIUS'sches Brechungsgesetz, 31, 37  
 spezifische Wärme, 160  
 Spur, 86  
 Streuquerschnitt  
     totaler, 78  
 Standard-Atmosphäre, 152  
 Streuquerschnitt, 77  
     differentieller, 78  
 Streuung, 77  
  
 Temperatur, 153  
 träge Masse, 96  
 Transmission, 28  
 Transmissionskoeffizient, 39  
 Transversalität, 18  
 Transversalwellen, 19  
  
 VAN-DER-WAALS-Zustandsgleichung, 159  
 Variationsrechnung, 99  
 Vektorfeld, 7  
 Vektorpotential, 8  
 Vergrößerung, 57  
     transversal, 53, 56  
 Verjüngung, 86  
 Verteilungsfunktion, 154  
 Vierergeschwindigkeit, 94  
  
 Wärmekapazität, 160  
 Wahrscheinlichkeitsdichte, 154  
 Wellengleichung, 14  
 Wellenlänge, 18  
 Wellenvektor, 16  
 Wellenzug, 62  
  
 Zeitdilatation, 92  
 Zustandsdiagramm, 150  
 Zustandsgleichung, 159  
 Zwangsbedingung  
     holonom, 119  
     rheonom, 120  
     skleronom, 120  
 zyklische Variable, 102