# Skript Vorlesung zu Physik III - Integrierter Kurs

Fachbereich Physik an der Universität Konstanz gelesen von PROF. DR. ALFRED LEITENSTORFER und PROF. DR. MATTHIAS FUCHS bearbeitet von MARCEL WUNRAM

Stand: 21. Februar 2007

Marcel.Wunram@uni-konstanz.de

Dieses Skript ist eine Mitschrift der Vorlesung Physik III: Integrierter Kurs an der Universität Konstanz (Wintersemester 2006/2007) gelesen von Prof. A. Leitenstorfer (Experimentalphysik) und Prof. M. Fuchs (theoretische Physik). Es basiert auf einem Skript der selben Vorlesung aus dem Wintersemster 2004/2005 vorgetragen von Prof. G. Maret (Experimentalphysik) und Prof. M. Fuchs (theoretische Physik), das von Marcel Indlekofer, Thomas Lauermann, Vincent Peikert und Raphael Straub geschrieben worden ist. Die Autoren erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Richtigkeit. Lob, Kritik und Anregung bitte per Mail an:

# Inhaltsverzeichnis

1	Optik					
	1.0	Wiede	rholung der Elektrodynamik			
		1.0.1	Maxwell-Gleichungen			
		1.0.2	Die Lorentzkraft			
		1.0.3	Materialgleichungen			
		1.0.4	Superposition und Komplexifizierung			
		1.0.5	Energie der elektromagnetischen Felder 13			
	1.1	Die ele	ektromagnetische Wellengleichung			
		1.1.1	Lichtgeschwindigkeit c			
		1.1.2	Exkurs: skalare Wellengleichung			
		1.1.3	Transversalität elektromagnetischer Wellen			
		1.1.4	Polarisation ebener, monochromatischer Wellen			
		1.1.5	Oszillierender Dipol als Quelle von elektromagnetischer Strahlung			
		1.1.6	Lichtwelle - Photonenfeld			
		1.1.7	Frequenzspektrum der elektromagnetischen Strahlung 22			
	12	Mathe	matischer Einschub -Fouriertransformationen 22			
	1.2	1 2 1	Definition der Fouriertransformation (FT) 22			
		1.2.1	Differentiation and Multiplikation 24			
		1.2.2 1 2 3	Falturestheorem 25			
		1.2.0	Umkehrung der FT und Persoval Cleichung 25			
	19	1.2.4 Droch	ungrinder und Dignorgion			
	1.5	1 9 1	Ingsindex und Dispersion			
		1.0.1	Dialahtriasha Europtian, Larang Madall			
		1.0.2 1.2.2	Dielektrische Funktion: Lorenz Modell			
		1.3.3	Abservation republication and Light 20			
		1.3.4	Absorption von Licht			
	1 /	1.3.0	Brechungsindex und Absorption von Metallen: Drude-Modell			
	1.4	Optise	C = 1			
		1.4.1	Grundlagen			
		1.4.2	Lichtausbreitung in doppelbrechenden Medien			
		1.4.3	Optisch einachsige Kristalle			
	1.5 Reflexion und Brechung					
		1.5.0	Einführende Versuche			
		1.5.1	Wiederholung: Feldverhalten an Grenzflächen			
		1.5.2	Energiefluss durch Grenzflächen			
		1.5.3	Brechungs- und Reflexionsgesetze			
	1.6	Geome	etrische Optik			
		1.6.1	Begriffe 47			
		1.6.2	Fermat'sches Prinzip			
		1.6.3	Strahlablenkung durch ein Prisma 50			
		1.6.4	Optische Abbildungen			
		1.6.5	Abbildungsfehler und Aberrationen			
	1.7	Instru	mente der geometrischen Optik			
		1.7.1	Projektionsapparat			
		1.7.2	Fotografische Kamera			
		1.7.3	Menschliches Auge			
		1.7.4	Vergrößernde optische Instrumente			
	1.8	Interfe	erenz			
		1.8.1	Interferenz zweier Punktquellen			
		1.8.2	Michelson-Interferrometer 58			
		1.8.3	Interferenzen dünner Schichten			
		1.8.4	Vielfachinterferenzen			
		1.8.5	Kohärenz und Wellengruppen			

	1.9	1.9 Mathematischer Einschub: Green'sche Funktionen	
		1.9.0	Motivation
		1.9.1	Die inhomogenen Wellengleichungen 66
		1.9.2	Die Green'sche Funktion der Helmholtzgleichung 67
		1.9.3	Randwertprobleme
	1.10	Beugu	ng
		1.10.1	Beugung von Wellen
		1.10.2	Kirchhoffsche Ableitung des Huygen'schen Prinzips
		1.10.3	Fraunhofer-Beugung
	1.11	Streuu	ng
		1.11.1	Phänomen der Streuung von Wellen 77
		1.11.2	Streuquerschnitte
		1.11.3	Erinnerung Dipolstrahlung 79
		1.11.4	Rayleigh-Streuung
~	~		
2	Spez		elativitatstheorie 83
	2.1	Einsch	ub: Konzepte und Definitionen $\ldots \ldots \ldots$
		2.1.1	$(\text{Kartesische}) \text{ Koordinaten} \dots \dots$
		2.1.2	$\operatorname{Minkowski-Raum} \dots \dots$
		2.1.3	Definition der Lorentz-Transformationen
	0.0	2.1.4	1ensoren       80         - baba Masharib       97
	2.2	Newto:	Midementel der Gelilei Inserier zu Messeell Gleichen von
	0.9	2.2.1	widerspruch der Gamei-invarianz zu Maxweil-Gleichungen
	2.5	nelativ	Finatein/achea Dalativitätanningin
		2.3.1	Einstein sches Relativitätsprinzip
		2.3.2	Dia aparialla Lorentz Transformation
		2.3.3	Elementare Folgerungen
		2.3.4	Weltlinien und Figenzeit
	2.4	2.3.3 Loronz	inveriante Formulierung physikal Cosetzo
	2.4 2.5	Rolatiz	ristische oder Einstein'sche Mechanik
	2.0	251	Vierorgoschwindigkoit 04
		2.5.1 2.5.2	Viererimpuls 05
		2.5.2 2.5.3	Einstein'sche Bewegungsgleichung 96
		2.0.0	
3	Ana	lytische	Mechanik 99
	3.0	Variati	onsrechnung
	3.1	Grund	züge der Variationsrechnung
		3.1.1	Motivation und klassische Beispiele
		3.1.2	Die Euler'schen Gleichungen 101
		3.1.3	Klassisches Beispiel: Die Brachystochrone 104
	3.2	Lagran	ge Mechanik
		3.2.1	Prinzip von Hamilton
		3.2.2	Elementare Beispiele
		3.2.3	Axiome und Grundbegriffe der Lagrange-Mechanik
		3.2.4	Hamilton'sche Funktion
		3.2.5	Zwangsbedingungen 118
	3.3	Mathe	matischer Einschub
		3.3.0	Motivation
		3.3.1	Karten und Koordinaten
		3.3.2	Koordinatentransformationen
		3.3.3	Koordinatentransformation zur Eliminierung von Zwangsbedingungen 127
		3.3.4	Differenzierbare Mannigfaltigkeit
	3.4	Symme	etrien und Erhaltungssätze
		3.4.1	Bahndeterminismus
		3.4.2	Kovarianz
		3.4.3	Kovarianz unter holonomen Zwangsbedingungen
		3.4.4	Elchinvarianz
		3.4.5	Das Noetner-Theorem

	3.5	Hamilton'sche Mechanik II   1	136					
		$3.5.0  \text{Motivation}  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  $	136					
		3.5.1 Phasenraum	136					
		3.5.2 Satz von Liouville	137					
		3.5.3 Poisson-Klammern	139					
		3.5.4 Symmetrietransformation	141					
		3.5.5 Kanonische Transformation	141					
	3.6	Näherungsverfahren und Störungstheorie	44					
		3.6.1 Asymptotische Entwicklungen und O- Symbol	44					
		3.6.2 Multiskalenverfahren	44					
		3.6.3 Fast kreisförmige Bahn in Zentralpotential	146					
		3.6.4 Reguläre Störungstheorie 1	147					
4	The	nische Physik	.49					
	4.1	Einleitung	149					
	4.2	Die Temperatur	150					
		4.2.1 Das Gay-Lussac-Thermometer	150					
	4.3	Das ideale Gas	151					
		4.3.1 Ideales-Gas-Gesetz	151					
		1.3.2 Barometrische Höhenformel	153					
		1.3.3 Mikroskopisches Modell des idealen Gases	154					
	4.4	Reale Gase	160					
		4.4.1 Stoßquerschnitt und mittlere freie Weglänge	160					
		4.4.2 Diffusion als Beispiel für einen Transportprozess	161					
		4.3 Van-der-Waals'sche Zustandsgleichungen	162					
	4.5	Thermische Eigenschaften der Materie	164					
	1.0	4.5.1 Spezifische Wärme	164					
		4.5.2 Adjabatische Zustandsänderung im idealen Gas	168					
		453 Anmerkungen zu Phasenübergängen	169					
	46	Die Hauptsätze der Thermodynamik	173					
	1.0	1.6.1 Der erste Hauptsatz der Thermodynamik	173					
		16.2 Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik	174					
		1.6.3 Der Carnot-Prozess	174					
	47	rroversibilität und Entropie	174					
	4.1	171 Bovorsibilität und Irrovisibilität	177					
		17.2 Entropio	178					
		17.2 Dittople	180					
	18	Formalo Aspekta der Thermodynamik	180					
	4.0	181 Cibb'sche Fundamentalform	180					
		4.8.1 Gibb Sche Fundamentanorm	183					
		1.8.2 Hemograpität und Cibbsfunktion	100					
		4.0.5 Homogenitat und Gibbsfunktion	101					
		4.0.4 GIDDS-Duitein-Dezienung	104					
		4.8.0 Maxwell-Relationen	104					
		4.8.6 Beispiel Ideales Gas	184					
		1.8.7 Thermodynamische Extremalprinzipien	185					
		4.8.8 Thermodynamische Potentiale	188					
A	Lite	turverzeichnis 1	.89					
В	Abb	dungsverzeichnis 1	.91					
5+	tichworto 102							
JL	CIWC		.93					

## 1 Optik

## 1.0 Wiederholung der Elektrodynamik

#### 1.0.1 Maxwell-Gleichungen

Die MAXWELL-Gleichungen sind partielle Differentialgleichungen für <u>Vektorfelder</u>. Durch sie werden die elektromagnetischen Phänomene beschrieben, einschließlich der Optik. **Vektorfeld** 

$$\begin{array}{ll} \underbrace{\mathbf{B}}_{\text{Vektor}}(\underbrace{\mathbf{r}}_{\text{vektor}},\underbrace{t}_{\text{Zeit}}) & \text{magnetisches Feld} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r},t) & \text{magnetische Erregung} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r},t) & \text{elektrisches Feld} \\ \mathbf{D}(\mathbf{r},t) & \text{elektrische Verschiebung} \end{array}$$

Partielle Ableitungen:

$$\sum_{\substack{\text{Nabla}\\\text{Operator}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

Vektoroperator in kartesischen Kordinaten

#### 1.0.1.1 homogene Maxwell-Gleichungen

Beschreiben Bedingungen, die elektromagnetischen Felder erfüllen müssen.

## A) Magnetfeld ist divergenzfrei

Integrale Form: Volumen<br/>integral über ein beliebiges aber festes Volumen mit geschlossener Oberfläch<br/>e $\partial V.$ Dabei ist do der Normalenvektor zur Oberfläche.

$$0 = \int_{V} \mathrm{d}^{3} r \, \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \stackrel{\mathrm{Gauß'scher}}{=} \oint_{\partial V} \mathrm{d} \mathbf{o} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

Flächenintegral über geschlossene Oberfläche Bemerkung: Magnetischer Fluss durch Fläche A



$$\int_{A} \mathrm{d}\mathbf{o} \cdot \mathbf{B} = \int_{A} \mathrm{d}o \ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \int \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \ B_{z}(\mathbf{r},t)$$

Fazit:

Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche  $\partial V$  eines beliebigen Volumens V verschwindet. Das *B*-Feld ist quellenfrei!

#### B) Faraday'sches Induktionsgesetz:

Das FARADAY'sche Induktionsgesetz besagt, dass ein elektrisches Feld durch ein sich zeitlich veränderliches **B**-Feld oder durch die Bewegung einer Drahtschleife im **B**-Feld *induziert* wird. Dazu lautet die differentielle Form:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$$
(1.2)

Bei einer beliebigen, aber konstanten Fläche A (mit geschlossenem Rand  $\partial A$ ) gilt folgende Relation:

$$\int_{A} d\mathbf{o} \cdot \dot{\mathbf{B}} = \frac{d}{dt} \int_{A} d\mathbf{o} \cdot \mathbf{B}$$
$$= -\int_{A} d\mathbf{o} \nabla \times \mathbf{E}$$
$$= -\oint_{\partial A} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}$$

bei der letzten Umformung wurde der STOKE'sche Satz verwendet.

Ein zeitlich veränderlicher magnetischer Fluss durch die Fläche A induziert ein elektrisches Feld entlang des geschlossenen Randes  $\partial A$ . Das negative Vorzeichen lässt sich mit der LENZ'schen Regel erklären.

#### **Elektromagneische Potentiale**

Zum Lösen dieser beiden MAXWELL-Gleichungen kann man sie miteinander verbinden. Dazu führt man ein skalares Potential ( $\phi(\mathbf{r},t)$ ) sowie ein Vektorpotential ( $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ ) ein.

Die beiden MAXWELL-Gleichungen (1.1) und (1.2) sind erfüllt, wenn das **E**- und das **B**-Feld durch die Potentiale in folgender Art und Weise bestimmt sind:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \dot{\mathbf{A}} \tag{1.3}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{1.4}$$

Den Beweis hierfür erhält man mit:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = \underbrace{-\nabla \times (\nabla \phi)}_{=0} \underbrace{-\nabla \times \dot{\mathbf{A}}}_{=0 \text{ da beide Terme identisch}} = 0$$

#### 1.0.1.2 inhomogene Maxwell-Gleichungen

Beschreiben, wie **D** und **H** aus "externen, (freien, experimentell kontrollierbaren) Ladungsdichten  $\varrho^{\text{ext.}}(\mathbf{r},t)$  und Stromdichten  $j^{\text{ext.}}(\mathbf{r},t)$  erzeugt werden.

#### A) elektrische Ladungen:

Die "elektrische Erregung" oder auch "elektrische Verschiebungsdichte"  $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$  wird durch eine "externe" (freie, wahre) Ladungsdichte  $\varrho^{\text{ext.}}(\mathbf{r},t)$  erzeugt. Es folgt die differentielle Form:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho^{\operatorname{ext.}} \tag{1.5}$$

für die integrale Form folgt:



dabei ist  $Q^{\text{ext.}}$  die externe Ladung in dem konstanten Volumen V. Ladungen in einem Volumen V erzeugen elektrischen Fluss durch die geschlossene Oberfläche  $\partial V$  (Ladungen sind Quellen des **D**-Feldes).

#### B) Maxwell'sches Verschiebungsgesetz:

Das MAXWELL'sche Verschiebungsgesetz sagt aus, dass die "magnetische Erregung"  $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$  durch externe Ströme  $\mathbf{j}^{\text{ext.}}$  und durch den MAXWELL'schen Verschiebungsstrom  $\dot{\mathbf{D}}$  erzeugt wird. Es ergibt sich eine ebenfalls inhomogene MAXWELL-Gleichung in differentieller und integraler Form:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}^{\text{ext.}} + \dot{\mathbf{D}}$$

$$\int_{A} d\mathbf{o} \left( \mathbf{j}^{\text{ext.}} + \dot{\mathbf{D}} \right) = \int_{A} d\mathbf{o} \nabla \times \mathbf{H} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial A} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{H}$$
(1.6)

Anschaulich ist die Aussage der integralen Form, dass bei einem Leiter, der von einem Kondensator un-



Abbildung 1.1: H-Feld im Kondensator

terbrochen wird (im Kondensator ist ein  $\dot{\mathbf{D}}$ -Feld), auch in dem Bereich, in dem kein Draht (kein Strom) ist, also im Kondensator, ein **H**-Feld existiert sofern bei den beiden Leiterstücken ein **H**-Feld existiert (Abb. 1.1).

Bemerkung: Die MAXWELL-Gleichungen sind 8 gekoppelte, lineare, partielle Differentialgleichungen für 12 Feldkomponenten bei gegebenen  $\rho$  und  $\mathbf{j} \Rightarrow$  MAXWELL-Gleichungen sind nicht geschlossen, d.h. sie legen die Felder nicht eindeutig fest.

Der Zusammenhang  $\rho$ ,  $\mathbf{j} \Rightarrow \phi$ ,  $\mathbf{A}$  folgt später

#### 1.0.2 Die Lorentzkraft

Elektromagnetische Felder üben die Kraft:

$$\mathbf{F} = q \cdot \left( \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t) \right)$$
(1.7)

auf ein Punktteilchen mit Ladung q, Position  $\mathbf{r}(t)$  und Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  aus.

## 1.0.3 Materialgleichungen

Die Beschreibung der internen Ladungen, die in Materie vorliegen, ist zu schwierig. Das mikroskopische Verständnis erfolgt erst bei der genaueren Betrachtung der Festkörperphysik.

Deshalb gibt es sogenannte *Materialgleichungen*. Sie sind Annahmen um dieses mikroskopische Problem zu umgehen. Durch sie werden Zusammenhänge zwischen den Feldern  $\mathbf{H}$  bzw.  $\mathbf{D}$  und den Feldern  $\mathbf{E}$  bzw.  $\mathbf{B}$  geliefert.

Materie enthält interne Ladungen und Ströme, die Polarisations- und Magnetisierungseffekte liefern. Man teilt auf:

$$\begin{split} \varrho^{\text{tot.}} &= \varrho^{\text{ext.}} + \varrho^{\text{int.}} \\ j^{\text{tot.}} &= j^{\text{ext.}} + j^{\text{int.}} \end{split}$$

wobei die "mikroskopischen" MAXWELL-Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\varrho^{\text{tot.}}}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \left( j^{\text{tot.}} + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \right) \mu_0 \end{aligned}$$

Dabei ist  $\varepsilon_0$  die Vakuum Polarisierbarkeit und  $\mu_0$  die Vakuum Permeabilität. Allgemein gilt:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$
$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} + \mathbf{M}$$

Dabei ist **P** die Polarisationsdichte und **M** die Magnetisierungsdichte , die beide von  $\rho^{int.}$  bzw.  $j^{int.}$  erzeugt werden:

$$abla \mathbf{P} = -\varrho^{\text{int.}}$$
 $abla imes \mathbf{M} + \dot{\mathbf{P}} = j^{\text{int.}}$ 

Fazit: Die MAterialgleichungen geben die Zusammenhänge

$$\varrho^{\text{int.}}; j^{\text{int.}} \leftrightarrow \mathbf{P}; \mathbf{M} \leftrightarrow \mathbf{D}; \mathbf{H} \leftrightarrow \mathbf{E}; \mathbf{B}$$

#### 1.0.3.1 Vakuum

Im Vakuum gibt es keine internen Ladungen ( $\rho^{\text{int.}} = 0 = \mathbf{j}^{\text{int.}}$ ;  $\rho = \rho^{\text{ext.}}$ ;  $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{\text{ext.}}$ ). Unter diesen Voraussetzungen gilt (ohne Näherung):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}$$
$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \mathbf{B}$$

Im Gegensatz zu diesen beiden Materialgleichungen sind alle anderen Materialgleichungen Näherungen aus einfachen Modellen, die für gemittelte Felder gelten.

#### 1.0.3.2 unmagnetische Materialien

In unmagnetischen Materialien gilt mit der magnetischen Permeabilität  $(\mu)$ :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \cdot \mathbf{B} \tag{1.8}$$

Unmagnetische Materialien sind dadurch charakterisiert, dass ihre Permeabilität nahezu 1 ist. ( $\mu \approx 1$ ) Materialien mit  $\mu < 1$  wie z.B. Wasser oder Kupfer werden **diamagnetisch** genannt. Materialien mit  $\mu > 1$  wie z.B. Sauerstoff oder Platin werden **paramagnetisch** genannt.

#### 1.0.3.3 Leiter

In Leitern existieren freie, interne Ladungen. Wir betrachten verschiedene Modelle für Leiter:

- Modell des idealen Leiters: Innerhalb des idealen Leiters gibt es kein elektrisches Feld, somit gilt  $\mathbf{E} \equiv 0$  innerhalb des Leiters.
- Modell des Ohm'schen Leiters: Mit der Leitfähigkeit σ gilt:

$$\mathbf{j}^{\text{int.}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \tag{1.9a}$$

und wegen  $\mathbf{M} = 0$  und  $\dot{\mathbf{P}} = j^{\text{int.}}$ :

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{D}} = \varepsilon \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}} = \varepsilon \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \sigma \mathbf{E}$$
(1.9b)

Bei Leitern sinkt die Leitfähigkeit mit der Temperatur bei Halbleitern hingegen nimmt die Leitfähigkeit bei einer Temperaturzunahme stark zu; für Isolatoren gilt:  $\sigma \approx 0$ .



Abbildung 1.2: Leitfähigkeit in Abhängigkeit der Temperatur a) Leiter b) Halbleiter

#### 1.0.3.4 Isolatoren / Dielektrika

In einem Dielektrikum sind alle Ladungen gebunden, es gibt keine freien Ladungen. Wieder unterscheiden wir verschiedene Modelle:

Modell des idealen Dielektrikums:
 Mit der *relativen Dielektrizitätskonstante* ε gilt im idealen Dielektrikum:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} \tag{1.10}$$

 Modell des polarisierbaren Dielektrikums: Hier gilt mit der Polarisationsdichte P, der Frequenz der gebundenen harmonischen Bewegung der Ladungen ω<sub>0</sub> und der Plasmafrequenz ω<sub>P</sub>:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{1.11a}$$

$$\ddot{\mathbf{P}} + \omega_0^2 \mathbf{P} = \varepsilon_0 \omega_P^2 \cdot \mathbf{E} \tag{1.11b}$$

#### • Modell des anisotropen Dielektrikums:

Beim anisotropen Dielektrikum gilt wie analog zum idealen Dielektrikum (1.10):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$$

Dabei ist  $\underline{\varepsilon}$  jedoch ein Tensor zweiter Stufe (Matrix):

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

**Bemerkung:** Ableitungen der Materialmodelle in der Festkörperphysik. Lineare Relation  $\mathbf{D} \sim \mathbf{E}$  nur in Näherung, allgemein gilt  $\varepsilon = \varepsilon(E^2)$ , aber die lineare Näherung ist gut für kleine Felder.

#### 1.0.4 Superposition und Komplexifizierung

Natürliche Folgerung, da die MAXWELL-Gleichungen linear sind. Zur Vereinfachung betrachten wir die Gleichungen im Vakuum (vgl. 1.0.3.1). Sind nun  $\mathbf{E}_n$  und  $\mathbf{B}_n$  für n = 1,2,3,... Lösungen zu MAXWELL-Gleichungen zu  $\rho_n$  und  $\mathbf{j}_n$ , d.h. gilt:

$$\nabla \mathbf{E}_n = \frac{\varrho_n}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \mathbf{B}_n = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{B}_n = \mu_0 \cdot (\mathbf{j}_n + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_n) \qquad \nabla \times \mathbf{E}_n + \dot{\mathbf{B}}_n = 0$$

und sind  $c_n \in \mathbb{C}$ , so gelten für die **Superpositionen**  $\mathbf{E} = \sum_n c_n \mathbf{E}_n$  und  $\mathbf{B} = \sum_n c_n \mathbf{B}_n$  wieder die MAXWELL-Gleichungen mit den Quellen  $\varrho = \sum_n c_n \varrho_n$  und  $\mathbf{j} = \sum_n c_n \mathbf{j}_n$ . Beweis:

nach (1.6): 
$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \sum_{n} c_{n} \mathbf{B}_{n}$$
  
 $= \sum_{n} c_{n} \nabla \times \mathbf{B}_{n}$   
 $= \sum_{n} c_{n} \left[ \mu_{0} \cdot \left( \mathbf{j}_{n} + \varepsilon_{0} \dot{\mathbf{E}}_{n} \right) \right]$   
 $= \mu_{0} \sum_{n} c_{n} \mathbf{j}_{n} + \varepsilon_{0} \mu_{0} \sum_{n} c_{n} \dot{\mathbf{E}}_{n}$   
 $= \mu_{0} \cdot \left( \mathbf{j} + \varepsilon_{0} \dot{\mathbf{E}} \right)$ 

Das Superpositionsprinzip folgt aus der Linearität der MAXWELL-Gleichungen. Seien  $\mathbf{E}_1$  und  $\mathbf{E}_2$  und  $\mathbf{B}_1$  und  $\mathbf{B}_2$  Lösungen der MAXWELL-Gleichungen zu  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$  und  $\mathbf{j}_1$ ,  $\mathbf{j}_2$  so sind  $E = E_1 + iE_2$  und  $B = B_1 + iB_2$  Lösungen zu  $\varrho = \varrho_1 + i\varrho_2$  und  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + i\mathbf{j}_2$ . **Beweis:** s.o. mit  $c_1 = 1$  und  $c_2 = i$ 

Anwendungsbeispiel: reelle Felder, die lauten

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

werden dargestellt mit komplexen Feldern.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{c}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}_{0,c}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \in \mathbb{C} \quad \text{mit } \mathbf{E}_{0,c} \in \mathbb{C} \\ \text{über } \mathbf{E} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_{c} + \mathbf{E}_{c}^{*}\right) = \text{Re}\left\{\mathbf{E}_{c}(\mathbf{r},t)\right\} \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Häufig wird  $\operatorname{Re} \{\ldots\}$  nicht geschrieben.

#### 1.0.5 Energie der elektromagnetischen Felder

Aus der LORENTZkraft folgt die Leistung der elektromagnetischen Felder an freien (externen) Ladungen  $q_i$  mit i = 1, 2, ..., N im Volumen V. Dies ergibt als Änderung der Energie der Materie, d.h. der freien Ladungen in V. Die Leistung erhält man per Kraft mal Geschwindigkeit:

$$P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_{\mathrm{Mat.}} = \sum_{i}^{N} \mathbf{v}_{i}(t) \underbrace{q_{i} \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{r}_{i}(t)) + \mathbf{v}_{i}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_{i}(t)))}_{\text{Lorentz-Kraft}}$$
$$= \sum_{i}^{N} q_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_{i}(t), t)$$
$$= \int_{V} \mathrm{d}^{3} r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \underbrace{\sum_{i} q_{i} \mathbf{v}_{i}(t) \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{i}(t)\right)}_{\text{mikroskop. Ausdruck für j^{ext.}}}$$
$$\Rightarrow P = \int_{V} \mathrm{d}^{3} r \mathbf{j}^{\text{ext.}} \cdot \mathbf{E}$$

Damit ergibt sich die JOULE'sche Wärme (Leistung pro Volumen) zu  $\mathbf{j}^{\text{ext.}} \cdot \mathbf{E}$ . Dabei bezeichnet  $\delta$  den DIRAC-Delta-Spike. Die freien Ladungen / Ströme generieren wiederum elektromagnetiche Felder. Mit den MAXWELL-Gleichungen (MAXWELL'sches Verschiebungsgesetz (1.6) und FARADAY'sches Induktionsgesetz(1.2)) folgt weiter:

$$\begin{split} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}^{\text{ext.}} &= \mathbf{E} \cdot \left( \nabla \times \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}} \right) \\ &= -\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} - \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\ &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_{\text{Mat.}} + \int_{V} \mathrm{d}^{3} r \left( \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right) = 0 \end{split}$$

Das Prinzip der Energieerhaltung erlaubt die elektromagnetische Energie zu bestimmen:

$$U_{\text{em}} = \int\limits_{V} \mathrm{d}^{3}r \quad u_{\text{em}}(\mathbf{r},t)$$

Dabei ist  $u_{em}$  die elektromagnetische *Energiedichte*. Man betrachtet ein beliebiges Volumen V, das aber konstant gehalten wird. Außerdem ist es wichtig, dass die felderzeugenden Komponenten (Leiter, Kondensatoren etc.) weit entfernt sind, so dass die Felder außerhalb des Volumens als gegeben angenommen werden können. Damit folgt mit Hilfe des Gauss'schen Satz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_{\mathrm{Mat}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_{\mathrm{em}} + \oint_{\substack{\partial V \\ \text{Oberflächenintegral}}} \mathrm{d}\mathbf{o} \cdot \mathbf{S} = 0$$

wobei

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{1.12}$$

der **Poynting-Vektor** (die Energiestromdichte der elektromagnetischen Felder) ist. Im Folgenden wird der Spezialfall untersucht, dass die Materie im Volumen V ein unmagnetisches, ideales Dielektrikum ist:

$$\begin{split} \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} &= \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2} \partial_t \mathbf{E}^2 \\ \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} &= \frac{\mu \mu_0}{2} \partial_t \mathbf{H}^2 \\ \Rightarrow u_{\text{em}} &= \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{\mu \mu_0}{2} H^2 \end{split}$$

Die zeitliche Änderung der gesamten Energie  $U = U_{\text{Mat}} + U_{\text{em}}$  der freien, externen Ladungen und der elektromagnetischen Felder im Volumen V ist gegeben durch den elektromagnetischen Energiefluss durch die Oberfläche  $\partial V$  von V.

Da das Volumen beliebig ist, folgt für die differentielle Form der Poynting-Satz:

$$\mathbf{j}^{\text{ext.}} \cdot \mathbf{E} + \partial_t u_{\text{em}} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$

## 1.1 Die elektromagnetische Wellengleichung

Nach MAXWELL und Faraday induzieren sich elektrische und magnetische Felder wechselseitig.

#### 1.1.1 Lichtgeschwindigkeit c

Im ungeladenen (unmagnetischen) Dielektrikum ( $\rho^{\text{ext}} = \mathbf{j}^{\text{ext}} = 0$ ;  $\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$ ;  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu \mu_0} \mathbf{B}$ ) gilt zunächst mit dem FARADAY'schen Induktionsgesetz (1.2):

$$\nabla \times \left( \nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} \right) = 0$$
  
$$\Leftrightarrow \underbrace{\nabla \left( \nabla \mathbf{E} \right)}_{=0 \operatorname{da} \varrho = 0} - \nabla^2 \mathbf{E} + \mu \mu_0 \underbrace{\left( \nabla \times \dot{\mathbf{H}} \right)}_{=j^{\operatorname{ext}} + \varepsilon \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}} = 0$$
  
$$\Leftrightarrow -\nabla^2 \mathbf{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \ddot{\mathbf{E}} = 0$$

Man definiert die Vakuumlichtgeschwindigkeit c sowie den Brechungsindex n als:

$$c := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad n := \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Daraus ergibt sich die homogene Wellengleichung des elektrischen Feldes:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\partial_t^2\right]\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0$$
(1.13a)

 $v = \frac{c}{n}$  ist die Lichtgeschwindigkeit im Dielektrikum.

Über das MAXWELL'sche Verschiebungsgesetz (1.6) erhält man die homogene Wellengleichung des magnetischen Feldes:

$$0 = \nabla \times \left( \nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \right)$$
$$= \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{B} \frac{1}{\mu \mu_0} \right) - \nabla^2 \mathbf{B} \frac{1}{\mu \mu_0} - \varepsilon \varepsilon_0 \ddot{\mathbf{B}}$$
$$\Leftrightarrow 0 = \left[ \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \right] \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$
(1.13b)

In Luft ist beispielsweise  $n \approx 1,000294$  und  $\sqrt{\varepsilon\mu} \approx 1,000295$ . In Wasser hingegen ist  $n \approx 1,33$  und  $\sqrt{\varepsilon\mu} \approx 9$ . Die Erklärung dafür liefert die Dispersion.

#### 1.1.2 Exkurs: skalare Wellengleichung

Die Wellengleichung für ein Skalarfeld  $\varphi(\mathbf{r},t)$  lautet:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\partial_t^2\right) \cdot \varphi(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{1.14}$$

#### Verschiedene Lösungstypen:

#### A) ebene Wellen nach d'Alembert

Behauptung:

$$\phi(\mathbf{r},t) = f_{+}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t) + f_{-}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

mit dem festen Vektor **k** der Länge  $k = |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{v}$  und  $f_+, f_-$  ist Lösung der skalaren Wellengleichung für beliebige (zwei Mal stetig differenzierbare) Funktionen  $f_{\pm}$ . Dabei ist  $f_{\pm} = f_{\pm}(\varphi_{\pm})$  wobei

$$\varphi_{\pm} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t$$

als "Phase" der Funktion bezeichnet wird. Häufig wird allerdings nur

$$\varphi = \varphi_{-} = \mathbf{kr} - \omega t \tag{1.15}$$

als Phase bezeichnet.



Abbildung 1.3: Ausbreitung der Welle **a**) mit  $\varphi_+$  nach  $-\mathbf{k}$  laufender und **b**) mit  $\varphi_-$  nach  $+\mathbf{k}$  laufender Erregung.

Wählt man  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{x}}$ , so wird  $\varphi_{\pm} = kx \pm \omega t$  und man erhält die in Abbildung 1.3 dargestellte Situation.  $f_{\pm}$  beschreibt eine nach  $-\mathbf{k}$  (links) laufende Welle (Erregung, Signal),  $f_{\pm}$  eine nach  $+\mathbf{k}$  (rechts) laufende, da:

 $\varphi_{\pm}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) = \varphi_{\pm}(\mathbf{r}, t)$  gilt für:

$$\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r} = \mp \omega \Delta t$$

Mit der Wahl von  $\mathbf{k}$  in x-Richtung ergibt dies:

$$\Delta x = \mp \frac{\omega}{k} \Delta t$$

Im Folgenden soll bewiesen werden, dass dies eine Lösung der Wellengleichung ist:

$$\begin{split} \partial_t^2 f_{\pm}(\varphi_{\pm}(\mathbf{r},t)) &= \partial_t \left( \frac{\partial f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}} \dot{\varphi}_{\pm} \right) \\ &= \partial_t \left( \pm \omega \cdot \frac{\partial f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}} \right) \\ &= (\pm \omega)^2 \cdot \frac{\partial^2 f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}^2} \\ \nabla^2 f_{\pm}(\varphi_{\pm}(\mathbf{r},t)) &= \nabla \cdot \left( \frac{\partial f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}} \cdot \nabla \varphi_{\pm}(\mathbf{r},t) \right) \\ &= \nabla \cdot \left( \frac{\partial f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}} \mathbf{k} \right) \\ &= k^2 \cdot \frac{\partial^2 f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}^2} \end{split}$$

Betrachtet man nun die homogene skalare Wellengleichung, so sieht man, dass sie genau dann erfüllt ist, wenn man die beiden oberen Gleichungen gleichsetzt und dabei die linke Seite noch durch  $v^2$  dividiert:

$$\begin{aligned} (\frac{\omega}{v})^2 \cdot \frac{\partial^2 f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}^2} &= k^2 \cdot \frac{\partial^2 f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}^2} \\ \Leftrightarrow \qquad k^2 &= \frac{\omega^2}{v^2} \end{aligned}$$

 $\left(k^2 - \left(\frac{\omega}{v}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0 \text{ ist erfüllt, wenn } \omega^2 = k^2 v^2 \text{ selbst für } \frac{\partial^2 f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}^2} \neq 0.$ 

- $\bullet~{\bf k}$ heißt Wellenvektor und gibt die Ausstrahlungsrichtung
- Die Relation  $\omega = \pm kv$  heißt *Dispersionsrelation*. Sie muss erfüllt sein, damit die homogene (quellenfreie) Wellengleichung eine nichttriviale Lösung besitzt
- $\varphi$  ist ebene Welle, weil für  $t = t_0$  die Flächen (Wellenfronten), auf denen  $\varphi = \text{const.}$  gilt, Ebenen sind bestimmt durch  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const.} \Leftrightarrow \varphi_{\pm}(\mathbf{r}, t = t_0) = \text{const.}$  Wellenfronten sind senkrecht zu  $\mathbf{k}$



- Wellenfront  $\varphi_{\pm} = \text{const.}$  bewegen sich mit konstanter "*Phasengeschwindigkeit*"  $\pm v$  wobei  $\mathbf{v} = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{v}} = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k}$  in  $\mp \mathbf{k}$  Richtung  $\Rightarrow \Delta \mathbf{r} = \mp \mathbf{v} \Delta t = \mp \frac{\omega}{k^2} \Delta t$
- Signaltransport: Wähle Koordinatensystem  $(KS)\hat{\mathbf{x}} \parallel \hat{\mathbf{v}}$  sodass 1-dimensionale Wellengleichung folgt

$$\Rightarrow \left(\partial_x^2 - \frac{1}{v^2}\partial^2\right)\varphi(x,t) = 0$$

Wie bewegt sich ein "Signal" (Wellenpaket), das zum Zetpunkt t = 0 lautet  $\phi(x,0) = \phi_0(x), \dot{\phi}(x,t = 0) = v_o(x)$  (Anfangswerte) für t > 0? D'ALAMBERT:  $\phi(x,t) = f_+(x+vt) + f_-(x-vt)$  $\rightarrow$  Anfangsbedingungen  $(i) \phi_0(x) = f_+(x) + f_-(x)$  mit  $\partial f_{\pm}(x+vt) = \pm \frac{\partial f_{\pm}}{\partial \varphi_{\pm}} \cdot v$  wobei Abkürzung im Folgenden  $f'_{\pm}$  Ableitung nach Argument von  $f_{\pm}$  $\Rightarrow v_0(x) = (f'_+(x) - f'_-(x))v$  integrieren:

(*ii*)  $f_+(x) - f_-(x) = \frac{1}{v} \int dx' v_0(x')$   $\Rightarrow f_{\pm}(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) \pm \frac{1}{v} \int dx'' v_0(x'))$   $\Rightarrow \phi(x,t) = \frac{1}{2}(\phi_0(x+vt) + \phi_0(x-vt) + \frac{1}{v} \int_{x-vt}^{x+vt} dx' v_0(x'))$ eindeutige und einzige Lösung des Anfangsproblems (D'ALAMBERT'sche Formel)

Beispiel:



Werte  $\phi(|x| > v(t_0 - t), t)$  haben auf  $\phi(x = 0, t_0)$  keinen Einfluss.



Abbildung 1.4: Der s.g. Lichtkegel trennt Bereiche in (x,t), die zum Signal bei  $\varphi(x=0,t)$  beitragen.

#### **B)** Kugelwellen

Im dreidimensionalen Raum werde  $\phi(\mathbf{r},t) = \tilde{\phi}(r = |\mathbf{r}|,t)$  angenommen. Dabei ist  $\mathbf{r} = 0$  der Ursprung des Koordinatensystems (o.b.d.A.).

aus (1.14): 
$$\Rightarrow 0 = \left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\partial_t^2\right)\tilde{\phi}(r,t)$$
  
(siehe BRONSTEIN)  $= \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{1}{v^2}\partial_t^2\right)\tilde{\phi}(r,t)$ 

Man wähle den Ansatz  $\tilde{\phi}(r,t) = \frac{1}{r} \cdot g(r,t)$ :

$$\Rightarrow \partial_r \frac{1}{r}g = \frac{1}{r}g' - \frac{1}{r^2}g$$
$$\Leftrightarrow \partial_r^2 \frac{1}{r}g = \partial_r \left(\frac{1}{r}g' - \frac{1}{r^2}g\right)$$
$$= -\frac{2}{r^2}g' + \frac{1}{r}g'' + \frac{2}{r^3}g$$
$$\Rightarrow \frac{1}{r}\left(\partial_r^2 - \frac{1}{v^2}\partial_t^2\right)g(r,t) = 0$$

für r > 0 folgt die eindimensionale Wellengleichung. Wenn  $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(r,t)$  gilt, so ergibt sich  $\varphi$  aus der d'Alembert Lösung der radialen Gleichung für  $g = r \cdot \tilde{\varphi}$ :

$$\phi(r,t) = \frac{1}{r} \left( g_+(r+vt) + g_-(r-vt) \right)$$

#### Bemerkungen:

- $g_+$  ist die einlaufende und  $g_-$  die auslaufende Kugelwelle
- $g_{\pm}$  ergeben sich aus den Anfangsbedingunen mit der Formel von Poisson
- Bei Kugelwellen sind Wellenfronten Kugelschalen im Ursprung
- Die Amplitude skaliert mit  $\frac{1}{r}$
- Ob ebene Welle oder Kugelwelle verwendet wird, hängt von der Symmetrie des Problems ab.



#### C) ebene monochromatische Wellen

Die ebenen monochromatischen Wellen sind ein sehr wichtiger Spezialfall der oben behandelten ebenen Wellen, bei denen  $f_{\pm}$  periodisch ist. Hier gilt:



für festes  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  gilt, dass  $f_{\pm}(\mathbf{r}_0, t + mT) = f_{\pm}(\mathbf{r}_0, t)$  periodisch (für  $m = 0, \pm 1, \pm 2,...$ ) in t ist. Die Periode ist dabei  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$ .  $\nu = \frac{1}{T}$  ist die Frequenz mit der Einheit Hertz und  $\omega = 2\pi\nu$  wird mit *Kreisfrequenz* bezeichnet. Außerdem

gilt für festes  $t = t_0$ , dass  $\varphi_{\pm}$  periodisch ist im Raum:

$$f_{\pm}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t_0) = f_{\pm}(\mathbf{r}, t_0)$$

 $f_{\pm}$  ist periodisch in  ${\bf r}$  für  $\Delta {\bf r} \cdot {\bf k} = 2\pi m$  mit  $m=0,\pm 1,\pm 2,....$ Wählt man  $\mathbf{k} \parallel \hat{\mathbf{x}}$ , so ergibt sich:

$$\Delta x = m \cdot \frac{2\pi}{k} = m \cdot \lambda$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega}v = \frac{v}{\nu}$$
$$v = \lambda \cdot \nu$$
$$v \cdot T = \lambda$$

 $\lambda$  ist die sogenannte Wellenlänge

#### 1.1.3 Transversalität elektromagnetischer Wellen

Im ungeladenen, unmagnetischen idealen Dielektrikum betrachten wir eine komplexifizierte ebene monochromatische Welle:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \cdot e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = \mathbf{E}_0 \cdot e^{i\varphi}$$
(1.16a)

mit  $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3$  als konstantem Amplitudenvektor und  $\varphi$  als Phase. Physikalisch relevant ist nur der Realteil von **E**.

Nun soll untersucht werden, ob diese Welle die MAXWELL-Gleichungen erfüllt: Betrachten wir Gleichung (1.5) für  $\rho^{\text{ext}} = 0$ :

l

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \nabla \mathbf{E} = 0$$
$$\Leftrightarrow -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 \underbrace{e^{i\varphi}}_{\neq 0} = 0$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$$

Als nächstes untersuchen wir Gleichung (1.2):

$$\dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E} = -i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i\varphi}$$
$$= \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \partial_t e^{i\varphi}$$

und durch Integration folgt weiter:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cdot e^{i\varphi} + \underbrace{\mathbf{B}^{\text{stat}}(\mathbf{r})}_{\equiv 0 \text{ o.B.d.A}}$$
(1.16b)

mit: 
$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{\omega} \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0$$

Die MAXWELL-Gleichung (1.1) ist mit diesen Bedingungen erfüllt:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 e^{i\varphi} = -\frac{i}{\omega} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) e^{i\varphi} = 0$$

Es bleibt noch zu untersuchen, ob auch Gleichung (1.6) für  $\mathbf{j}^{\text{ext}} = 0$  erfüllt ist:

$$\begin{split} -\dot{\mathbf{D}} + \nabla \times \mathbf{H} &= -i\varepsilon\varepsilon_0\omega\mathbf{E}_0 e^{i\varphi} - \frac{1}{\mu\mu_0}\frac{i}{\omega}\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0)e^{i\varphi} \\ &= -\frac{1}{\mu\mu_0}\frac{i}{\omega}\left(\frac{n^2}{c^2}\omega^2\mathbf{E}_0 + \underbrace{\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)}_{=0} - k^2\mathbf{E}_0\right)e^{i\varphi} \\ &= -\frac{1}{\mu\mu_0}\frac{i}{\omega}\left[\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - k^2\right]\underbrace{\mathbf{E}_0}_{\neq 0}e^{i\varphi} \end{split}$$

Damit wir also eine nicht-triviale Lösung ( $\mathbf{E}_0 \neq 0$ ) haben, muss die sogenannte Dispersionsrelation  $\omega^2 = k^2 v^2$  erfüllt sein.

Als Fazit erhalten wir, dass ebene monochromatische Wellen:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\varphi} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i\varphi}$$
  
mit:  $-\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \qquad kv = \omega = k \frac{c}{n}$ 

die MAXWELL-Gleichungen in idealen Dielektriken lösen und Transversalwellen sind:

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{E}_0 \tag{1.16c}$$

und dass gilt:

$$|\mathbf{B}_0| = \frac{1}{v} |\mathbf{E}_0| \tag{1.16d}$$

Ihre *Energiestromdichte* ist:

$$\begin{split} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{\mu\mu_0} \left( \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E} \right\} \times \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{B} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{4\mu\mu_0} \left[ \left( \mathbf{E} + \mathbf{E}^* \right) \times \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \left( \mathbf{E} + \mathbf{E}^* \right) \right] \\ &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 v^2}{4\omega} \left[ \left( \mathbf{E} + \mathbf{E}^* \right) \cdot \left( \mathbf{E} + \mathbf{E}^* \right) \right] \mathbf{k} \\ &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left[ \left| \mathbf{E} \right|^2 + \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}^2 \right\} \right] v \hat{\mathbf{k}} \\ &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left[ \left| \mathbf{E}_0 \right|^2 + \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}_0^2 e^{2i\varphi} \right\} \right] v \hat{\mathbf{k}} \end{split}$$

Dabei gilt:  $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$  und  $|\mathbf{E}|^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$ .

#### 1.1.4 Polarisation ebener, monochromatischer Wellen

 $\hat{\mathbf{k}}$  bildet mit den Einheitsvektoren, die auf  $\mathbf{k}$  senkrecht sind ( $\hat{\mathbf{e}}_1$  und  $\hat{\mathbf{e}}_2$ ) (sie erfüllen also  $\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$  und  $\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = 0$ ) ein (rechtshändiges) Orthogonalsystem. Damit ist  $\mathbf{E}_0$  schreibbar als:

$$\mathbf{E}_0 = \alpha \hat{\mathbf{e}}_1 + \beta \hat{\mathbf{e}}_2$$

mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 

#### A) lineare Polarisation

Wenn (i)  $\alpha = 0$ , (ii)  $\beta = 0$  oder (iii) der Quotient  $\frac{\alpha}{\beta}$  reell ist (d.h.  $\alpha = Ae^{i\delta}$  und  $\beta = Be^{i\delta}$  mit  $A, B, \delta \in \mathbb{R}$ ), dann schwingt **E** in fester Richtung:

$$\begin{aligned} \alpha &= Ae^{i\delta} \qquad \beta = Be^{i\delta} \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= (A\hat{\mathbf{e}}_1 + B\hat{\mathbf{e}}_2)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \delta) \end{aligned}$$

In allen anderen Fällen rotiert die Polarisationsrichtung mit der Phase  $\varphi$ 

#### B) zirkulare Polarisation

Wenn der Quotient  $\frac{\alpha}{\beta} = \pm i$  also rein imaginär ist und die Länge 1 hat, d.h.  $\alpha = Ae^{i\delta}$  und  $\beta = \pm iAe^{i\delta}$  $(A, \delta \in \mathbb{R})$ , dann durchläuft **E** einen Kreis:



Abbildung 1.5: zirkulare Polarisation

$$\mathbf{E}_{\pm} = A \left( \hat{\mathbf{e}}_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \mp \hat{\mathbf{e}}_2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \right) = \begin{pmatrix} \text{rechts} \\ \text{links} \end{pmatrix} \text{zirkulare Polarisation}$$

Dies ist eine Superposition zweier senkrechter linear polarisierter Wellen (mit  $\Delta$ Phase = 90°). Bei einer Umlaufrichtung im Uhrzeigersinn spricht man von links zirkular polarisiert und im Gegenuhrzeigersinn von rechts zirkular polarisiert. Eine zirkular polarisierte Welle ist eine Superposition zweier linear polarisierter Wellen. Analog ist die linear polarisierte Welle Superposition zweier gegenläufiger zirkular polarisierter Wellen.

#### C) elliptische Polarisation

In allen anderen Fällen durchläuft  $\mathbf{E}$  eine Ellipse und ist im Allgemeinen immer noch eine Superposition zweier linear polarisierter Wellen.

#### 1.1.5 Oszillierender Dipol als Quelle von elektromagnetischer Strahlung

• fundamental für zwei Aspekte der Optik

Emission von Licht (Sender) $\rightarrow$ IK4

- Licht-Materie-Wechselwirkung  $\rightarrow$  1.3.ff., IK4
- Beispiele: Resonanz<br/>freuqenz $\nu_0$ 
  - Stabantenne MHz-GHz

Gitterschwingungen in Festkörpern 10THz

- Molekülschwingungen 100THz,  $1\text{THz} = 10^{12}\text{Hz}$
- Atomare Übergänge 500THz



Abbildung 1.6: elliptische Polarisation

• wichtige Aspekte der Dipolstrahlung

Retardierung  $E(t) + \frac{r}{c} \sim \frac{\partial}{\partial t}(t)$ 

maximale Abstrahlung der Ebene senkrecht zur Achse (Äquatorebene)

minimale Abstrahlung der Achse parallel zu Dipol

Fernfeld:  $E \sim \frac{1}{r}$  für  $r > \lambda$ 

Nahfeld:  $E \sim \frac{1}{r^2}$  für  $r \ll \lambda$ 

• wichtige Größen

makroskopisches Dipolmoment  $\mathbf{p} = e \cdot \mathbf{x} \mathbf{E} \mathbf{M} -$ mit e: verschobene Ladung und x: Abstand Schwerpunkte positiver-negativer Ladungsverteilung

Polarisationsdichte:  $\mathbf{P} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{p} \, \mathrm{d}V$ 

Potential Rückstellkraft V(**x**): z.B. V(**x**) =  $\frac{k}{2}x^2$ 

reduzierte Masse der verschobenen Ladnungen z.B.  $m_e$ 

Resonanzfrequenz (für kleine Auslenkungen) z.B.  $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m_e}}$ 

## 1.1.6 Lichtwelle - Photonenfeld



- Energie  $E = h\nu = \hbar\omega$
- <u>Ruhe</u>masse des Photons m = 0
- Impuls <u>im Vakuum</u> des Photons  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$  (komplexer Zusammenhang in Materie)

Lichtquelle	Photonenfluss in $\frac{1}{sm^2}$
fs-Laser 100GW, Fluss durch $20\mu m$	$10^{39}$
cw-Laser 10W	$10^{29}$
pralle Sonne	$10^{22}$
Laserpointer 1mW bei 2mm	$10^{21}$
Arbeitsraum	$10^{19}$
Vollmondnacht	$10^{16}$
sternenklare Nacht	$10^{14}$

#### 1.1.7 Frequenzspektrum der elektromagnetischen Strahlung

Sichtbares Licht bei 400-800nm

## 1.2 Mathematischer Einschub - Fouriertransformationen

#### Motivation:

Ebene, monochromatische Felder

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{E}_{0}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right\}$$

sind spezielle Lösungen der MAXWELL-Gleichungen, die nützlich sind, weil ein beliebiges Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$  mit ihnen als Linearkombination (Superposition) geschrieben werden kann.

Thema ist, in wieweit die Diskussion der ebenen, monochromatischen Wellen ausreicht, um allgemeine Felder zu beschreiben.

## 1.2.1 Definition der Fouriertransformation (FT)

Mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , einem Vektor im d-dimensionalen Raum und sei  $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}$  stückweise stetig und absolut integrabel, d.h.

$$\int \mathrm{d}^d x \, |f(\mathbf{x})| < \infty$$

Mit  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$  ist die (d-dim) FT definiert durch:

$$\widetilde{f}(\mathbf{k}) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d x \; e^{i \, \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \tag{1.17a}$$

Bemerkung: Elementare Eigenschaften

• FT ist lineare Abbildung  $f \to \tilde{f}$ 

$$f \to \tilde{f} = \operatorname{FT}\left[f(\mathbf{x})\right](\mathbf{k})$$

mit  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  konstant.

$$\operatorname{FT}[\lambda_1 f_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 f_2(\mathbf{x})](\mathbf{k}) = \lambda_1 \tilde{f}_1 + \lambda_2 \tilde{f}_2$$

٠

$$(\tilde{f}(\mathbf{k}))^* = \tilde{f}(\mathbf{k})^* = \int \mathrm{d}^d x \; e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \; f^*(\mathbf{x}) = \tilde{f}^*(-\mathbf{k})$$

• falls f reell,  $d.h.f(\mathbf{x})^* = f(\mathbf{x})$ 

$$\Rightarrow (\tilde{f}(\mathbf{k}))^* = \tilde{f}^*(-\mathbf{k}) = \tilde{f}(-\mathbf{k})$$

- falls  $f(\mathbf{x})$  (an itsymmetrisch) symmetrisch, d.h.  $f(-\mathbf{x}) = \pm f(\mathbf{x}) \Rightarrow \tilde{f}(\mathbf{k}) = \pm \tilde{f}(-\mathbf{k})$
- Verschiebungssätze: mit a als festen Vektor und  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}$ :

$$FT[f(\mathbf{x} + \mathbf{a})](\mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}\tilde{f}(\mathbf{k})$$
$$FT[e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}f(\mathbf{x})](\mathbf{k}) = \tilde{f}(\mathbf{k} + \mathbf{p})$$

<u>Bsp.:</u> Gauß-Funktion  $f_G(\mathbf{x}) = e^{-\gamma x^2}$  mit  $\operatorname{Re} \{\gamma\} > 0$ 

$$\tilde{f}_G(\mathbf{k}) = \int d^d x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-\gamma x^2}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 e^{ik_1x_1 - \gamma x_1^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 e^{ik_2x_2 - \gamma x_2^2} \cdot \dots \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx_d e^{ik_dx_d - \gamma x_d^2}$$

Nebenrechnung: (Eindimensional)

$$f_{G1}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx - \gamma x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial k} \tilde{f}_{G1}(k) \stackrel{\text{abs.int.}}{=} \int dx \, \partial_k \, e^{ikx} \, f_{G1}(x)$$

$$= \int dx \, i \, x \, e^{ikx - \gamma x^2}$$

$$= \int dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\underbrace{e^{ikx - \gamma x^2}}_{*}\right) \cdot \left(\frac{-i}{2\gamma}\right) - \frac{k}{2\gamma} e^{ikx - \gamma x^2}$$

\* (Randterme) gibt integriert 0, da $\lim_{|x|\to\infty}e^{ikx-\gamma x^2}\to 0.$ 

$$= \frac{-k}{2\gamma}\tilde{f}_{G1}(k)$$

$$\Rightarrow \partial_k \tilde{f}_{G1}(k) + \frac{k}{2\gamma} \tilde{f}_{G1}(k) = 0$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung:

$$\tilde{f}_{G1}(k) = Ae^{\frac{-k^2}{4\gamma}}$$

 $\operatorname{wobei}$ 

$$A = \tilde{f}_{G1}(k=0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\gamma x^2}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$$

Multidimensional:

$$\Rightarrow \tilde{f}_G(\mathbf{k}) = \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\mathbf{k}^2}{4\gamma}}$$

Dies ist wiederum eine GAUSS-Glocke (Spezialfall!)

Bemerkung: Die Breiten  $\Delta x$  und  $\Delta k$  sind umgekehrt proportional  $\Delta x \cdot \Delta k = 2$  (unabhängig von  $\gamma$ ).



Abbildung 1.7: FOURIER transformation am Beispiel einer GAUSS-Glocke;  $\Delta x = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ . In der transformierten Kurve ist das Maximum bei  $\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$  und im Abstand  $\Delta k = 2\sqrt{\gamma}$  ist die Funktion  $\tilde{f}$  bei  $\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\frac{1}{e}$ .

## 1.2.2 Differentiation und Multiplikation

#### A) Differentiation

Sei  $f(\mathbf{x})$  nach  $x_i$  (partiell) differenzierbar, und sei  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} f(\mathbf{x}) = \partial_i f(\mathbf{x})$  absolut integrabel, dann

$$FT[\partial_{x_i} f(\mathbf{x})](\mathbf{k}) = -i \, k_i \tilde{f}(\mathbf{k})$$
(1.18)

Bew.:

$$\int \mathrm{d}^d x \, e^{i\,\mathbf{k}\,\mathbf{x}} \, \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{part.int.}}{=} - \int \mathrm{d}^d x \, f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \, e^{i\mathbf{k}\,\mathbf{x}}$$

+Randterme im " unendlichen, = 0, da $f(|x| \to \infty) \to 0$  damit f absolut integrabel

$$= -i k_i \int d^d x \, e^{i \, \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$
$$= -i k_i \tilde{f}(\mathbf{k})$$

Analog gilt:

$$\operatorname{FT}[\partial_i \partial_j f(\mathbf{x})](\mathbf{k}) = (-ik_i)(-ik_j)\tilde{f}(k)$$
 usw

- Nutzen der FT: Differentiation (nach x) im Urbildraum wird Multiplikation (mit k) im FOURIERraum.
- weiter gilt:

$$FT [grad f(x) = \nabla f(\mathbf{k}] (x) = -i \mathbf{k} f(\mathbf{k})$$
  

$$FT [div \mathbf{B}(x) = \nabla \cdot \mathbf{B}(x)] (\mathbf{k}) = -i \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k})$$
  

$$FT [rot \mathbf{B}(x) = \nabla \times \mathbf{B}(x)] (\mathbf{k}) = -i \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k})$$
  

$$FT [\Delta f(x) = \nabla^2 f(\mathbf{k})] (x) = -k^2 \tilde{f}(\mathbf{k})$$

#### **B)** Multiplikation

falls  $|\mathbf{x}|^n f(\mathbf{x})$  absolut integrabel:

verwende FT 
$$[e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}f(\mathbf{x})](\mathbf{k}) = \tilde{f}(\mathbf{k} + \mathbf{p})$$
  
Taylor LS  $= \int d^d x \sum_n^\infty \frac{i^n}{n!} (\mathbf{x}\cdot\mathbf{p})^n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$   
RS  $= \tilde{f}(\mathbf{k}) + \mathbf{p} \frac{\partial \tilde{f}(k)}{\partial \mathbf{k}} + \frac{1}{2} (p\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}})^2 \tilde{f}(\mathbf{k}) + \dots$ 

Durch Vergleich der Potenzen in  ${\bf p}:$ 

$$\operatorname{FT}\left[\mathbf{x} f(\mathbf{x})\right](\mathbf{k}) = -i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{k}} \qquad \text{usw}$$

#### 1.2.3 Faltungstheorem

 $\operatorname{Sei}$ 

$$h(\mathbf{x}) = \int \mathrm{d}^d y \ g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})$$

hheißt Faltung von g mit f (im Ortsraum). mit  $\mathbf{y}' = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ :

$$h(\mathbf{x}) = \int d^d \mathbf{y}' g(\mathbf{y}') f(\mathbf{x} - \mathbf{y}')$$

dann gilt :

$$\tilde{h}(\mathbf{k}) = \tilde{g}(\mathbf{k}) \ \tilde{f}(\mathbf{k})$$

Eine Faltung im Ortsraum wird Produkt im FT-Raum.

Beweis:

$$\begin{split} \tilde{h}(\mathbf{k}) &= \int \mathrm{d}^d x \; \int \mathrm{d}^d y e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} g\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} f(\mathbf{y}) \\ &= \int \mathrm{d}^d \zeta \; \int \mathrm{d}^d y e^{i\mathbf{k}\cdot\zeta} g(\zeta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} f(\mathbf{y}) \\ &= \tilde{g}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{f}(\mathbf{k}) \end{split}$$

wobei:  $\zeta=\mathbf{x}-\mathbf{y};$ da Integrationsgrenzen " $\infty,\!,\mathrm{sind}$   $\Rightarrow$  Integrationen unabhängig.

Bemerkung: Zweiter Nutzen der FT, siehe Dispersion später

## 1.2.4 Umkehrung der FT und Parseval-Gleichung

## **A) FT**<sup>-1</sup>

<u>Idee:</u> Verwende  $\tilde{f}_G(\mathbf{k} - \mathbf{p})$  als "DIRAC- $\delta$ -Funktion" für  $\gamma \to 0$  mit einer Faltung, Wobei

$$\tilde{f}_G(\mathbf{k} - \mathbf{p}) = \operatorname{FT}\left[e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}f_G(\mathbf{x})\right](\mathbf{k})$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$f_G(\mathbf{x}) = e^{-\gamma x^2}$$

(unten verwenden wir  $f_G(\mathbf{x}) \xrightarrow{\gamma \to 0} 1$ ) Hilfs-Satz:

$$\int \mathrm{d}^d u \, \tilde{f}_1(\mathbf{u}) \, f_2(\mathbf{u}) = \int \mathrm{d}^d u \, f_1(\mathbf{u}) \, \tilde{f}_2(\mathbf{u})$$

Beweis: LS (linke Seite), RS (rechte Seite)

$$\mathrm{LS} = \int \mathrm{d}^{d} \mathbf{u} \int \mathrm{d}^{d} \mathbf{x} e^{ixu} f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{u}) = \mathrm{RS}$$

damit:

$$\begin{split} y &= \int \,\mathrm{d}^d k\,\tilde{f}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot g(\mathbf{k}) \\ \text{mit Hs:} \quad y &= \int \,\mathrm{d}^d x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\,f_G(\mathbf{x})\tilde{g}(\mathbf{x}) \\ \xrightarrow{\gamma \to 0} y &= \int \,\mathrm{d}^d x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\tilde{g}(\mathbf{x}) \end{split}$$

explizit:

$$y = \int \mathrm{d}^d k \underbrace{\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}{4\gamma}}}_{\text{schnell veränderlich}} g(\mathbf{k})$$

 $\Rightarrow$  TAYLOR-Entwicklung um  $\mathbf{k} = \mathbf{p}$ :

$$y = g(\mathbf{p}) \int d^d k \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{d}{2}} \cdot e^{-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}{4\gamma}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} g(\mathbf{p}) \underbrace{\int d^d z \sqrt{\gamma} \pi^{\frac{d}{2}} e^{-z}}_{\stackrel{\gamma \to 0}{\longrightarrow 0}}$$
$$= g(\mathbf{p}) \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{d}{2}} (4\pi\gamma)^{\frac{d}{2}}$$
$$= g(\mathbf{p})(2\pi)^d$$

mit  $z = \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}}{\sqrt{\gamma}}$  im vernachlässigbaren Integral

damit folgt das Umkehrtheorem:

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int d^d x \ e^{i \,\mathbf{k} \,\mathbf{x}} \ f(\mathbf{x})$$
$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ e^{-i \,\mathbf{k} \,\mathbf{x}} \ \tilde{f}(k)$$
(1.17b)

Bemerkung:  $f \to \tilde{f}$  ist eine<br/>indeutige Abbildung mit

$$\tilde{f} \stackrel{FT}{\to} f$$

$$FT^{-1}: \quad f = \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{f}(k)$$

Jedes beliebige (abs. integrabel) Feld  $f(\mathbf{x})$  lässt sich darstellen als Superposition von Fourier-Moden  $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}$  mit  $\tilde{f}(\mathbf{k})$  als Gewichten.

## (B) Parseval-Beziehung

$$\int \mathrm{d}^d x f^*(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \tilde{f}^*(\mathbf{k}) \tilde{g}(\mathbf{k})$$
(1.19)

Beweis mit Hilfssatz:

$$RS - \int d^{d}u f_{1}(\mathbf{u}) \tilde{f}_{2}(\mathbf{u}) \stackrel{*}{=} \int d^{d}\mathbf{u} f^{*}(\mathbf{u}) g(\mathbf{u})$$
$$\stackrel{\text{HS}}{=} \int d^{d}\mathbf{u} \tilde{f}^{*}(\mathbf{u}) FT^{-1}[g](\mathbf{u})$$

Sei (\*), dann gilt  $f_1 = f^*$  und  $\tilde{f}_2 = g$ , dann folgt:  $= \int d^d \mathbf{u} \tilde{f}^*(-\mathbf{u}) \frac{1}{(2\pi)^d} \tilde{g}(-\mathbf{u})$  nun  $\mathbf{u} \to -\mathbf{u}$ 

## 1.3 Brechungsindex und Dispersion

• Ausbreitung von Licht:  $n(\omega)$ 

• 
$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon \mu} \approx \sqrt{\varepsilon}$$

## 1.3.1 Huygens'sches Prinzip

- qualitatives Bild für Lichpropagation in polarisierbaren Medien
- $\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \Rightarrow$  Polarisationsdichte  $\mathbf{P}(\mathbf{x},t)$ 
  - $\Rightarrow$  Re-Emission sekundärer Welle $\mathbf{E}_s(\mathbf{x},t)$

für  $n \neq 1$ :

• eventuell Phasenversatz

• durch Resonanzen des harmonischen Oszillators

#### C. HUYGENS (1690)

Ausbreitung einer Wellenfront dadurch, dass von jedem Punkt im Raum eine Kugelwelle ausgeht.

Superposition  $\Rightarrow$  neue Wellenfront

Amplitude + Phasenversatz  $\mathbf{E}_s(\mathbf{x},t) \rightarrow$ lokale Eigenschaften des Mediums

#### 1.3.2 Dielektrische Funktion: Lorenz Modell

- Elektrodynamik:  $\varepsilon = \text{const.}$
- aber z.B. H<sub>2</sub>O:  $\sqrt{\varepsilon(\omega=0)} = 8,96$  und n(598) = 1,33
- einfaches Modell für  $\varepsilon(\omega)$  in Systemen mit gebundenen Ladungen bzw. Elektronen (Dielektrika)
- Atome: negativ geladene Elektronen  $e^-$  mit  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg und Ladung  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  gebunden an positiven Kern mit  $m_k = \infty$

⇒ Bewegungsgleichungen für Dipolmonent  $\mathbf{p} = -g\mathbf{x}$ . Dabei ist  $\mathbf{p}$  die makroskopische Polarisation aus  $\mathbf{p} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \mathbf{E}$  (MAXWELL-Gleichungen) treibende Kraft  $\mathbf{F}(t)$  auf  $e^-$ :

$$\mathbf{F}(t) = -e\mathbf{E}(t) = -e\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$$

 $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{x}$ , reell

 $\mathbf{x}(t)$ : Auslenkung eines 1-dimensionalen harmonischen Oszillators mit Resonanzfrequenz  $\omega_0$  und Dämpfungskonstante  $\gamma \ll \omega_0$ 

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t) = -\frac{e}{m} E_0 e^{i\omega t}$$

$$x(t) = -\frac{e}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} E_0 e^{i\omega t}$$

$$p(t) = qx(t) = -ex(t)$$

$$P(t) = -ex(t)N = e^2 N \frac{1}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} E(t)$$

$$= (\varepsilon(\omega) - 1) \varepsilon_0 E(t)$$

Dabei ist  ${\cal N}$  die Teilchendichte

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 \omega^2) + i\gamma\omega}$$

#### 1.3.3 Brechungsindex

- allgemein aus der Wellengleichung:  $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$
- verdünnte Medien:  $\varepsilon(\omega) = 1 + \Delta \varepsilon$  mit  $\Delta \varepsilon \ll 1$

$$\begin{split} (\varepsilon - 1) &= (n^2 - 1) = (n + 1)(n - 1) \approx 2(n - 1) \\ (n - 1) &\approx \frac{1}{2} \left( \varepsilon(\omega) - 1 \right) = e^2 N \frac{1}{2\varepsilon_0 m} \cdot \frac{1}{(\omega_0 - \omega^2) + i\gamma\omega} \\ n(\omega) &= n_R(\omega) + in_I(\omega) \\ n_R &= 1 + \frac{e^2 N}{2\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \\ N_I &= \frac{e^2 N}{2\varepsilon k_0 m} \frac{-\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \end{split}$$

#### 1.3.4 Absorption von Licht

- Ausbreitung ebener Welle in z-Richtung
- Medium mit  $n = n_R + in_I$
- Wellenvektor  $k = \frac{n\omega}{c}$



Intensität:

$$I(z) = I(0)e^{\frac{2\omega n_I z}{c}} = I(0)e^{-az}$$
  
mit  $a = -\frac{2\omega n_I}{c} = -\frac{4\pi n_I}{\lambda}$ 

## Lambert-Beer-Gesetz

a: Extinktionskoeffizient LORENZ:

$$a = \frac{e^z N}{\varepsilon_0 mc} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

thermisches Gleichgewicht  $n_I < 0$ ; Transmission

$$T = \frac{I(z)}{I(0)} = e^{az}$$

Laser:  $n_I > 0$ 

N: Dichte der Atome bzw. Oszillatoren

$$\begin{split} I(z) &= I(0) e^{-\sigma N z} \\ I(z) &= I(0) 10^{-\varepsilon c z} \qquad \text{optische Dichte} \end{split}$$

mit  $\sigma:$  Absorbtion<br/>squerschnitt c: Konzentration in  $\frac{Mol}{l}$   $\varepsilon$ : molarer Extinktionskoeffizient

#### 1.3.5 Brechungsindex und Absorption von Metallen: Drude-Modell

Leiter: freie Elektronen  $\rightarrow$  Rückstellkraft  $\rightarrow 0$   $\rightarrow$  transversale Resonanzfrequenz:  $\omega_0 = 0$ , Dämpfung vernachlässigt, also  $\gamma = 0$  $\Rightarrow \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$  mit der Plasmafrequenz  $\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}}$ 

 $\omega > \omega_p: \, \varepsilon > 0, n$ reell  $\omega < \omega_p; \, \varepsilon < 0, n \text{ imaginär}$ 

Beispiel: Ag

Drude

$$N_{Ag} = 6 \cdot 10^{22} \text{cm}^{-3}$$
  $\omega_p = 1.38 \cdot 10^{16} \text{s}^{-1}(UV)$ 

grünes Licht  $\lambda = 500$ nm $\rightarrow \omega = 3.76 \cdot 10^{15} s^{-1}$ 

$$n_I = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = -3,53$$

Eindringtiefe  $\frac{1}{a} = -\frac{\lambda}{4\pi n_I} = 11,3$ nm jetzt:  $\gamma = 0$ LORENZ:



 $\nabla \mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \nabla \mathbf{E} = 0$ 

für  $\varepsilon=0 \Rightarrow$ longitudinale Eigenmoden möglich!

## 1.4 Optisch anisotrope Medien: Doppelbrechung

## 1.4.1 Grundlagen

anisotroper Kristall



Abbildung 1.8: anisotroper Kristall

 $e^-: \omega_{0x} \neq \omega_{0y} \Rightarrow \varepsilon_x(\omega) \neq \varepsilon_y(\omega)$ 



allgemein:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \underbrace{\underline{\varepsilon}}_{\text{Tensor}} \mathbf{E}; \qquad D_i = \varepsilon_0 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} E_k \qquad i = 1, 2, 3$$

aus Symmetrie:

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i; \qquad E_i = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_i} D_i$$

Hauptachsenform:

$$\varepsilon = \left(\begin{array}{ccc} \varepsilon_x & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_y & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{array}\right)$$

3 Fälle:

- 1) optisch isotrope Medien:  $\varepsilon_i = \varepsilon$ B<br/>sp: Gläser, Flüssigkeiten, Gase, kubische Kristalle
- 2) optisch einachsige Kristalle:  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{\perp}, \varepsilon_z = \varepsilon$ z-Achse: optische Achse
- 3) optisch zweiachsige Kristalle  $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z \neq \varepsilon_x$  $\rightarrow$  zwei optische Achsen

## 1.4.2 Lichtausbreitung in doppelbrechenden Medien

- MAXWELL-Gleichung  $\Rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$
- ebene Welle:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$

$$\nabla \mathbf{D} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \mathbf{D} = 0; \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{D}$$
$$\nabla \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{B}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}; \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{E}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\mu_0 \omega \mathbf{D}; \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{D}$$
$$\Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{-\omega^2}{\varepsilon_o c^2} \mathbf{D}$$

Energiefluss:

$$\mathbf{S} = rac{1}{\mu_0} \mathbf{E} imes \mathbf{B}$$
  $\mathbf{S} \perp \mathbf{E}; \mathbf{S} \perp \mathbf{B}$ 

Spezialfall:  $\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_x}{2} = \frac{1}{2}$ 

 $\mathbf{E}_0$ :

$$\mathbf{D}_{0} = \varepsilon_{0} \begin{pmatrix} \varepsilon_{x} & 0\\ 0 & \varepsilon_{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_{0}}{\sqrt{2}}\\ \frac{E_{0}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \varepsilon_{0} E_{x} \begin{pmatrix} \frac{E_{0}}{\sqrt{2}}\\ \frac{E_{1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

all gemein:  $\mathbf{D} \not\parallel \mathbf{E}; \, \mathbf{k} \not\parallel \mathbf{S}$ 

Spitze von  $\mathbf{D}_0$  auf Ellipse mit Achsenabschnitt  $\varepsilon_0 \varepsilon_x E_0$  und  $\varepsilon_0 \varepsilon_y E_0$ Strategie für Berechnung der Lichtausbreitung:

- Richtung  $\mathbf{k} : \mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$
- Richtung  $\mathbf{E} \Rightarrow$  lineares, homogenes Gleichungssystem:

$$\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_k \times \mathbf{E} + \frac{1}{n^2} \underline{\underline{\varepsilon}} \mathbf{E} \equiv \underline{\underline{G}} \mathbf{E} = 0$$

lösbar, falls  $det(\mathbf{G}) = 0$ 

- $\Rightarrow$  Gleichung 2. Gerades in  $n^2$
- $\Rightarrow$  2 Werte von n > 0, vernüpft mit 2 Polarisationsrichtungen
- $\Rightarrow$  Richtung von  ${\bf E}$  und  ${\bf D}$  festlegen

## 1.4.3 Optisch einachsige Kristalle

 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_\perp, \qquad \varepsilon_z = \varepsilon_\parallel$ 

$$\mathbf{k} \parallel z \Rightarrow \det(\mathbf{G}) = 0 \Rightarrow n = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$$

 $\Rightarrow$  keine Doppelbrechung

$$\mathbf{k} \parallel x \Rightarrow n_{ao} = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}, n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$$

 $n_{ao}$ : außerordentlicher Brechungsindex,  $\mathbf{E} \parallel z$  $n_o$ : ordentlicher Brechungsindex,  $\mathbf{E} \parallel y$ 

allgemein: Winkel  $\theta$  zwischen **k** und optischer Achse **z**:

$$\frac{1}{n_{ao}(\theta)^2} = \frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_{\parallel}}; \qquad n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$$

2 Polarisationsrichtungen:

- $\bullet$ ordentlicher Strahl: E und D $\perp$ z folgt dem SNELLIUS'schen Brechungsgesetz
- außenordentlicher Strahl: polarisiert in der Ebene durch die optische Achse z und k. Diese Ebene nennt man den Hauptschnitt des Kristalls. Er folgt SNELLIUS'schen Brechungsgesetz nicht.

Strahlenellipsoid für Phasengeschwindigkeit  $v_0$  und  $v_{ao}$ :

 $45^{\circ}$  zur x-Achse

ordentlicher Strahl: Kugel außerordentlicher Strahl: Ellipsoid

Achenabschnitte:

$$v_{ao} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}} = \frac{c}{n_{ao}}$$
$$v_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} = \frac{c}{n_o}$$

für  $v_{ao} > v_o$ ;  $n_{ao} < n_o$ :  $n_{ao} > n_o$ : negativ einachsig positiv einachsig

Brechung an optisch einachsigem Medium  $\rightarrow$  HUYGEN'sches Prinzip

## 1.5 Reflexion und Brechung

## 1.5.0 Einführende Versuche



• Brechnug an Grenzfläche Wasser-Luft

Licht wird zum dichteren Medium hin gebrochen

 $\alpha$ Grenzwinkel der Total<br/>reflexion

Reflexion: Einfallswinkel = Ausfallswinkel

• Brewster-Winkel



Abbildung 1.9: Brewsterwinkel

#### 1.5.1 Wiederholung: Feldverhalten an Grenzflächen

Ziel:

bisher: Wellen in unedlichem Medium

nun: Übergang von elektromagnetischen Wellen zwischen Medien mit unterschiedlichen Materialparametern

<u>Problem:</u> Makroskopische MAXWELL-Gleichungen und Materialgleichungen gelten nur nach Mittelung über räumliche Bereiche, die einige polarisierbare Atome enthalten. MAXWELL-Gleichungen gelten für Bereiche, wo Materialparameter  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  etc. stetig sind.

Material 1 und 2 seien beschrieben durch unterschiedliche Materialgleichungen. Eine Grenzfläche wird durch Grenzschicht mit Dicke  $\delta h$ , wo  $\mu$ ,  $\sigma$  ... schnell veränderlich, aber stetig modelliert.

<u>Problem:</u> Führe Grenzübergang  $\delta h \to 0$  durch um mit einfacher Grenzfläche arbeiten zu können. Material 1 und 2 haben unterschiedliche Materialparameter und Grenzschicht der Dicke  $\delta h$  trennt beiden. Für  $\delta h \to 0$  erhält man Grenzfläche.

**Annahme:** Für  $\delta h \to 0$  bleiben alle Felder und ihre zeitlichen Ableitungen endlich. (klappt nicht für zu stark vereinfachte Materialmodelle) Geometrie



Definiere:  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_2$ 

$$\mathbf{A}^{\parallel} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in x-y-Ebene heißt Tangentialvektor oder parallel}$$

 $\begin{array}{l} \Rightarrow \mbox{ Zerlegung eines beliebigen Vektors } \mathbf{A} \\ \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\parallel} + \mathbf{A}^n; \qquad \mathbf{A}^n \mbox{ Vektor senkrecht zur Grenzfläche.} \end{array}$ 

$$\mathbf{A} = \underbrace{(\mathbf{A} \ \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}}_{\mathbf{A}^n} + \underbrace{\hat{\mathbf{n}} imes (\hat{\mathbf{n}} imes \mathbf{A})}_{\mathbf{A}^{\parallel}}$$

• Maxwell-Gleichungen 1: (1.1)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B_2} - \mathbf{B_1}) = \emptyset$$
(1.20a)

Die Normalkomponente von  $\mathbf{B}$  ist immer stetig

• Maxwell-Gleichungen 2: (1.2)

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mathbf{B} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \emptyset$$
 (1.20b)

die Tangentialkomponenten von E sind immer stetig.

• Maxwell-Gleichungen 3: (1.5)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho^{\text{ext.}} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(1)}) = \varrho^F$$
(1.20c)

die Normalkomponente **D** ist stetig, springt um  $\rho^F$ , wenn  $\rho^F = 0$  keine Lösung der MAXWELL-Gleichungen und Materialgleichung liefert.

33



- $\varrho_F = \lim_{\delta h \to 0} \frac{1}{A} \int_{\partial V} d^3 r \varrho(\mathbf{x})$  $[\varrho^F] = \frac{C}{m^2} \qquad \text{Flächenladungsdichte}$
- Maxwell-Gleichungen 4: (1.6)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}^{\text{ext.}} + \dot{\mathbf{D}} \Rightarrow \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) = \mathbf{j}^F$$
(1.20d)

die Tangentialkomponenten von **H** ist stetig, oder falls dies keine Lösung der MAXWELL-Gleichungen und Materialgleichungen erlaubt, springt sie um Oberflächenstromdichte  $\mathbf{j}^F$  $\int_{\partial A} do \rightarrow \oint_L d\mathbf{s}$ 



#### 1.5.2 Energiefluss durch Grenzflächen

Wichtig für die Optik ist das Verhalten von Poyntingvektor  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  an Grenzflächen. Betrachte Energie in Zylinder Höhe:=  $\delta h$ , Volumen:=  $\delta V = A\delta h$ 





Energieerhaltung im Volumen  $\delta V$  (1.0.5)

$$\begin{aligned} \int_{\delta V} \mathrm{d}^{3} r(\dot{u}_{\mathrm{em}} + \mathbf{j}^{\mathrm{ext.}} \mathbf{E}) &= \oint_{\partial \delta v} \mathrm{d} \mathbf{o} \, \mathbf{S} \\ &= \int_{\mathrm{Mantel}} \mathrm{d} \mathbf{o} \, \mathbf{S} + \int_{A_{1}} \mathrm{d} o \, \hat{\mathbf{n}}_{1} \, \mathbf{S} - \int_{A_{2}} \mathrm{d} o \, \hat{\mathbf{n}}_{2} \, \mathbf{S} \end{aligned}$$

Postulate für den Grenzübergang  $\delta h \to 0 :$ 

- Die Felder und ihre zeitlichen Ableitungen seien endlich  $\int_{\delta V} \mathrm{d}^3 r \, \dot{u}_{em} \to 0 \text{ und } \int_{\mathrm{Mantel}} \mathrm{d} \mathbf{o} \cdot \mathbf{S} \to 0 \text{ für } \delta h \to 0$
- Die Tangentialkomponente von E ist stetig.
- Oberflächenstrom entlang der Oberfläche ist möglich für spezielle Materialien, d.h

$$\int_{\delta V} \mathrm{d}^3 r \, \mathbf{j}^{\mathrm{ext.}} \cdot \mathbf{E} \xrightarrow{\delta h \to 0} \mathbf{E}^{\parallel} \cdot \int_A \mathrm{d} o \, \mathbf{j}^H$$

wobei  $A = A_1 = A_2$  für  $\delta h \to 0$  ist; typischerweise ist  $\mathbf{j}^F$  aber 0.

•  $\Rightarrow \oint \mathrm{d}\mathbf{o} \,\mathbf{S} \to \int_{A} \mathrm{d}\mathbf{o} \,\hat{\mathbf{n}} \left(\mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)}\right)$  $\mathbf{E}^{\parallel} \cdot \int \mathrm{d}o \,\mathbf{j}^{F} = \int \mathrm{d}o \,\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)})$ 

$$\mathbf{E}^{\parallel} \cdot \int_{A} \mathrm{d}o \,\mathbf{j}^{F} = \int_{A} \mathrm{d}o \,\mathbf{\hat{n}} \cdot (\mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)})$$

Da die kleine Fläche A beliebig ist, folgt:

$$\mathbf{\hat{n}} \cdot (\mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)}) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}^F$$

d.h. die Normalkomponente von **S** ist stetig. Falls  $\mathbf{j}^F$  zur Lösung der MAXWELL- und der Materialgleichungen nötig ist, macht sie einen Sprung um die JOULE'sche Wärme des Oberflächenstromes.

Bemerkung: Alternativer Beweis:

$$\mathbf{\hat{n}} \cdot (\mathbf{E}^{(2)} \times \mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)} \times \mathbf{H}^{(1)}) = \mathbf{E}^{(2)} \cdot (\mathbf{H}^{(2)} \times \mathbf{\hat{n}}) - \mathbf{E}^{(1)} \cdot (\mathbf{H}^{(1)} \times \mathbf{\hat{n}})$$

Da die Tangentialkomponenete von E stetig ist und die Klammer jeweils tangential zur Oberfläche ist, so gilt:

$$\mathbf{E}^{\parallel} \cdot (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) \times \hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{E}^{\parallel} \cdot \mathbf{j}^{F}$$

**Bemerkung:** Zeitlich gemittelter Energiefluss  $\langle \mathbf{S} \rangle$  monochromatischer Wellen, d.h  $\mathbf{E}, \mathbf{B} \sim e^{i\omega t}$ Definition:

$$<\mathbf{S}>=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\mathrm{d}t\operatorname{Re}\left\{\mathbf{E}\right\}\times\operatorname{Re}\left\{\mathbf{H}\right\}$$

mit  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  als Periode der monochromatischen Welle.

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{4T\mu_0} \int_0^T \mathrm{d}t \left( \mathbf{E} + \mathbf{E}^* \right) \times \left( \mathbf{B} + \mathbf{B}^* \right)$$

Da jeweils die reinen und die komplex-konjuierten Teile beim Integrieren 0 ergeben:

$$\int_0^T \mathrm{d}t \, e^{2i\omega t} = (e^{2i\omega t} - 1) = 0$$

ergibt sich für den Energiefluss:

$$<\mathbf{S}>=\frac{1}{2\mu_0}\cdot\operatorname{Re}\left\{\mathbf{E}^*\times\mathbf{B}\right\}$$

Für transversale ebene monochromatische Wellen mit  $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$  und  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = 0$  folgt weiterhin:

$$<\mathbf{S}>=rac{\varepsilon_0c^2}{2}\mathrm{Re}\left\{|\mathbf{E}|^2k
ight\}$$

(selbst wenn  $\mathbf{k} \in \mathbb{C}$ )

#### 1.5.3 Brechungs- und Reflexionsgesetze

Betrachten wir die Grenzfläche als eben:



Die einfallende Welle sei  $\mathbf{E}_I$ , sie habe die Phase  $\varphi_I$  und trete unter dem Winkel  $\alpha$  zum Lot ein. Die reflektierte Welle sei  $\mathbf{E}_R$ , und die transmittierte Welle sei  $\mathbf{E}_T$  mit der Phase  $\varphi_T$  und dem Winkel  $\beta$  zum Lot. Material 1 (z < 0) sei o.B.d.A ein ideales Dielekrikum (z.B. Vakuum). Felder müssen in 1 und 2 MAXWELL-Gleichungen und Materialgleichungen erfüllen und Stetigkeitsbedingungen (1.5.1) bei z = 0genügen. Zur Vereinfachung ebene monochromatische Wellen mit den Phasen

$$\varphi_i = \omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} \quad \text{mit} \quad i = I, R, T$$

zu den Frequenzen  $\omega_i$  und den Wellenvektoren  $\mathbf{k}_i$ 

#### 1.5.3.1 Kinematische Einschränkungen

Wegen der Stetigkeitsbedingungen, die für alle t und alle x, y an der Grenzfläche gelten, müssen die Phasen bei z = 0 bis auf eine additive Konstante übereinstimmen, welche in die Feldamplituden inkorporiert wird:

$$\omega_I t - \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r}|_{z=0} = \omega_R t - \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r}|_{z=0} = \omega_T t - \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}|_{z=0}$$
(\*)

Diese Gleichung ist nur dann für alle t erfüllt, wenn gilt:

$$\omega_I = \omega_R = \omega_T = \omega$$

d.h. die Wellen haben alle die selbe Farbe. Brechungsindizes können definiert werden über

$$k_i(\omega) = \frac{\omega}{c} n_i(\omega)$$

#### • A) Reflexion:

Gleichung (\*) gilt nur dann für  $\forall \mathbf{r} \mid_{z=0} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$  falls  $\mathbf{k}_I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{k}_R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ , also die Parallelkomponenten müssen gleich sein:

$$\mathbf{k}_{I}^{\parallel} = \begin{pmatrix} k_{I,x}^{\parallel} \\ k_{I,y}^{\parallel} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{k}_{R}^{\parallel} = \begin{pmatrix} k_{R,x}^{\parallel} \\ k_{R,y}^{\parallel} \\ 0 \end{pmatrix}$$


Mit den Winkeln  $k_I^{\parallel} = \sin \alpha k_I = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \alpha$  und  $k_R^{\parallel} = \sin \alpha' k_R = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \alpha'$  gilt:

$$\sin\alpha=\sin\alpha'$$

Der Einfallswinkel ist also immer gleich dem Ausfallswinkel. Bem.:  $\omega_I = \omega_R$  im Material 1 ging ein.

• B) Brechung:



Analog gilt die Gleichung (\*) nur dann für  $\forall \mathbf{r}$ , falls  $\mathbf{k}_{I}^{\parallel} = \mathbf{k}_{T}^{\parallel} = \begin{pmatrix} k_{T,x}^{\parallel} \\ k_{T,y}^{\parallel} \\ 0 \end{pmatrix}$ , also die Parallelkompo-

nenten gleich sind. Falls Material 2 ein ideales isotropes Dielektrikum mit  $k_T = \frac{\omega}{c}n_2$  ist, so folgt das Brechungsgesetz von SNELLIUS

$$n_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta}$$

Mit dem relativen Brechungsindex  $n = \frac{n_2}{n_1}$  gilt also:

 $\sin\alpha=n\sin\beta$ 

Für n>1ergibt sich damit  $\beta<\alpha,$  die Brechung erfolgt zum Lot hin, für n<1ist das Ganze umgekehrt.

### • C) Einfallsebene

Wegen der Gleichung (\*) liegen  $\mathbf{k}_I$ ,  $\mathbf{k}_R$ , und  $\mathbf{k}_T$  in einer Ebene aufgespannt durch  $\mathbf{k}_I$  und  $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}}$ ; wählen wir das als x,z-Ebene, diese Ebene heißt *Einfallsebene* 



## • D) Grenzwinkel

Grenzwinkel  $\alpha_r$  der Totalreflexion am optisch dünneren  $(n_2 < n_1)$  Medium. Die Bedingung:  $\mathbf{k}_I^{\parallel} = \mathbf{k}_T^{\parallel}$ und  $\omega_I = \omega_T$  wobei  $\mathbf{k}_T = \mathbf{k}_T^{\parallel} + k_T^n \hat{\mathbf{n}}$  können für Medium 2 zu imaginären  $k_T^n = \frac{-i}{l}$  führen mit  $l \in \mathbb{R}$ als Eindringtiefe.

$$\frac{-1}{l^2} = (k_T^n)^2 = \mathbf{k}_T^2 - \mathbf{k}_T^{\parallel 2} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_2^2 - \mathbf{k}_I^{\parallel 2}$$
$$= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_2^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right) n_1^2 \sin^2 \alpha = \mathbf{k}_I^2 \left(\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \alpha\right)$$

Also für  $\frac{n_2}{n_1} < 1$  (d.h. n < 1) gibt es einen Grenzwinkel der Totalreflexion  $\alpha_T = \arcsin n$ , so dass für  $\alpha > \alpha_T$  die z-Komponente  $k_T^n$  immaginär (nach SNELLIUS:  $\alpha_T \to \beta = 90^\circ$ , so dass  $\sin \beta = 1$ )



Die Felder fallen also exponentiell in Materie 2 ab

$$E_T, B_T \sim e^{-|k_T^n|z} \sim e^{-\frac{z}{l}}$$

(sog. inhomogene Wellen, evaneszente Felder)

mathematisch mögliche Lösung  $e^{\frac{\pm z}{l}}$  ist unphysikalisch weil  $E(z \to \infty) \to \infty$ 

 $\rightarrow$ transmittierte Energiestromdichte durch Grenzfläche

$$\langle \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_T \rangle \sim \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\omega} k_T^n \right\} \equiv 0$$

 $\rightarrow$  gesamte eingestrahlte zeitlich gemittelte Energiedichte wird reflektiert (Totalreflexion) (Bew. Später)

## 1.5.3.2 Reflexions- und Transmissionskoeffizienten

Beschränkung auf den senkrechten Fall,  $\alpha = 0$ , alle  $k_i^{\parallel} = 0$ Dispersionsrelation in Medium 1:

$$\mathbf{k}_{I} = k_{I}\hat{\mathbf{n}} = k_{1}\hat{\mathbf{n}} = \frac{\omega}{c}n_{1}\hat{\mathbf{n}}$$
$$\mathbf{k}_{R} = -k_{R}\hat{\mathbf{n}} = -k_{1}\hat{\mathbf{n}} = -\frac{\omega}{c}n_{1}\hat{\mathbf{n}} \quad \text{und} \quad \mathbf{k}_{R} = -\mathbf{k}_{I}$$

in Medium 2:

$$\mathbf{k}_T = k_T \hat{\mathbf{n}} = \frac{\omega}{c} n_2(\omega) \hat{\mathbf{n}} = k_2(\omega) \hat{\mathbf{n}}$$

Der Ansatz transversaler ebener monochromatischer Wellen sieht folgendermaßen aus:

$$z < 0 \qquad \mathbf{E}(z,t) = e^{i\omega t} \cdot \left[ \begin{pmatrix} E_{I,x} \\ E_{I,y} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_1 z} + \begin{pmatrix} E_{R,x} \\ E_{R,y} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_1 z} \right]$$

Diese Superposition aus nach rechts einfallender und nach links reflektierter Welle erfüllt die MAX-WELLgleichungen im Dielektrikum 1, wenn  $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$  und  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$  gilt:

$$z < 0 \qquad \mathbf{B}(z,t) = \frac{n_1}{c} e^{i\omega t} \cdot \left[ \underbrace{\begin{pmatrix} -E_{I,y} \\ E_{I,x} \\ 0 \end{pmatrix}}_{1} e^{-ik_1 z} + \underbrace{\begin{pmatrix} E_{R,y} \\ -E_{R,x} \\ 0 \end{pmatrix}}_{2} e^{ik_1 z} \right]$$

1: einfallende, nach rechts laufende Welle

2: reflektierte, nach links laufende Welle

Analog für z > 0 soll nach rechts laufende transmittierte Welle existieren mit

$$\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{E} = 0$$
 und  $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k}(\omega) \times \mathbf{E})$ 

Der Ansatz hier für lautet:

$$z < 0 \qquad \mathbf{E}(z,t) = e^{i\omega t} \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{T,x} \\ E_{T,y} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_2 z} \end{bmatrix} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{B}(z,t) = \frac{n_2(\omega)}{c} e^{i\omega t} \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -E_{T,y} \\ E_{T,x} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_2 z} \end{bmatrix}$$

Die Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche z = 0 lauten:

- $\mathbf{D}_{normal}$  stetig  $\Rightarrow (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = 0)$
- $\mathbf{B}_{normal}$  stetig  $\Rightarrow (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0)$
- $\mathbf{E}_{tan}$  stetig  $\Rightarrow \mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R = \mathbf{E}_T$
- $\mathbf{H}_{tan} \sim \mathbf{B}_{tan}$  stetig  $\Rightarrow \boxed{n_1(\mathbf{E}_I \mathbf{E}_R) = n_2 \mathbf{E}_T}$

Daraus folgen die Amplitudenfunktionen:

• Reflexionsamplitude:

$$R = \frac{E_R}{E_I} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - n}{1 + n}$$

• Transmissionsamplitude:

$$T = \frac{E_T}{E_I} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2}{1+n}$$

Für die gemittelten Energieströme gelten folgende Beziehungen:

$$\langle \mathbf{S}_I \rangle = \frac{\varepsilon_0 \omega c}{2} \cdot |\mathbf{E}_I|^2 n_1 \hat{\mathbf{n}} \langle \mathbf{S}_R \rangle = -\frac{\varepsilon_0 \omega c}{2} \cdot |\mathbf{E}_I|^2 |R|^2 n_1 \hat{\mathbf{n}} \langle \mathbf{S}_T \rangle = \frac{\varepsilon_0 \omega c}{2} \cdot |\mathbf{E}_I|^2 \operatorname{Re} \{n_2\} |T|^2 \hat{\mathbf{n}}$$

Damit ergibt sich für deren Koeffizienten:

• Reflexionskoeffizient:

$$r = \frac{-\langle \mathbf{S}_R \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle}{\langle \mathbf{S}_I \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle} = |R|^2$$
(1.21a)

• Transmissionskoeffizient:

$$t = \frac{\langle \mathbf{S}_T \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle}{\langle \mathbf{S}_I \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle} = |T|^2 \cdot \frac{\operatorname{Re}\{n_2\}}{n_1}, = \|T\|^2 n$$
(1.21b)

dabei gilt das letzte Gleichheitszeichen für  $n_2 \in \mathbb{R}$ 

Reflexions- und Transmisionskoeffizient r,t messen Verhältnis der reflektierten und transmittierten Intensitäten. Da für  $j^F = 0$ , **S** stetig ist (Erhalt des Energieflusses), gilt immer

$$r + t = 1$$

Ist das Material 2 ideales Dielektrikum (d.h.  $n \in \mathbb{R}$ ), ergibt sich:



Abbildung 1.10: Phasensprung (R < 0) für Reflexion am optisch dichterem Medium (n > 1)



Beispiel:

geringe Reflexion

### Bemerkung:

Für den umgekehrten Fall:



Mit vertauschten Rollen der Materialien gilt:

$$\begin{aligned} R' &= \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} = R\\ T' &= \frac{2n_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_2}{n_1}T\\ \Rightarrow r' &= |R'|^2 = |R|^2 = r\\ \Rightarrow t' &= \frac{n_1}{n_2} |T'|^2 = \frac{n_2}{n_1} |T|^2 = t \end{aligned}$$

r und t gelten also unabhängig von der Richtung für den Durchgang durch die Grenzfläche. Es gelten die selben r, t für Intensitäten (Reziprozität).

**Hinweis:** Beim späteren Experimentalteil ändert sich die Notation zu  $r, t \rightarrow R, T!$ 

### 1.5.3.3 Reststrahlreflexion

Material 2 sei polarisierbares Dielektrikum: d.h.  $n(\omega)=\frac{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}{n_1}$ 



$$\varepsilon(\omega) = \frac{\omega_L}{\omega_0^2 - \omega^2}$$
$$\omega_L^2 = \omega_P^2 + \omega_0^2$$

siehe LORENZ-Atom ohne Dämpfung. Zur Vereinfachung:  $n_1 = 1$ 

Rechnung wie in (1.5.3.2),  $\alpha = 0$  gibt die Reflexionsamplitude

$$R(\omega) = \frac{1 - n(\omega)}{1 + n(\omega)}$$

da nur die Dispersions<br/>relation  $k_1(\omega)=\frac{\omega}{c}n_2(\omega)$ geändert wird Für $\omega<\omega_0$ und<br/>  $\omega>\omega_L$  findet man



Abbildung 1.11: Reststrahlreflexion

bekanntes. Aber für  $\omega_0 < \omega < \omega_L$  gilt:

$$\Rightarrow n(\omega) = -ik(\omega) = -i\sqrt{\frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

woraus folgt:

$$\mathbf{E}(z>0) = e^{i\omega t} T \begin{pmatrix} E_{Tx} \\ E_{Ty} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{\omega}{c}k z}$$

genaus<br/>o $B \sim e^{-\frac{\omega}{c} k \, z}$ 



Es handelt sich wieder um "inhomogene Wellen" (n = ik ist wieder unphysikalisch, da  $E(z \to \infty) \to \infty$  folgte).

Der zeitlich gemittelte Energiestrom <br/>  $\mathbf{S}_T$  > verschwindet in Material 2

$$<\mathbf{S}_T>\sim \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\omega}k_2=\frac{1}{c}n_2\right\}=0$$

ohne Dämpfung zeigt R perfekte Reflexion:

$$R = \frac{1 + ik}{1 - ik} = e^{i\gamma(\omega)} \quad \text{mit} \ \tan\frac{\gamma}{2} = k(\omega) \quad \text{und} \ r = |R|^2 = 1$$

Die gesamte Energie wird reflektiert. Bemerkung: Reststrahlmethode von RUBENS um mit Reflexion





monochromatisches Licht zu erzeugen.

### 1.5.3.4 Reflexion metallischer Systeme

Material 2 sei nun ein OHM'sches Metall. Wir brauchen, wie sich elektromagnetische Felder im OHM'schen Leiter verhalten.

### A) Elektromagnetische Felder in ohmschen Metallen:

Es gelten die Materialgleichungen für den internen Leitungsstrom  $\mathbf{j}^{\text{int.}} = \sigma \mathbf{E}$  und  $\dot{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \sigma \mathbf{E}$ , welche aus den gebundenen Ladungen resultiert. Betrachten wir die monochromatischen Felder E,B ~  $e^{i\omega t}$ :

$$\Rightarrow \mathbf{D} = \left(\varepsilon_0 - i\frac{\sigma}{\omega}\right)\mathbf{E}$$

**Satz:** Im OHM'schen Metall (Leiter) genügen die elektromagnetischen Felder für  $\omega \neq 0$  denselben Gleichungen wie im Dielektrikum, mit der Dielektrizitätskonstante:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}$$

Es gibt transversale, ebene monochromatische inhomogene (räumlich gedämpfte) Wellen mit Dispersionsrelation  $k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \in \mathbb{C}!$ Beweis siehe Afg. 11 (Telegraphengleichung)

### **B)** Wellendämpfung

Zur Vereinfachung betrachten wir einen guten OHM'schen Leiter, d.h.  $\left|\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right| \gg 1$ . Für diesen Fall gilt:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)} \doteq \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}} \cdot \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\delta(\omega)}$$
$$(1-i)^2 = 1 + i^2 - 2i = -2i \qquad \qquad \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

mit der Skinlänge  $\delta$  (Eindringtiefe):

$$\delta(\omega) = c\sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{\sigma\omega}} = \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}} \ll \lambda$$

Felder variieren gemäß  $E \propto e^{ikz} \propto e^{-\frac{iz}{\delta}} e^{-\frac{z}{\delta}}$ .



Abbildung 1.13: zur Skinlänge: exponentiell gedämpfte oszilierende, inhomogene Welle

$$\begin{array}{c|c} \text{Stoff} & \delta(\omega) & \text{bei Frequenz } \nu \\ \hline \text{Salzwasser} & 1m & 3 \cdot 10^4 \text{ Hz} \\ \text{Ag} & 10^{-6} \text{m} & 10^8 \text{ Hz} \text{ (Mikrowelle)} \end{array}$$

In einem guten OHM'schen Leiter fallen die Felder schnell in der Nähe der Oberfläche ab; im Metall (für  $z \gg \delta$ ) gilt  $E \equiv 0$  bis auf eine "Haut" (Skin) der Dicke  $\delta$  an der Oberfläche des Leiters (*Skineffekt*).

**Bemerkung:** Siehe Drude/Modell (1.3.5 und Aufgabe 8), dass für  $\omega > \omega_p$  also  $\sigma = -i\omega \frac{\omega_p^2}{\omega}$  gilt und Metall durchsichtig wird (d.h. propagierende transversale elektromagnetische Welle)

#### C) Reflexion am Metallspiegel:

Wegen den Betrachtungen zu elektromagnetischen Wellen in guten OHM'schen Leitern (A) gilt für ein solches Metall (Material 2) mit der Rechnung aus (1.5.3.2):

$$R = \frac{1 - n(\omega)}{1 + n(\omega)} \doteq \text{Taylor in } \frac{\delta}{\lambda_1} = -1 + 2\pi \frac{\delta}{\lambda_1} (1 + i)$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$n(\omega) \approx \frac{c}{\omega N_1} \frac{1-i}{\delta(\omega)} = \frac{\lambda_1}{\delta} \frac{1-i}{2\pi}$$

 $\lambda_1 = \frac{\lambda}{n_1}$ : Wellenlänge in Material *i* für ein gutes Metall wurde verwendet  $|\sigma| \gg \omega \varepsilon_0$ .

Bei z = 0 heben sich die einfallende und die reflektierte Welle also (fast) auf, und (fast) alle Energie wird reflektiert:

$$r \doteq 1 - 4\pi \frac{\delta}{\lambda} = 1 - 2n_1 \sqrt{\frac{2\sigma\omega}{\varepsilon_0}} \sim 1 - \sqrt{\sigma\omega} \quad \text{fir} \quad \omega \to 0$$

Es entsteht vor dem Spiegel eine *stehende Welle* mit räumlich festen Orten der Knoten und Bäuche (für R = -1):

$$\mathbf{E}_{I} = E_{I}^{x} \cdot e^{i(\omega t - k_{1}z)} \mathbf{e}_{x} \qquad E_{I}^{x} \in \mathbb{R} \text{ o.B.d.A.}$$
$$\mathbf{E}_{R} = R E_{I}^{x} \cdot e^{i(\omega t + k_{1}z)} \mathbf{e}_{x}$$
$$\Rightarrow \mathbf{E}(z < 0) = \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}_{I} + \mathbf{E}_{R} \right\} = \underbrace{E_{I}^{x}}_{\in \mathbb{R}} \Re e^{i\omega t} \left( e^{-ik_{1}z} - e^{ik_{1}z} \right) \mathbf{e}_{x}$$
$$= -2E_{I}^{x} \mathbf{e}_{x} \sin(k_{1}z) \sin(\omega t)$$

### 1.5.3.5 Fresnel'sche Formeln



Im Folgenden wollen wir den Fall allgemeiner Einfallsrichtung mit  $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$  speziell für ein ideales Dielektrikum als Material 2 betrachten. Die Betrachtungen sind allerdings verallgemeinerbar auf  $n(\omega)$ . Wir definieren  $n := \frac{n_2}{n_1} = \text{const.} \in \mathbb{R}$ .

Wir definieren  $n := \frac{n_2}{n_1} = \text{const.} \in \mathbb{R}$ . Man definiert für  $n_2 > n_1$  Material 2 als **optisch dichter** für  $n_2 < n_1$  als **optisch dünner** als Material 1.

Da die einfallende (transversale monochromatische) Welle als Superposition zweier linear polarisierter (transversaler) Wellen gesehen werden kann gilt:

Die Bedingung der Transversalität  $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{E}_I = 0$  ergibt zwei Forderungen/Fälle:

A)  $\mathbf{E}_I$  ist senkrecht zur Einfallsebene:

$$\mathbf{E}_{I} = \begin{pmatrix} 0\\ E_{I}^{y}\\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{i\omega t - ik_{1}^{\parallel}x - ik_{1}^{\perp}z}$$
$$E^{y} \neq 0 \quad E^{z} = E^{x} = 0$$

B)  $\mathbf{E}_I$  ist in der Einfallsebene polarisiert:



Mit der Dispersionsrelation:  $k_1 = \frac{\omega}{c}n_1 = \sqrt{\left(k_1^{\parallel}\right)^2 + \left(k_1^{\perp}\right)^2}$ mit  $k_1^{\parallel} = k_1 \sin \alpha$ ,  $k_1 = \frac{\omega}{c}n_1$ ,  $k_1^{\perp} = k_1 \cos \alpha$ 

Behauptung: Die beiden Fälle sind entkoppelt.

Ein Beweis für diese Behauptung ist in der Aufgabe 15. Hier soll mit dem zweiten Fall fortgefahren werden. Dazu verwenden wir die Symbole  $R_{\parallel}$  und  $T_{\parallel}$  weil **E** parallel zur Einfallsebene ist.

Der folgende Ansatz verwendet einen Polarisationsvektor der Länge  $E_I$ . Um sicher zu gehen, dass die Welle transversal ist, wird ein Vektor der Form  $\begin{pmatrix} k_1^{\perp} \\ 0 \\ -k_1^{\parallel} \end{pmatrix}$  dazu multipliziert, damit sich die Länge aber nicht ändert muss durch den Betrag des Vektors  $\begin{pmatrix} \omega n_1 \\ c \end{pmatrix}$  geteilt werden:

$$\begin{aligned} z < 0 \quad \mathbf{E} &= E_I \begin{pmatrix} k_1^{\perp} \\ 0 \\ -k_1^{\parallel} \end{pmatrix} \frac{c}{\omega n_1} \cdot e^{i(\omega t - k_1^{\parallel} x - k_1^{\perp} z)} + E_R \begin{pmatrix} k_1^{\perp} \\ 0 \\ k_1^{\parallel} \end{pmatrix} \frac{c}{\omega n_1} \cdot e^{i(\omega t - k_1^{\parallel} x + k_1^{\perp} z)} \\ z > 0 \quad \mathbf{E} &= E_T \begin{pmatrix} k_2^{\perp} \\ 0 \\ -k_2^{\parallel} \end{pmatrix} \frac{c}{\omega n_2} \cdot e^{i(\omega t - k_2^{\parallel} x - k_2^{\perp} z)} \end{aligned}$$

Bei der Wahl der richtigen Vorzeichen vor  $k_1$  muss man auf die Ausbreitungsrichtung der jeweiligen Welle achten, die bei einfallender und reflektierter Welle genau entgegengesetzt ist. Über  $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$  erhält man das *B*-Feld:

$$\begin{aligned} z < 0 \quad \mathbf{B} &= \frac{E_I n_1}{c} \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{\parallel} x - k_1^{\perp} z)} + \frac{E_R n_1}{c} \begin{pmatrix} 0\\-1\\0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{\parallel} x + k_1^{\perp} z)} \\ z > 0 \quad \mathbf{B} &= \frac{E_T n_2}{c} \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_2^{\parallel} x - k_2^{\perp} z)} \end{aligned}$$

Dieser Ansatz löst die MAXWELLgleichungen in Material 1 und 2 bei z = 0.

Als nächstes müssen wir uns die Stetigkeitsbedingungen anschauen:

Die Normalkomponente des Magnetfeldes  $(B^z)$  soll stetig sein, und ist es auch, da sie sowohl für z < 0als auch für z > 0 Null ist. Die Bedingung, dass die Tangentialkomponente des Magnetfeldes stetig ist, ist äquivalent zu der Bedingung, dass die Normalkomponente von **D**, d.h.  $(n_i^2 E^z)$  stetig ist. Außerdem soll die Tangentialkomponente des E-Feldes  $(E^z)$  stetig sein. Damit erhält man die beiden Bedingungen:

$$n_1(E_I - E_R) = n_2 E_T$$
$$\frac{k_1^{\perp}}{n_1}(E_I + E_R) = \frac{k_2^{\perp}}{n_2} E_T$$

45

Verwendet man weiter das SNELLIUS'sche Brechungsgesetz  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$  sowie Additionstheoreme für Sinus und Kosinus, so erhält man die **Fresnel'schen Formeln:** 

$$\begin{split} R_{\parallel} &= \frac{E_R}{E_I} = \frac{k_2^{\perp}/n_2^2 - k_1^{\perp}/n_1^2}{k_2^{\perp}/n_2^2 + k_1^{\perp}/n_1^2} = \frac{\tan(\beta - \alpha)}{\tan(\beta + \alpha)} \\ T_{\parallel} &= \frac{E_T}{E_I} = \frac{2k_1^{\perp}/(n_1 n_2)}{k_2^{\perp}/n_2^2 + k_1^{\perp}/n_1^2} = \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)\cos(\beta - \alpha)} \end{split}$$

### Bemerkungen:

- Für  $\alpha \to 0$  und damit auch  $\beta \to 0$  folgt der in (1.5.3.2 behandelte Fall  $(k_1^{\perp} \to k_i = \frac{\omega}{c} n_i)$ .
- Für  $n_2 > n_1$  (n > 1) folgt für  $\alpha \to 90^\circ$ :

$$k_1^{\perp} \to 0$$
 aber:  $\sin \beta = \frac{1}{n} < 1 \implies k_2^{\perp} \neq 0$  ist möglich

Bei streifendem Einfall liegt also vollständige Reflexion mit  $R_{\parallel}(\alpha \to 90^{\circ}) \to 1$  und  $T_{\parallel}(\alpha \to 90^{\circ}) \to 0$  vor. In der Natur kann man dies z.B. beim Spiegelbild im See etc. beobachten.

• Der Energiestrom durch die Grenzfläche ist stetig:

$$1 = r + t = n|T|^2 + |R|^2$$

• Für  $n_2 > n_1$  (n < 1) gibt es einen Grenzwinkel  $\alpha_T < 90^\circ$  der totalen Reflexion am optisch dünneren Medium. Aus der kinematischen Bedingung:

$$\mathbf{k}_{I}^{\parallel} = \mathbf{k}_{T}^{\parallel}$$
 und  $\omega_{I} = \omega_{t}$ 

folgt:

$$\left(\mathbf{k}_T^{\perp}\right)^2 = \left(\mathbf{k}_T\right)^2 - \left(\mathbf{k}_T^{\parallel}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_I^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 k_1^2 \sin^2 \alpha$$

$$= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_1^2 (n^2 - \sin^2 \alpha)$$

Also:

Für  $\alpha \geq \alpha_T$  erfolgt **Totalreflektion**, weil dort  $k_T^{\perp} = -i\kappa \left(\frac{\omega}{c}\right)$  imaginär ist. Die Welle ist exponentiell gedämpft im Material 2.

 $\sin \alpha_T = n < 1$ 

• Brewster-Winkel: Ist die Richtung der reflektierten Welle gleich der Richtung von  $\mathbf{E}_T \propto \mathbf{d}$  (mit  $\mathbf{d}$  der Dipolachse der schwingenden und strahlenden Atome in Material 2), dann ist  $R_{\parallel} = 0$ , weil die Dipole nicht entlang ihrer Achse strahlen.

Für den BREWSTER-winkel  $\alpha = \alpha_B$  gilt  $\alpha_B + \beta = \frac{\pi}{2}$ . Dann steht  $\mathbf{k}_R \perp \mathbf{k}_T$  und die von  $\mathbf{E}_T \parallel \mathbf{k}_R$ angeregten Atome machen im Material 2 eine Dipolstrahlung, die parallel zu  $\mathbf{E}$ , d.h. in die nach SNELLIUS reflektierte Richtung, verschwindet. Wenn  $\alpha_B + \beta = \frac{\pi}{2}$  ist, dann gilt  $R_{\parallel} = \frac{\tan(\beta - \alpha)}{\tan(\frac{\pi}{2})} = 0.$ 

Aus SNELLIUS folgt:

$$\frac{1}{n}\sin\alpha_B = \sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_B\right) = \cos\alpha_B$$
$$\Rightarrow \tan\alpha_B = n$$

### Bemerkung:

- Für die Grenzfläche Wasser/Luft  $(N = \frac{4}{3})$  ist der BREWSTER-winkel  $\alpha_B \approx 53^\circ$ .
- Bei Reflexion unter dem Brewsterwinkel ist das Licht vollständig linear polarisiert.



Abbildung 1.14: Veranschaulichung: (Falls R < 0 ist, macht die Welle einen Phasensprung um  $\pi$  bei Reflexion am optisch dichteren Medium)



Abbildung 1.15: Brewsterwinkel

## 1.6 Geometrische Optik

### 1.6.1 Begriffe

MAXWELLgleichungen und Materialgleiche<br/>ungen für makroskopische Abbildungen zweckmäßig MAXWELL<br/>eichung + Randbedingung  $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ <br/>Problem: Ortsauflösung ~  $\lambda \sim 500$ nm  $\rightarrow 10^{14}$  Punkte<br/>  $\Rightarrow$  der Ansatz wäre zu naiv!

Näherungen der geometrischen Optik

- Vernachlässigung des Wellencharakters "geometrische Optik" =  $\lim_{\lambda \to 0}$  (MAXWELL-Gleichungen) gültig <u>nur</u>, falls alle Dimensionen im Exponent  $\gg \lambda$
- Beschreibung der Lichtausbreitung mit <u>Strahlen</u>

 $\rightarrow$  Strahl: geometrische Pfad (Richtung) des Energieflusses, damit parallel zu S Wellen  $\rightarrow$  Strahlbüschel Strahlenbündel:



Abbildung 1.16: a) Kugelwelle  $\rightarrow$  divergente Strahlen b) externe Wellen to koluminierte Strahlen, zusammengefasst zu einem Strahlenbündel nach der Blende



- endlichen Querschnitt  $(D \gg \lambda)$
- Intensität $I=\langle {\bf S} \rangle$
- Geschwindigkeit:  $c = \frac{c_0}{n}$
- Polarisation (n (Polar))
- Frequenz  $(n(\omega))$

Axiome der geometrischen Optik

- homogene Dielektrika: geradlinie Lichtausbreitung
- Grenzfläche: Refexions/ und Brechnugsgesetz
- all gemein  $n(\mathbf{r})$ ?;  $n \in \mathbb{R}^+$

### 1.6.2 Fermat'sches Prinzip



Licht folgt dem PfadS, für den der optische Weg $W(S)=\int_S n({\bf r})$ extremal wird.

$$\frac{\partial W}{\partial S} = 0$$

Bemerkung: W kann max oder min;

$$t = \frac{s}{c} = \frac{ns}{c_0}$$

Begründung aus Maxwellgleichungen

- $\mathbf{E}(\mathbf{r}_p)$  bei P durch phasenrichtige Summation aller Wellen aus Q über alle möglichen Pfade  $S_i$
- konstuktive Interferenz falls

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S} = 0 \qquad \frac{\partial W}{\partial S} = 0$$

Bemerkungen

• ist in W min ("Prinzip der kürzesten Zeit")



- Abbildung 1.17: Fata Morgana: Über einer heißen Oberfläche wird die Luft erwärmt. Dies führt zu einer Abnahme des Brechungsindexes n(z) direkt über der Oberfläche (siehe linker Bildteil). Durch diesen Brechungsindexverlauf kommt es zu gekrümmten Lichtstrahlen. (aus [Zth] S. 74)
  - Spezialfälle: geradlinige Lichtausbreitung in homogenen Medien
  - Reflexionsgesetz



Abbildung 1.18: Reflexionsgesetz

49



Abbildung 1.19: Brechungsgesetz

• Brechungsindex

$$W = n_1 l_1 + n_2 l_2 \stackrel{!}{=} \text{extremal}$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = n_1 \frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}} + n_2 \frac{\mathrm{d}l_2}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$l_1 = \sqrt{a^2 + x^2} \qquad l_2 = \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}x} = \frac{x_1}{l_1} = \sin \theta_1$$

$$\frac{\mathrm{d}l_2}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{l_2} = -\sin \theta_2$$

$$\right\} \Rightarrow n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

## 1.6.3 Strahlablenkung durch ein Prisma

gesucht  $\delta(\alpha, \gamma)$ 



Abbildung 1.20: Strahlablenkung durch ein Prisma

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$$
  

$$\gamma = 180^\circ - (90^\circ - \beta_1 - (90^\circ - b_2))$$
  

$$= \beta_1 + \beta_2$$
  

$$\delta = \alpha_1 - \gamma + \alpha_2$$
  

$$\delta = \alpha_1 - \gamma + \arcsin\left[\mathbf{n}\sin\left(\gamma - \arcsin\left(\frac{\sin\alpha_1}{\mathbf{n}}\right)\right)\right]$$

- $\delta$  abhängig vom Brechungsindex  $n(\lambda)$
- räumliche Aufspaltung spektraler Komponenten

• Verwendung in Spektrometern  $\delta$  minimal für symmetrische Durchstrahlung  $\alpha_1 = \alpha_2$ 

$$\sin\left(\frac{\delta_{\min} + \gamma}{2}\right) = n\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

## 1.6.4 Optische Abbildungen

 $\underline{Ziel:}$ Jedem ObjektpunktQwird <br/>genau ein BildpunktPzugeordnet (geradlinientreu)<br/>  $\underline{2$ Klassen:

Reelle Abbildung: Strahlen aus Q schneiden sich in P



virtuelles Abbildung:

Strahlen verlaufen so, als würden sie sich in P schneiden, tun dies aber nicht.



## 1.6.4.1 Abbildung an einem sphärischen Hohlspiegel

$$\theta = \beta - \alpha = \alpha - \gamma$$

Betrachte nur achsnenahe Lichtstraheln (paraxiale Näherung)

$$\gamma \approx \tan \gamma \approx \frac{h}{g}, \qquad \alpha = \frac{h}{r}, \qquad \beta = \frac{h}{b}$$
$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} =: \frac{1}{f}$$

Abbildung gleich für sphärischen Spiegel

- f heißt Brennweite  $f = \frac{r}{2}$
- Abbildunggleichung gilt auch für einen konvexen Spiegel
- Abbildung nur in paraxialer Näherung (sonst Abbildungsfehler)



Abbildung 1.21: Abbildung an einem sphärischen Spiegel

## 1.6.4.2 Abbildung durch eine brechende Kugelfläche



Abbildung 1.22: Abbildung durch eine brechende Kugelfläche

 $\theta_i = \gamma + \alpha, \ \theta_T = \alpha - \beta$  paraxiale Näherung

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_2$$

$$n_1 \theta_i = n_2 \theta_2$$

$$n_1 \theta_i = n_1 \left(\frac{h}{g} + \frac{h}{r}\right)$$

$$= n_2 \left(\frac{h}{r} - \frac{h}{b}\right)$$

$$\boxed{\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}}$$

Abbildung einer brechenden Kugelfläche

• 2 Brennweiten: paralleles Licht "von links":  $g \to \infty$   $b = f_B = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}$ paralleles Licht "von rechts"  $b \to \infty$   $g = f_G = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}$  • Schrittweise Anwendung erlaubt Berechnug komplizierter optischer Systeme; Vorzeichenkonvention!

Variable	> 0	< 0
g	G links von $S$	Gegenteil
$f_G$	$F_G$ links	
b	B rechts	
$f_B$	$F_B$ rechts	
r	M rechts	

### 1.6.4.3 Abbildungsgleichung für dünne Linse

Abstand d der Scheitelpunkte « Krümmungsradien  $r_i (d \approx 0)$ 

- 1. Grenzfläche:  $\frac{n_1}{g}+\frac{n_2}{b_1}=\frac{n_2-n_1}{r_1}$ 2. Grenzfläche:  $g_2=-b_1$

$$-\frac{n_2}{b_1} + \frac{n_3}{b} = \frac{n_3 - n_2}{r_2}$$

$$n_1 = n_3 \approx 1, \qquad n = n_2$$
  
 $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) =: \frac{1}{f}$ 

gleiche Brennweite  $f = f_G = f_B$ 

 $GAUSS's che \ Linsenformel, \ oder \ auch \ "Linsenschleiferformel"$ 

$$\begin{array}{l} \frac{1}{f} = & \text{Brechkraft} \\ \left\lfloor \frac{1}{f} \right\rfloor = & 1 \text{dpt} = \frac{1}{m} \end{array}$$

### 1.6.4.4 Bildkonstruktion für ausgedehnten Gegenstand

Bsp.: Sammellinse Betrachte 3 ausgewählte Strahlen:



Abbildung 1.23: Bildkonstruktion eines ausgedehnten Körpers durch eine dünne Sammellinse

- 1. achsenparallel  $\rightarrow F_B$ ,
- 2. Brechstrahl  $\rightarrow \parallel$ ,
- 3. Zentralstrahl

(Transversale) Vergrößerung

$$V = \frac{\bar{B}}{\bar{G}} = -\frac{b}{g} = \frac{f}{f-g}$$

53

Analoges Vorgehen für Zerstreuungslinsen (f < 0), Spiegel oder brechende Grenzflächen

#### 1.6.4.5 Dicke Linsen und Linsensysteme

## a) Dicke Linsen:

Abstanddder Scheitelpunkte nicht mehr vernachlässigbar gegenüber r,g,b

Abbildung ähnlich beschreibbar, wie für dünne Linsen

 $\rightarrow$  Führe <br/>  $\underline{2}$  Hauptebenen  $(H_1$  und<br/>  $H_2)$  senkrecht zur optischen Achse ein

Es gibt die Abbildungsgleichung:  $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ 

wobei g (bzw. b und f) gegnüber den Hauptebenen  $H_1$  und  $H_2$  gemessen werden  $f = f_B = f_G$ , falls gleicher Brechungsindex.

Bildkonstruktion analog zu dünnen Linsen; Lichtstrahlen parallel zur optischen Achse zwischen  $H_1$  und



Abbildung 1.24: Bildkonstruktion eines ausgedehnten Körpers an einer dicken Linse

 $H_2$ . Man kann ziegen:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{(n-1)d}{nr_1r_2} \right]$$
$$h_1 = -\frac{(n-1)fd}{nr_2}; \qquad h_2 = -\frac{(n-1)fd}{nr_1}$$

#### b) Linsensysteme

Kombination von dünnen Linsen im Abstand d. Man kann ziegen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$
$$h_1 = \frac{fd}{f_2}; \qquad h_2 = \frac{fd}{f_1}$$

Grenzfall  $d \to 0$ 

Die Brechkräfte zweier nahe benachbarte auf die gleiche Achse zentrierter Linsen addieren sich.

### 1.6.5 Abbildungsfehler und Aberrationen

bisher:	optische Abbildungen ideal
real:	immer fehlerbehaftet!
Aberrationen von Idealität:	Aberrationen

### 1.6.5.1 Chromatische Aberrationen

Dispersion von n

$$D(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} = (n(\lambda) - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

für Linse:  $f_{\text{blau}} < f_{\text{rot}}$  und damit  $b_{\text{blau}} \neq b_{\text{rot}}$  Abhilfe: Kombination mehrerer Linsen mit verschiedenen  $n(\lambda) \rightarrow \text{Achromat}$ 

### 1.6.5.2 Monochromatische Aberrationen

- für Einfalls- bzw. Ausfallswinkel  $\theta_i \neq \sin \theta_i$
- spährische Aberration
- Brechung an ebenen Grenzflächen  $\rightarrow$  Deckglas-Korrektur von Objektiven
- Koma-Fehler
- Astigmatismus

beides Fehler, bei denen  $\theta_i$  groß ist zum Astigmatismus:

### <u>Unterschiede</u>

- der Einfallswinkel in x- bzw- y-Ebene
- Krümmung der optischen Oberfläche

zur Behebung am menschlichen Auge:  $\Rightarrow$  Kombination aus sphärischer und Zylinder-Linse

## 1.7 Instrumente der geometrischen Optik

## 1.7.1 Projektionsapparat



Abbildung 1.25: Schematische Darstellung des Strahlengangs in einem Projektionsapperat. Während bei der Strahlführung durch das Objektiv allein aufgrund der kleinen Glühwendel nur der zentrale Teil des Dias hell ausgeleuchtet wird (a), kann durch die Verwendung eines passenden Kondensors, der das Bild der Glühwendel in das Objektiv legt, eine vollständige Ausleuchtung des Dias erreicht werden (b). (aus [Zth] S. 114)



Abbildung 1.26: Schematische Darstellung einer fotograchischen Kamera mit wesentlichen optischen Funktionselementen Objektiv, Blende, Verschluss und Film. Bei einer modernen Kamera wird durch den Ersatz elektronischer Bauelemente eine optimale Steuerung der Belichtung erreicht. Anstelle des Films wird oft ein CCD-Chip als Bildsensor verwendet. (aus [Zth] S. 115)

### 1.7.2 Fotografische Kamera

- selbsleutender Gegenstand
- Bild auf Filmebene
   → photochemische Reaktion; Halbleiter-Lichtempfänger-Chip

### Funktionalität einer Kamera:

- scharfes Bild Gegenstand  $\rightarrow$  Folmebene
- Anpassung der Hellligkeit des Bildes wegen der Fil-Empfindlichkeit Beispiel: g von 1m... $\infty$ ; f = 50mm zusammen: b = 52,6mm...50mm transversale Vergrößerung:

$$V_T = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \approx \frac{f}{g}$$

• Teleobjektive: große Brennweite, kompakte Bauform ?

### 1.7.3 Menschliches Auge

- Detektor: lichtempfindliche Netzhaut (Retina)
- Scharfstellung des Bildes: Variation der Brennweite f der Kristalllinse
- scharfes Sehen: b = 15cm... $\infty$
- Helligkeitsregelung: Iris, Änderung des Durchmessers 1,5...8mm in 1sec
- konventionelle Schweite:  $S_n = 25$ cm



Abbildung 1.27: Schematischer Aufbau des menschlichen Auges (aus [Zth] S. 119)



Abbildung 1.28: Normal- und Falschsichtigkeit des Menschlichen Auges (aus [Zth] S. 119)

## 1.7.4 Vergrößernde optische Instrumente

Definition: Vergrößerung:

• Gegenstandsweite g fest (z.B. Mond)

$$V = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}} = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_0}$$

• g beliebig:

$$V = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel im Abstand } S_0} \qquad S_0 = 25 \text{cm}$$

## 1.7.4.1 Lupe

$$V_{\text{Lupe}} = \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_0} = \frac{S_0}{f_L} = \frac{25\text{cm}}{f_L}$$

#### 1.7.4.2 Mikroskop

- kurzbrennwertiges Objektiv  $(f_{Ob})$  $\rightarrow$  reelles, vergrößertes Bild Gegenstand
- Okular (Lupe) mit  $f_{Ob} \rightarrow$  vergrößertes Bild

$$|V_{Ob}| = \frac{b}{g} = b\left(\frac{1}{f_{Ob}} - \frac{1}{b}\right) = \frac{b - f_{Ob}}{f_{Ob}} = \frac{t}{f_{Ob}}$$

t = Tubuslänge  $b - f_{Ob}$ , typisch 160mm

$$V_{mik} = V_{Ob} V_{Ok} = \frac{tS_0}{f_{Ob} f_{Ok}} < 2000$$

### 1.7.4.3 Fernrohr

• astronomisches bzw. KEPPLER'schs Fernrohr:

$$V_{\text{Fernrohr}} = \frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_0} = \frac{f_{Ob}}{f_{Ok}}$$

- $\rightarrow$ ausgedehnte Bauform plus Bild steht kopf
- terrestrisches Fernrohrs

## 1.8 Interferenz

- Überlagerung von Wellen
- Überhöhung bzw. Abschwächung der Feldamplitude bzw. Intensität

### 1.8.1 Interferenz zweier Punktquellen

## Beispiel:

2 identische Quellen für Kugelwellen, die in Phase emittieren und die jeweiles am Ort  $-x_0$  bzw.  $+x_0$  im Koordinatensystem sitzen und die gleiche Amplitude haben.

$$E_g(x=0) = E_1 + E_2 = \frac{A}{x_0} e^{i\omega t - ikx_0} + \frac{A}{x_0} e^{i\omega t - ikx_0}$$
$$I_g(x=0) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 nc < |E_1 + E_2|^2 > = \varepsilon nd \frac{2A^2}{x_0^2} = f \frac{1}{2}\varepsilon_0 nd < |E_1^2| > = 4I_1$$

 $\rightarrow$  konstruktive Interferenz

 $\Delta x = \frac{\lambda}{4}$ : Phasenunterschied gleich  $\pi$ 2 Quellen in Phase bei f typisch 500THz

#### 1.8.2 Michelson-Interferrometer

- Interferenzen durch Aufspalten der Wellenamplitude
- teildurchlässiger Spiegel (R = 50%, T = 50%)  $\rightarrow$  Strahlteiler
- z.B. dünne Metallschicht oder siehe (1.8.3)

### Beispiel für Anwendung:

• genaue Längenmessung; physikalischer Längenstandard



Abbildung 1.29: Michelson-Interferometer

- Meter: Vielfaches der Wellenlänge $\lambda_{\scriptscriptstyle \mathrm{Cd}}$ der roten Cadmium-Spektrallinie
- Anzahl N von Hell-Dunkel-Durchgängen  $\rightarrow$  Verschiebungsstrecke D  $D = \frac{N\lambda_{Cd}}{2}$

hier: He/Ne-Laser mit $\lambda=632,8\mathrm{nm};$ Präzision $\approx\frac{\lambda}{10}$ 

## 1.8.3 Interferenzen dünner Schichten

- Reflexion an Vorder- und Rückseite der dünnen Schicht
- Zweistrahl-Interferenz: Rklein z.B.  $n_f\approx 1,5,\,n_{1,2}=1\Rightarrow R\approx 4\%$
- Minima und Maxima einer Interferenzfigur gemäß Phasenverschiebung  $\delta$  bei Reflexion bzw. geometrischen Gangunterschied

#### 1.8.3.1 Inteferenzen gleicher Neigung



Bedingung für konstruktive Interferenz:

$$2n_f d\cos\theta_f = \left(m + \frac{\Delta\Phi}{2\pi}\right)\lambda$$
 für  $n = 0, 1, 2, \dots$ 

beachte: Phasensprung um  $\pi$ bei Reflexion am dichteren Medium

$$\Rightarrow \Delta \Phi = \begin{cases} \pi & \text{für } n_f < n_1, n_f < n_2 \\ -\pi & \text{für } n_f > n_1, n_f > n_2 \\ 0 & \text{für } n_1 < n_f < n_2 \\ 0 & \text{für } n_1 > n_f > n_2 \end{cases}$$

### 1.8.3.2 Interferenzen gleicher Dicke

- Variation der optischen Dicke  $n_f d$
- Beispiel: Ölfilm  $(n_f \approx 1,5)$  auf Wasser  $(n_2 = 1,33)$
- konstruktive Interferenz bei $\frac{2n_fd}{\lambda} = \left(m + \frac{1}{2}\right)$ mit $m \in \mathbb{Z}$

## 1.8.3.3 Dielektrische Schichten

- Spezialfall: gleiche Feldstärke für reflektiertes Licht an Vorder- und Rückseite
- Anwendung 1: Vergütung von Glasoptiken: Anti-Reflexbeschichtung Auftreten destruktiver Interferenz:  $2n_f d = \frac{1}{2}\lambda$ optische Schichtdicke:  $n_f d = \frac{\lambda}{4}$ , " $\frac{\lambda}{4}$ -Schicht "

$$n_f = \sqrt{n_1 n_2}$$

- Anwendung 2: Herstellung hochreflektierender Spiegel  $\rightarrow$  paarweise Doppelschichten aus hochbrechenden  $(n_h)$  und niederbrechenden  $(n_n)$  Material  $\rightarrow$  beide Schichten: optische Dicke  $n_h d_h = n_n d_n = \frac{\lambda}{4}$ 
  - $\to$ optischer Gangunterschied je  $\frac{\lambda}{2}$  + einmal Phasensprung um  $\Delta\Phi=\pi$  damit ergibt sich ein Gangunterschied  $\lambda$



Veruch: Interferenz an Glimmerplatte

### 1.8.4 Vielfachinterferenzen

- bisher: nur Interferenzen zweier Strahlen  $\Rightarrow$ kosinusförmige Interferenzstruktur
- jetzt: Vielfach-Interferenz
   ⇒ scharfe Modulationen
   ⇒ wichtiges Hilfsmittel f
  ür hochauflösende Spektroskopie
- Beispiel: FABRY-PEROT-Interferometer

planparallele Platte(n)

begrenzt durch zwei hochreflektierende Schichten

- ideales Interferometer: nehme Verluste als vernachlässigbar an
- FABRY-PEROT: Dicke d, Brechungsindex  $n_f$ , Schichten identische Reflexion, in Medium mit Brechungsindex  $n_a$

E-Amplituden-Reflexions bzw. -Transmissionskoeffizient: r,tvorne und r',t'hinten es gilt:  $t\cdot t'=1-r^2$  und r'=-r

$$\begin{split} E_0 &= E_{1r} + E_{2r} + E_{3r} \dots \\ &= E_o r + E_0 t r' t' e^{i\delta} + e_0 t r' r' r' t' e^{2i\delta} + \dots \\ &= e_0 \left( r + r' t t' e^{i\delta} \left[ 1 + r'^2 e^{i\delta} + \left( r'^2 e^{i\delta} \right)^2 + \dots \right] \right) \\ &= \left| r'^2 e^{i\delta} \right| < 1 \qquad \Rightarrow \text{geometrische Reihe} \\ &\Rightarrow E_r = E_0 \left( r + \frac{r' t t' e^{i\delta}}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \right) \\ &E_r = E_0 \frac{r(1 - e^{i\delta}}{1 - r^2 e^{i\delta}} \\ &I_R = I_0 \frac{2r^2 (1 - \cos \delta)}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta} = I_0 \frac{F \sin^2 \left(\frac{\delta}{2}\right)}{1 + F \sin^2 \left(\frac{\delta}{2}\right)} \\ &\text{mit } F = \left( \frac{2r}{1 - r^2} \right)^2 = \frac{4R}{(1 - R)^2} \\ &\text{Phase: } \delta = \frac{4\pi n_f d}{\lambda} \cos \theta_f \end{split}$$

Transission:

$$I_T = I_0 - I_R = I_0 \underbrace{\frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}}_{\text{Airv-Funktion}}$$

Lage der Transmissions-Maxima

$$2n_f d\cos\theta_f = m\lambda, \qquad m = 1, 2, \dots$$

61

- Verlauf von  $I_T$  in der Nähe der Interferenz-Maxima: LORENZ-förmig
- volle Halbwertsbreite $\Delta\delta$

$$\tilde{F} = \frac{\text{Abstand benachbarter Maxima}}{\text{Breite eines Maximums}}$$
$$\frac{2\pi\sqrt{F}}{2\pi\sqrt{F}} = \frac{\pi\sqrt{R}}{\pi\sqrt{R}}$$

 $\Delta \delta = \frac{4}{\sqrt{n}}$ 

$$=\frac{2\pi\sqrt{F}}{4}=\frac{\pi\sqrt{R}}{(1-R)}$$

Anwendung:

- Schmalbandiges Filter für Licht
- durch stimmbar über Variation von  $\delta$

$$\tilde{E} \sim \int_{\sigma} \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y' e^{i(k_x x' + k_y y')} \cdot T(x', y')$$

## 1.8.5 Kohärenz und Wellengruppen

Es gibt keine ebenen, monochromatischen Wellen Sie sind Idealisierungen für Wellengruppen (die nach FOURIER aus der Superpositionen ebener monochromatischer Wellen bestehen).

## A) Zeitlich begrenzter Wellenzug



$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r_0}} = \begin{cases} E_0 \cos \omega_0 t & \text{für} \quad -T \le t \le T\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Näherung: sprunghaftes Ein / Ausschalten

Er enthält beliebige Frequenzen, d.h. Beiträge (gemäß FT):

$$\tilde{\mathbf{E}}(r_0,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, e^{-i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}_0,t)$$

$$E_0 \int_T^T \mathrm{d}t \, e^{-i\omega t} \, \cos \omega_0 t$$

$$\stackrel{(*)}{=} E_0 \int_{-T}^T \mathrm{d}t \, \cos \omega t \, \cos \omega_0 t$$

$$= \frac{1}{2} E_0 \int_{-T}^T \mathrm{d}t \, \cos(\omega + \omega_0)t + \cos(\omega - \omega_0)t$$

(\*) E(t) symmetrisch;  $e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$ 

$$\Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{E}}(r_0,\omega) = T E_0 \left\{ \frac{\sin(\omega + \omega_0) T}{(\omega + \omega_0) T} + \frac{\sin(\omega - \omega_0) T}{(\omega - \omega_0) T} \right\} \neq 0$$

wobei:



 $\Rightarrow$  Frequenzbandbreite  $\Delta \omega = \frac{2\pi}{T}$ 

Beiträge  $\tilde{\mathbf{E}}$  aus Frequenzband der Bandbreite  $\Delta \omega = \frac{2\pi}{T}$  dominieren in Spektrum  $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$  des Pulses  $\mathbf{E}(t)$ (mit endlicher Dauer!). Der Wellenzug kann zur monochromatischen Welle idealisiert werden nur für Beobachtungszeitfenster  $\Delta t \ll T$ .

Dann ist der Unterschied  $|\omega - \omega_0| \approx \Delta \omega = \frac{2\pi}{T}$  nicht messbar weil

$$e^{i\omega\Delta t} = e^{i\omega_0\Delta t} \underbrace{e^{i\Delta\omega\Delta t}}_{\approx 1}$$

da  $\Delta \omega \Delta t = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \ll 1$ Welche Frequenz $\omega$ aus dem Frequenzband  $\omega = \omega_0 \pm \Delta \frac{\omega}{2}$ gemessen werden, hängt vom Messgerät ab.

Alle Lichtquellen besitzen eine natürliche Linienbreite  $\Delta \omega$ . (Angeregtes  $e^-$  im isolierten Atomen  $T \approx 10^{-8}$  typisch; Moleküle in Lampe bei hoher Temp durch Stöße und Bewegung (Dopplerverbreitung) haben kleinere T; auch LASER)

- $\Rightarrow$
- $\Rightarrow$
- Es gibt Bandbreite  $\Delta \nu = \frac{\Delta \omega}{2\pi}$ Es gibt Kohärenz<br/>zeit  $\Delta t_c = \frac{1}{\Delta \nu}$ Es gibt Kohärenzlänge  $\Delta x_c = c \, \Delta t_c$  $\Rightarrow$

(wegen der Dispersionsrelation  $\omega = ck$  von Licht im Vakuum)

 $\Delta x_c$  entspricht der Länge im Raum, über die die Welle monochromatisch mit festen Phasenbeziehungen läuft.

### B) Räumlich begrenzter Wellenzug



$$\mathbf{E}(x,t=t_0) = \begin{cases} E_0 \cos k_0 x & \text{für } -L \le x \le L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

analog zu A) 
$$\mathbf{E}(x,t_0) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} e^{-ikx} \tilde{\mathbf{E}}(k,t_0)$$
  
mit  $\tilde{\mathbf{E}}(k,t_0) = E_0 L \left\{ \frac{\sin(k+k_0) L}{(k+k_0) L} + k_0 \to -k_0 \right\}$ 



Moden verteilt in Raumbreite  $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$  um  $\pm k_0$ 

## C) allgemeine Wellengruppe (Wellenpaket, Signal):

Nach FOURIER jedes Feldes E lässt sich schreiben als

$$E(\mathbf{r},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \,\tilde{E}(\mathbf{k},t) \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

(Superposition / Überlagerung ebener Wellen.)

Wobei aus den Lösungen der MAXWELL-Gleichungen und den Material Gleichungen die Dispersionsrelation  $\omega = \omega(k)$  folgt. Somit ist:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{k}) \cdot e^{i\omega(\mathbf{k})t}$$

(mit  $\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{k})$  transversal typischerweise)

 $\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r},t)$  ist Superposition von ebenen, monochromatischen Wellen mit **Phasengeschwindigkeit**:

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{k}) = \frac{\omega}{k}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \int \frac{\mathrm{d}^{3}k}{(2\pi)^{3}} \underbrace{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{i\omega(\mathbf{k})t}}_{\text{eben, monochromatisch}} \tilde{\mathbf{E}}_{0}(k)$$

und

$$\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{k}) = \int \mathrm{d}^3 r e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} E(\mathbf{r}, t=0)$$

ist die Gewichtungsfunktion (d.h. Amplitude) Energie<br/>erhaltung  $(u_{el} \sim \frac{\varepsilon_0}{2} |E|^2) \rightarrow \text{Normierung}$ 

Zunächst führt man eine Normierung durch, die bedeutet, dass der Energiegehalt der Welle normiert ist:

$$\underbrace{\int \mathrm{d}^3 r \left| E(\mathbf{r},t) \right|^2}_{\text{Gesamtenergie der Welle}} = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \underbrace{\left| \tilde{E}(\mathbf{k},t) \right|^2}_{\text{zeitunabhängig}} \doteq 1 = \int \frac{\mathrm{d}^3 r}{(2\pi)^3} \left| \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{k}) \right|^2$$

(mit PARSEVAL)

Im Weiteren gehen wir zur Vereinfachung davon aus, dass  $\left|\tilde{E}(\mathbf{k})\right|^2$  bei  $\mathbf{k}_0$  scharf "gepeakt" sei. Dann kann man nämlich die Dispersionsrelation TAYLOR-entwickeln und erhält:

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_0) + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \left. \frac{\partial}{\partial k} \omega(\mathbf{k}) \right|_{\mathbf{k}_0} + \cdots$$
$$=: \omega_0 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{v}_G^0 + \dots$$

mit der Gruppengeschwindigkeit:

$$\mathbf{v}_G = rac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \qquad \mathbf{v}_G^0 = rac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \omega(\mathbf{k})|_{\mathbf{k}_0}$$

$$\Rightarrow E(\mathbf{r},t) \doteq \int \frac{\mathrm{d}^{3}k}{(2\pi)^{3}} \tilde{E}(\mathbf{k}) \cdot e^{i(\omega_{0}t - \mathbf{k}_{0} \cdot \mathbf{r})} e^{i(\mathbf{v}_{G}^{0}t - \mathbf{r})(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{0})}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_{0} e^{i(\omega_{0}t - \mathbf{k}_{0} \cdot \mathbf{r})} \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}^{3}q}{(2\pi)^{3}} \tilde{E}(\mathbf{k}_{0} + \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{v}_{G}^{0}t - \mathbf{r})}}_{*}$$

$$= \underbrace{e^{i(\omega_{0}t - \mathbf{k}_{0} \cdot \mathbf{r})}}_{**} \cdot E^{\mathrm{mod}}(\mathbf{v}_{G}^{0}t - \mathbf{r})$$

\* ist die FOURIERrücktransformation  $\mathrm{FT}^{-1}[\ldots](\mathbf{v}_G^0 t - \mathbf{r})$ , d.h. die Modulationsfunktion, die sich mit der Gruppengeschwindigkeit bewegt. (Der Schwerpunkt der Welle wandert mit der Gruppengeschwindigkeit) \*\* beschreibt eine ebene monochromatische Welle.



Im Fall von Dispersion gilt:  $v_G = \frac{\partial \omega}{\partial k} \neq v_p = \frac{\omega}{k}$ . Eine mit  $\mathbf{v}_G t$  sich bewegende Wellengruppe.

#### **Bemerkungen:**

• Im eindimensionalen Fall ( $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{x}}$ ), ohne Dispersion ist  $\omega = c|k|$  und

$$\tilde{E}(k) = \int \mathrm{d}x e^{ikx} (\psi_0 \mp \frac{i}{ck} v_0)$$

führt zurück zu D'ALEMBERT aus §1.1.2 (A)

• Inkohärentes Licht besteht aus einer Superposition von Wellengruppen, die keine festen Phasenbeziehungen zueinander haben.

### D) Kohärenz (Interferenzfähigkeit)

Am Beispiel von zwei Wellengruppen Interferenzfähigkeit dieser zwei Wellengrupen?

mit  $\omega_1 = \omega_2 = 10^{15} \mathrm{s}^{-1}$ ,  $\Delta t_c \approx 10^{-8} \mathrm{s}$ ;  $\Delta x_c \approx 3 \mathrm{m} \approx 10^7 \lambda$  im Detektor wird die zeitlich gemittelte Intensität gemessen

$$\langle I \rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{0}^{\prime} \mathrm{d}t I = \langle |E_1 + E_2|^2 \rangle_{\tau} = \langle |E_1|^2 \rangle_{\tau} + \langle |E_2|^2 \rangle_{\tau} + \langle E_1 E_2^* + E_1^* E_2 \rangle_{\tau}$$

mit  $E_1 \sim e^{i\varphi_1}$  und  $E_2 \sim e^{i\varphi_2}$  und  $\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ 

=

$$\Rightarrow \qquad \langle I \rangle_{\tau} = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \Delta \varphi \rangle_{\tau}$$

(longitodinal) kohärent bedeutet  $\langle \cos \Delta \varphi \rangle_{\tau} \neq$ inkohärent bedeutet  $\langle \cos \Delta \varphi \rangle_{\tau} = 0$ 

Wenn  $\Delta \varphi = \Delta \varphi(t)$  eine Funktion der Zeit ist, gibt  $\langle \cos \Delta \varphi \rangle = 0$ ; Kohärenzzeit mit  $\Delta t_c \gg \tau$  erlaubt uns  $\varphi_1(t) = \varphi_1, \varphi_2(t) = \varphi_2$  zu setzten  $\Rightarrow \Delta \varphi = \text{const.}$  und es gibt einen Beitrag  $\Rightarrow$  Definition für longitudinal kohärent für  $\Delta t_c \gg \tau$ , inkohärent  $\Delta t_c \ll \tau$ 

Transversale Kohärenz bei einer ausgedehnten Lichtquelle. Transversale Kohärenz besteht, wenn die Gangunterschiede der Strahlen aus verschiedenen Punkten der ausgedehnten Lichtquelle nicht zu groß sind ( $< \lambda$ )

 $\Delta R'_1$  ist Licht von  $\mathbf{r}'_1$  und  $\Delta R_2$  ist Licht von  $\mathbf{r}_{2'}$ 

$$\Delta R_{1'} = R_{11'} - R_{21'} = |\mathbf{r} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1'| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1'|$$
  
$$\Delta R_2 = R_{12'} - R_{22'} = |\mathbf{r} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1'| - |\mathbf{r} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2'|$$

transversale Kohärenz:  $\Delta R_1 - \Delta R_2 \leq \lambda$ Taylor: für $r \gg d,d'$ 

$$\Delta R_1 - \Delta R_2 \sim \frac{dd'}{r}$$
$$\boxed{dd' \ll \lambda \nu}$$

Koherenzbedingung

Quelle erscheint unter dem Winkel  $\alpha' = \frac{d'}{r}$ 

$$d < \frac{\lambda}{\alpha'}$$

B<br/>sp.: Sonne:  $\alpha'=32^\circ$  und  $\lambda=5\cdot 10^{-7} \mathrm{m},\, d<0,1 cm$ 

# 1.9 Mathematischer Einschub: Green'sche Funktionen

## 1.9.0 Motivation

Ziel:

- Ableitung des HUYGEN'schen Prinzips aus Wellengleichung
- Technik um inhomogene DGL zu lösen ( $\rightarrow$  Feldtheorie im Hauptstudium)

Aufgabe: inhomogene Wellengleichung lösen (Quellen)

Frage: Ursache-Wirkungsprinzip suche  $\mathbf{E}(t)$  und  $\mathbf{B}(t)$  für  $\rho(t')$  und  $\mathbf{j}(t')$  zu früheren Zeiten (t' < t).

### 1.9.1 Die inhomogenen Wellengleichungen

Im Vakuum seien monochromatische  $\rho$  und **j** gegeben:

$$\begin{split} \varrho &= \operatorname{Re}\left\{\tilde{\varrho}(\mathbf{r})e^{i\omega t}\right\}\\ \mathbf{j} &= \operatorname{Re}\left\{\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}\right\} \end{split}$$

betrachte immer nur den Realteil, ohne ihn zu schreiben:

(1.6) 
$$\nabla \times \tilde{\mathbf{B}} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{i\omega}{c^2} \mathbf{E}$$
  
 $\nabla \times (...) = -\nabla^2 \tilde{\mathbf{B}}$   
 $= \mu_0 \nabla \times \tilde{\mathbf{j}} + \frac{i\omega}{c^2} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}$   
 $\stackrel{(1.2)}{=} \mu_0 \nabla \times \tilde{\mathbf{j}} + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{B}}$ 

$$\Rightarrow \qquad \left[ \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega) = -\mu_0 \nabla \times \tilde{\mathbf{j}}$$
(1.22a)

analog:

$$\Rightarrow \left[ \left[ \nabla^2 + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right] \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = i \omega \mu_0 \left[ \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{c^2}{\omega^2} \nabla \left( \nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) \right) \right] \right]$$
(1.22b)

Die erzeugten (ausgestrahlten) Felder genügen den (FOURIERtransformierten) inhomogenen Wellengleichungen ("*Helmholtz-Gleichungen*") mit Quellen, die durch die Ströme  $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},\omega)$  gegeben sind.

### 1.9.2 Die Green'sche Funktion der Helmholtzgleichung

Gesucht ist die spezielle Lösung der skalaren inhomogenen Helmholtzgleichung:

$$\left[\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right]\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \tilde{s}(\mathbf{r})$$
(1.23a)

mit geeigneten Randbedingungen. Sie sollen durch:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \int d^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{s}(\mathbf{r}')$$
(1.23b)

gegeben sein.

### $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ heißt *Green'sche Funktion*.

Lösung durch FOURIERtransformation von Gleichung (1.23):

$$\int d^3 r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad \Rightarrow \left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right)\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \tilde{\tilde{s}}(\mathbf{k}) = \int d^3 r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\tilde{s}(\mathbf{r})$$

Damit ist die Gleichung gelöst, und wir führen eine FOURIERrücktransformation durch:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2} \int \mathrm{d}^3 r' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \tilde{s}(\mathbf{r}')$$

Für absolut integrable Funktionen darf man nun das Integral vertauschen und erhält:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \int d^3 r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tilde{s}(\mathbf{r}') \tag{i}$$

mit 
$$G(\varrho = \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\,\varrho}}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2}$$
 (*ii*)

#### Bemerkungen:

• Dasselbe Ergebnis folgt als Lösung der Gleichung mit Dirac- $\delta :$ 

$$\left(\nabla_r^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

weil  $\operatorname{FT}[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')](\mathbf{k}) = \int d^3 r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}$ Diese Gleichung wird häufig als Abkürzung verwendet.

• Zur speziellen Lösung (*i*) kann natürlich eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung addiert werden:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \underbrace{A'e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}_{=*} + \int d^3r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\tilde{s}(\mathbf{r}')$$

\* ist dabei die Lösung der homogenen HELMHOLTZ-gleichung, weil für  $\omega = kc$ :

$$\left[\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right]e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 0$$

• eine andere Lösung ist:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \frac{B_+}{4\pi r} e^{i\frac{\omega}{c}r} + \frac{B_-}{4\pi r} e^{-i\frac{\omega}{c}r} + \int d^3r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\tilde{s}(\mathbf{r}')$$

also eine Superposition einer einlaufenden  $(B_+...)$  und einer auslaufenden  $(B_-...)$  Welle. wegen (1.1.2)

$$\left(\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \frac{1}{r} e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} = \frac{1}{r} \left(\partial_r^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} = 0$$

Die Koeffizienten  $A_{\pm}$  und  $B_{\pm}$  der möglichen homogenen Lösungen müssen durch Randbedingungen festgelegt werden.

### Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung:

Die spezielle Lösung  $\tilde{\psi}_s$  (und damit die GREEN'sche Funktion  $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ ) muss im weiten Abstand von der Quelle eine Kugelwelle werden und damit Folgendes erfüllen:

$$r\left(\frac{\partial}{\partial r}G(\mathbf{r},\mathbf{r}') + i\frac{\omega}{c}G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right) \xrightarrow{r \to \infty} 0$$
(*iii*)

Dann strahlen die Wellen nach außen (Kausalitätsprinzip ist erfüllt). **Probe:** 

$$r\left(\partial_r + i\frac{\omega}{c}\right)\frac{B_{\pm}}{r}e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} = \left(\pm i\frac{\omega}{c} + i\frac{\omega}{c} - \frac{1}{r}\right)B_{\pm}e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

geht nur gegen Null, wenn keine einfallende Welle auftritt (also für  $B_+ = 0$  und  $B_- \neq 0$ )

**Behauptung:**  $G(\rho)$  aus Gleichung (\*) ist eine auslaufende Kugelwelle: Mit  $\rho = |\rho| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  gilt:

$$\Rightarrow G(\varrho = \mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi\varrho} e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho}$$
$$= -\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-\frac{i\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- Beweis mit CAUCHY'schen Residuenzsatz
- Alternativ durch Einsetzten in FT

$$\int d^3 \varrho e^{-i\mathbf{k}\,\varrho} \, G(\varrho) \qquad \text{Kugelkoordinaten:}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty d\varrho \,\varrho^2 \,\int_{-1}^1 d\mu \, e^{-ik\varrho\mu} \frac{-1}{4\pi\varrho} e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho}$$
$$\mu = \cos \triangleleft \mathbf{k}, \varrho$$
$$= \frac{i}{2k} \int_0^\infty d\varrho \, e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho} \left( e^{ik\varrho} - e^{-ik\varrho} \right)$$

Achtung: Integral konvergiert nicht für  $\rho \to \infty$ ! trotzdem naiv weiter rechnen!

$$=\frac{i}{2k}\left(\frac{1}{i\left(\frac{\omega}{c}-k\right)}-\frac{1}{i\left(\frac{\omega}{c}+k\right)}\right)=\frac{1}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k^2}$$

Bleibt zu klären, wie  $e^{-i\left(\frac{\omega}{c}\pm k\right)\varrho} \xrightarrow{\rho\to\infty} 0$  begründet werden kann.

Zurück zur inhomogenen Wellengleichung:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right]\psi(\mathbf{r},t) = s(\mathbf{r},t)$$

Wir wollen  $\psi = 0$  solange s = 0 (noch ausgeschaltet). Dann soll  $\psi$  langsam anwachsen.  $s(\mathbf{r},t) = \tilde{s}(r)e^{i\omega t}e^{\varepsilon t}$  ist eine Quelle, die erfüllt 1.  $s \xrightarrow{t \to -\infty} 0$  und 2. für  $\varepsilon \to 0$  ist sie monochromatisch

Diese "adiabatisch eingeschaltete" Quelle muss postuliert werden, um ein langsames Anwachsen von  $\psi$  zu garantieren und somit um Kausalität zu genügen. Damit erhalten alle Frequenzen  $\omega$  einen infinitesimalen negativen Imaginärteil

 $s(t) = \tilde{s}e^{i(\omega - i\varepsilon)t} \rightarrow ab$  jetzt wird immer  $\omega - i\varepsilon$  gemeint, wenn  $\omega$  geschrieben wird! damit gilt:

$$e^{-i\left(\frac{\omega-i\varepsilon}{c}\pm k\right)\varrho} \stackrel{\varrho\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

### Fazit:

Die GREEN'sche Funktion, die (*ii*) und (*iii*) erfüllt ist lautet:

$$G(|\varrho| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\frac{1}{4\pi\varrho} e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho}$$
(*iv*)

Und die spezielle Lösung lautet:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r},\omega) = \frac{-1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-\frac{i\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tilde{s}(\mathbf{r}',\omega)$$
(v)

Bemerkungen:

- Die Kausalität ist für  $\omega \to \omega i\varepsilon$  erfüllt.
- Symmetrie (Reziprozität):

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}',\mathbf{r})$$

(entspricht NEWTON'sches actio = reactio)

• Für translationsinvariante (homogene) Systeme gilt:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

• Für rotationssymmetrische (isotrope) Systeme gilt sogar:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$$

• G hängt von den Randbedingungen ab (hier wurde die "natürliche" verwendet

### Fernfeldnäherung für lokalisierte Quellen

Falls  $\tilde{s}(\mathbf{r}') = 0$  für  $|\mathbf{r}'| > r_0$  (lokalisierte Quelle) und Abstand  $|\mathbf{r}|$  zur Quelle groß  $(r \gg r_0)$ 

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \\ &= r\sqrt{1 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} \\ &= r\sqrt{1 - 2\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}} \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{=} r\left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \frac{r'^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^2}{2r^2} + \dots\right) \end{aligned}$$

Notation:

 $\begin{array}{ll} \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} & \text{Bobachtungsrichtung} \\ \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} & \text{Wellenvektor} \\ \text{es gilt:} \end{array}$ 

$$e^{-\frac{i\omega}{c}\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} \stackrel{\text{Taylor in der Wurzel}}{=} e^{-\frac{i\omega}{c}\left[r-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}+\frac{r'^2-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')^2}{2r}+\ldots\right]} e^{-i\frac{\omega}{c}r+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'+\delta}$$

mit kleiner Korrektur

$$|\delta| < \frac{\omega}{c} \frac{r_0^2}{r} = 2\pi \frac{r_0^2}{r\lambda}$$

Es gilt dann (für  $\delta \xrightarrow{r \to \infty} 0$ )

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \xrightarrow{r \to \infty} \frac{-1}{4\pi r} e^{-\frac{i\omega}{c}r} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}$$

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r},\omega) \xrightarrow{r \gg \frac{r_0^2}{2}} \underbrace{\frac{-1}{4\pi r} e^{-i\frac{\omega}{c}r}}_{\text{auslaufende Kugelwelle} \text{ mit } \mathbf{k} \text{ modulierte Amplitude}} \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r' e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \tilde{s}(\mathbf{r}'\omega)}_{\text{mit } \mathbf{k} \text{ modulierte Amplitude}}$$

### 1.9.3 Randwertprobleme

Ohne Quelle kann  $\tilde{\psi}$  in einem Bereich auch durch Einstrahlung durch die Berandung erzeugt werden.  $\tilde{\psi}(\mathbf{r})$  kann im Halbraum z > 0 mit GREEN'scher Funktion aus Werten  $\psi_0(x',y',z'=0)$  bestimmt werden

Behauptung: Das Feld  $\tilde{\psi}$  das homogene HELMHOLZgleichung

$$\left[\bar{v}^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right]\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = 0 \qquad \text{für} \qquad z > 0 \tag{vi}$$

(und Ausstrahlbedingungen (iii) für z > 0 erfüllt) und für z = 0 vorgegebene Werte annimmt.

$$\tilde{\psi}(x,y,z=0) = \tilde{\psi}_0(x,y) \tag{vii}$$

ergibt sich mit GREEN'scher Funktion (iv) zu

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = -z \int \underbrace{\mathrm{d}x' \mathrm{d}y'}_{\mathrm{d}o'} \tilde{\psi}_0(x',y') \frac{\partial}{\partial z} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Big|_{z=0} \quad \text{für} \quad z \ge 0 \quad (viii)$$

**Beweis:** 

Weil die Gleichungen (vi) und (iii) erfüllt sind, ist nur (viii) zu zeigen, mit:

$$s = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

$$\varrho(z') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{s^2 + (z - z')^2}$$

$$\varrho = \varrho(z' = 0) = \sqrt{s^2 + z^2}$$
es folgt: 
$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial \varrho(z')} \frac{\partial \varrho(z')}{\partial z'} = \frac{z' - z}{\varrho(z')} \frac{\partial}{\partial \varrho}$$

$$\Rightarrow \tilde{\psi} = \int \frac{\mathrm{d}o'}{2\pi} \tilde{\psi}_0 \frac{-z}{\varrho} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{1}{\varrho} e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho}\right)$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}o'}{2\pi} \psi_0 z \frac{1 + i\frac{\omega}{c}\varrho}{\varrho^3} e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}s \, \tilde{\psi} e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho} \frac{zs \left(1 + \frac{i\omega}{c}\sqrt{z^2 + s^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{(z^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}}$$

 (in Polarkoordinaten) Nebenbetrachutung: für $z \rightarrow 0, s \rightarrow 0$ 

$$I(z) = \int_0^\infty ds \frac{zs}{(z^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^\infty ds \, i(s)$$

i(s) ist Darstellung von Dirac- $\delta$ :

$$I(z) \stackrel{u=\frac{s}{z}}{=} \int_0^\infty du \frac{u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = 1$$



Bemerkung: GREEN'sche Funktionen dienen zur Lösung von inhomogenen Problemen mit Randbedingungen und mit Anfangsbedingungen (physikalisch: Felder im Bereich bestimmt durch Quellen/Senken, Verluste/Einstrahlungen über die Oberfläche des Bereiches und durch die Anfangswerte der Felder)

## Fernfeldnäherung:

mit  $z = r \cos \vartheta \approx \rho \cos \vartheta$  und für  $r \gg \frac{d^2}{\lambda}$ :

$$\tilde{\psi} \stackrel{r \to \infty}{\longrightarrow} \frac{i\omega}{c} \cos \vartheta \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}r}}{r} \int_{\sigma} \frac{\mathrm{d}o'}{2\pi} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \psi_0(\mathbf{r}') \big|_z' = 0$$

# 1.10 Beugung



Abbildung 1.30: Beugung an einer Rechteckblende. Linke Seite: Normale Beleuchtungsbedingung. Rechte Seite: Stark überbelichtet (aus [Zth] S. 148)

## 1.10.1 Beugung von Wellen





Abbildung 1.31: Beugung an einer kreisförmigen Blende. Linke Seite: Normale Beleuchtungsbedingung. Rechte Seite: Stark überbelichtet (aus [Zth] S. 150)

Welle läuft auch in geometrischem Schatten (Welle wird abgelenkt), wenn  $d \gg \lambda$  verletzt ist.  $\Rightarrow$  Effekt wichtiger je größer  $\lambda$  (rot stärker als blau gebeugt). Erklärung mit Huygenschem Prinzip  $\rightarrow$  Feld als ob in Öffung viele in Phase schwingende Sender wären.

### 1.10.2 Kirchhoffsche Ableitung des Huygen'schen Prinzips



Gesucht: gebeugtes Licht, das durch beleuchtete Öffnung in Schirm erzeugt wird. ( $\doteq$  vorgegebenes  $E_0$ auf Fläche  $\sigma$  strahlt im Halbraum z > 0) Kirchhoff-Näherungen: Da die exakte Bestimmung des E-Feldes bei z = 0 schwierig ist.

- (i) Feld  $\widetilde{E}_0$  auf Öffnung  $\sigma$  sei einfallendes Feld  $E_I$  (ungestört durch Schirm !)
- (ii) Feld sonst bei z = 0 sei  $\tilde{E}_0 \equiv 0$
- (iii) Vektorcharakter von E vernachlässigt

(i)-(iii) sind im Widerspruch zu MAXWELLgleichungen und Materialgleichungen und können nur für Abstände vom Schirm  $>> \lambda$  stimmen.

 $d>>\lambda$ gefordert für Beugung:

$$\Rightarrow \text{ aus } (1.9.3) \qquad \qquad \widetilde{E}(\mathbf{r},\omega) = \frac{i}{\lambda} \int_{\sigma} \mathrm{d}o' \widetilde{E}(\mathbf{r}') \frac{\cos\theta}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-\frac{i\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

HUYGENS-FRESNEL: Die auf Öffnung  $\sigma$  fallende Welle pflanzt sich fort, als ob von jedem Punkt von  $\sigma$  eine Kugelwelle ausginge.

### Bemerkung:

- Integral gibt "FRESNEL'sche Beugung"
- Fernfeldnäherung und Annahme, dass  $E_I$  ebene Welle ergibt "FRAUENHOFER Beugung"
## 1.10.3 Fraunhofer-Beugung

Wir verwenden 2 Näherungen:

- Einfallendes Licht sei eben, die Lichtquelle sei weit entfernt, d.h.  $\tilde{E}_I = A \cdot e^{-i\frac{c}{\omega}\mathbf{n'r}}$
- Die Fernfeldnäherung:  $\delta = \frac{d^2}{r\lambda} \ll 1 \Rightarrow r \gg d$ , d.h. wir haben weite Abstände und kleine Öffnungen

$$\Rightarrow \qquad \tilde{E}(\mathbf{r},\omega) = A \cdot \frac{i\cos\vartheta}{\lambda r} \cdot e^{-i\frac{\omega}{c}r} \int_{\sigma} \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y' \, e^{i(k_x x' + k_y y')}$$

mit dem Wellenvektor  $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}(\mathbf{n} - \mathbf{n}')$ , der die Glieder  $k_x = \frac{\omega}{c}(n_x - n'_x)$  und  $k_y = \frac{\omega}{c}(n_y - n'_y)$  enthält.

<u>Fazit:</u> In FRAUNHOFER-Näherung ist das Beugungsbild die FOURIERtransformierte der Öffnung  $\sigma$ 

$$\tilde{E} \propto \int_{\sigma} \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y' \, e^{i(k_x x' + k_y y')} T(x', y')$$



Abbildung 1.32: Fouriertransformation verschiedener beleuchteter Öffnungen  $\sigma$ 

## 1.10.3.1 Beugung am Einfachspalt

$$\tilde{E} \sim \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \mathrm{d}x' \, e^{ik_x x'} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \mathrm{d}y' \, e^{ik_y y'} = ab \frac{\sin \frac{k_x a}{2}}{\frac{k_x a}{2}} \frac{\sin \frac{k_y b}{2}}{\frac{k_y b}{2}}$$
$$k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \vartheta$$

Intensität: 
$$I \sim \left| \tilde{\mathbf{E}} \right|^2 \sim \frac{\sin^2 u}{u^2}$$
 mit  $u = \frac{k_y b}{2}$ 

Lage der Minima:

$$\sin\vartheta = \pm \frac{\lambda}{b}; \pm \frac{2\lambda}{b}; \dots, \pm \frac{n\lambda}{b}$$

Lage der Maxima:

$$\sin\vartheta_{max} = \pm 1,43\frac{\lambda}{b}; \pm 2,46\frac{\lambda}{b}; \dots; \pm (n+\frac{1}{2}\frac{\lambda}{b})$$



Abbildung 1.33: Beugung am Einfachspalt; Lage der Minima und Maxima

## 1.10.3.2 Beugung an kreisförmiger Blende

- $\sigma$  sei Kreis mit Radius  $a_i$  Durchmesser D = 2a
- senkrechter Einfall einer ebenen Welle  $\mathbf{n}' = \hat{\mathbf{z}}$  und  $n'_x = n'_y = 0$
- FRAUENHOFERbeugung:
  - -nur kleine Winkel $\vartheta$

$$\Rightarrow \cos \vartheta \approx 1 \quad \text{und} \quad k_x \approx \frac{\omega}{c} \vartheta$$
$$\Rightarrow \tilde{E} \sim \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr' r' e^{i\frac{\omega}{c}\vartheta r' \cos\varphi}$$
$$\Rightarrow I \sim \left|\tilde{E}\right|^2 \sim \left(\frac{J_1\left(\frac{2\pi a\vartheta}{\lambda}\right)}{\frac{2\pi a\vartheta}{\lambda}}\right)^2$$

 $J_1(x)$ : BESSELfunktion 1. Ordnung

$$J_1(x) \to \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } x \to 0\\ \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) & \text{für } |x| \to \infty \end{cases}$$

D = 2a Lochblende: Merke:

• Winkel  $\vartheta_{min}$ , unter dem das erste Beugungsminimum erscheint:

$$\sin\vartheta_{min} = 1,22\frac{\lambda}{D}$$

• volle Halbwertsbreite der Intensität des Hauptmaximums

$$\sin\vartheta_{\frac{1}{2}} = 1,22\frac{\lambda}{D}$$

- Beugungslimit für Fokussierung durch Objektiv, Umkehrung ist Strahlengang! Airy-Scheibchen
- Durchmesser beugungsbegrenzter Spot im Fokus:

$$D = 1,22\frac{\lambda}{\sin\vartheta}$$

- $\vartheta$ : Öffnungswinkel des optischen Systems
- Kriterium für das beugungsbegrenzte Auflösungsvermögen z.B. eines Mikroskops, Fokaldurchmesser eines Laserstrahls, Fernrohr
- Öffnungswinkel  $\vartheta$  groß  $\Rightarrow$  Fokaldurchmesser klein, Auflösungsvermögen groß
- Öffnungswinkel  $\vartheta$  klein  $\rightarrow$  kollimierter Laserstrahl mit Durchmesser  $D \gg \lambda$  weitet sich langsam durch Beugung auf; GAUSS-Profil bleibt erhalten

#### 1.10.3.3 Faltungen

• Fläche  $\sigma$  sei eine regelmäßige Anordnung identischer Teilflächen  $\sigma_n$  der Breite a, Höhe h und Abstand d in x-Richtung



FRAUENHFER-Beugungsbild

$$\tilde{E} = \int_{\sigma} \mathrm{d}o' \, e^{-\mathbf{k} \, \mathbf{r}'} \big|_{z=0} = \sum_{n=1}^{N} \int_{\sigma_n} \mathrm{d}o' \, e^{i\mathbf{k} \, \mathbf{r}'} \big|_{z=0}$$

neue Variablen  $\mathbf{r}'_n = \mathbf{r}' - d(n-1)\hat{\mathbf{x}}$ 

$$\tilde{E} = \sum_{\substack{n=1\\N \ \delta - \text{Spalten}}}^{N} e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{x}}(n-1)d} \qquad \underbrace{\int_{\sigma_n} dx'_n \ dy'_n \ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'_n}}_{\substack{\text{Beugungsbild von}\\\text{dehnten}\\\text{Einzelspaltes }\sigma_n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \ dk = \delta(x-x')$$

1. Term im Produkt  $\tilde{E}$ :

Beugungsbild eines Gitters aus unendlich dünnen Spalten

=

$$\sigma_{n\delta} = \delta(\mathbf{r}'_n - d(n-1)\hat{\mathbf{x}})$$

 $\Rightarrow$  gesamtes Beugungsbild  $\tilde{E}$  hat periodische Struktur im Ortsraum:

<u>Faltung</u> aus Beugungsbild vom Einzelspalt und Beugungsbild einer periodischen Anordnung von  $\delta$ -Funktionen!

im k-Raum: Produkt

<u>Ausblick:</u> Röntgenanalyse von Kristallen  $\rightarrow$  Vorlesung Festkörperphysik

## 1.10.3.4 Beugung am Strichgitter

Annahme:  $\delta$ -Spalte:

$$\begin{split} \tilde{E} &\sim \sum_{n=1}^{N} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(N-1)d} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' \, e^{ik_x x'} \sum_{n=1}^{N} \delta(x - d(n-1)) \\ &= \frac{1 - e^{ik_x dN}}{1 - e^{ik_x d}} \\ &\Rightarrow \qquad I \sim \left|\tilde{E}\right| \sim \frac{\sin^2 \frac{k_x dN}{2}}{\sin \frac{k_x d}{2}} \end{split}$$

- Hauptmaxima be<br/>i $\frac{k_Xd}{2}=n\pi;$  Intensität $\sim N^2$
- Minima be<br/>i $\frac{Nk_xd}{2}=\pm\pi;\pm2\pi;\ldots;\pm(N-1)\pi$



Abbildung 1.34: Beugungsbild eines Gitters aus N = 5 Spalten

• Beugungswinkel $\vartheta_{max}$  für Maximum:

$$k_x = k \sin \vartheta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \vartheta$$
$$\Rightarrow \frac{\pi d}{\lambda} \sin \vartheta_{max} = n\pi$$
$$\sin \vartheta_{max} = \frac{n\lambda}{d} \qquad n \in \mathbb{N}$$

n: Beugungsordnung

Versuch: Beugung am Gitter:

- Beleuchtung mit Helium-Neon Laser ( $\lambda = 633$ nm)
- Beugungsbild: Produkt aus  $\delta$ -Gitter mal Einzelspalt
- Beleuchtung mit Weißlicht aus Kohlenbogenlampe
- $\rightarrow\,$  Anwendung Beugungsgitter: spektrale Zerlegung von Licht $\lambda=\frac{d}{n}\sin\vartheta_{max}$
- Breite des Hauptmaximums, umgerechnet auf Wellenlänge

$$\Delta\lambda\approx\frac{\lambda}{nN}$$

 $\Rightarrow$  spektrale Auflösung des Beugungsgitters:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{nN}$$

technischer Aufbau eines Gitterspektrometers:

- Abbildung Eintrittsspalt auf Austrittsspalt durch Konkavspiegel
- Selktion von  $\lambda$  durch drehbares Reflexionsgitter
- Auflösung gegeben durch
  - AnzahlNder beleuchteten Spalte auf dem Gitter bzw. Anzahl der Linienpaare/mm z.B. LP/mm=570
  - Breiten des Eintritts- und Austrittsspaltes (geometrisch-optisch)

## 1.11 Streuung

#### 1.11.1 Phänomen der Streuung von Wellen

Z.B. werden Wasserwellen an Hindernis abgelenkt. Oder (Kinoprojektor-)Licht wird an Ascheteilchen in der Luft abgelenkt.

Effekt der Ablenkung wird als *Streuung* bezeichnet wenn Größe L des Hindernisses kleiner ist als die Wellenlänge  $(L \ll \lambda)$ .

(Für  $L \gg \lambda$  ist es *Beugung*; bei  $L \approx \lambda$  spricht man von *Mie-Streuung*)

Wenn Frequenz des gestreuten Feldes gleich der Frequenz des einfallenden Feldes ist ( $\omega_{St} = \omega_I$ ), spricht man von "elastischer Streuung" (RAYLEIGH, THOMSON,...), bei unterschiedlichen Frequenzen ( $\omega_{St} \neq \omega_I$ ) von inelastischer (BRILLOUIN, COMPTON,...).

Sehr wichtig für Strukturanalyse kleinster Objekte (Atom, -kern, etc.) und transparenter Festkörper!

#### 1.11.2 Streuquerschnitte

Information über kleinste Objekte gewinnt man nur durch Messung der Frequenz- ( $\doteq$  Energieübertragung) und Streuwinkel-/Wellenvektor-( $\doteq$  Impulsübertrag) Abhängigkeit der gestreuten Welle bei bekannter eingestrahlter Welle.



Abbildung 1.35: (i) einfallende Welle so einfach wie möglich (ii) Streuprozess: Wechselwirkung der Welle mit Atom (Kern etc.); Ziel des Streuexperiments (iii) auslaufende Kugelwelle

- (i): Einfallende Welle weit vor Streuer: eben, monochromatisch,  $\mathbf{E}_{I} = \mathbf{E}_{o} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})} \Rightarrow \langle \mathbf{S}_{I} \rangle = \frac{\varepsilon_{0} c}{2} |\mathbf{E}_{0}|^{2} \hat{\mathbf{z}}$
- (ii): Streuprozess: Wechselwirkung von Welle mit Atom(en) etc. (kompliziert; Ziel des Streuexperiments)
- (iii): nach der Streuung: Auslaufende Kugelwelle.

Intensität S durch Oberflächenelement do in Richtung  $\hat{\mathbf{n}}$ 

$$d\mathbf{o} = \hat{\mathbf{n}} (r \, d\vartheta) (r \, \sin\vartheta \, d\varphi)$$
  
=  $\hat{\mathbf{n}} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$   
=  $\hat{\mathbf{n}} r^2 d\Omega$  Raumwinkelelement:  $d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ 

und

$$\int_{0}^{\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \,\sin\vartheta = \oint \,\mathrm{d}\Omega = 4\pi$$

(zeitliche gemittelte) in Raumwinkel  $d\Omega = \frac{\hat{\mathbf{n}}}{r^2} d\mathbf{o}$  gestreute Leistung wird in Detektor mit Oberfläche  $|d\mathbf{o}| = r^2 d\Omega$  gemessen.

$$\mathrm{d}W(\vartheta,\varphi) = \langle \mathbf{S} \rangle \,\mathrm{d}\mathbf{o} = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle r^2 \,\mathrm{d}\Omega$$

Bemerkung: dW ist unabhängig von r (siehe unten).

#### A) Totaler Streuquerschnitt $\sigma$

$$\begin{split} \sigma &= \frac{\text{totale durch Kugelfl. } 4\pi r^2 \text{ gestreute zeitl. gemittelte Intensität}}{\text{totale eingestrahlte zeitl. gem. Int.}} \\ &= \frac{\int dW}{\langle \mathbf{S}_I \cdot \hat{\mathbf{z}} \rangle} \\ \sigma &= \frac{\oint d\Omega r^2 \langle \mathbf{S}_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{S}_{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{z}} \rangle} \end{split}$$

**Bemerkung:**  $[\sigma] = m^2$ ;  $\sigma$  ist eine Fläche ( $\hat{=}$  die Streuer dem eingehenden Fluss präsentiert)

## **B)** Differentieller Streuquerschnitt

 $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ 

 $\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{\mathrm{in \ Oberflächenelement \ } \mathrm{d}o = r^2 \,\mathrm{d}\Omega \ \mathrm{mit \ Raumwinkel \ } \Omega(\vartheta, \varphi) \ \mathrm{um \ } \hat{\mathbf{n}} \ \mathrm{gestreute \ zeitl. \ gem. \ Intensität} \\ &= \frac{\mathrm{d}W(\vartheta, \varphi)}{\langle \mathbf{S}_I \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle r^2 \,\mathrm{d}\Omega}{\frac{\varepsilon_0 c}{2} \left| \mathbf{E}_0 \right|^2} \\ &= \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{r^2 \langle \mathbf{S}_I \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{S}_I \, \hat{\mathbf{z}} \rangle} \\ \Rightarrow \quad \sigma &= \oint \mathrm{d}\Omega \ \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \end{aligned}$ 

Gibt mehr Information (Winkelabhängigkeit) über Streuprozess als  $\sigma$ .

**Bemerkung:** Da  $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Omega,\omega)$  hier auch von  $\omega$  abhängt, spricht man häufig vom doppelt differentiellen Streuquerschnitt  $\frac{d\sigma}{d\Omega} \longrightarrow \frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}$  und definiert dann  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\omega \frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}$ .

Beispiel: Streuquerschnitt der Beugung an Kreislochblende (1.10.4).

$$\tilde{E} \stackrel{\vartheta \leq 1}{=} E_I \frac{i}{\lambda r} e^{-i\frac{\omega}{c}r} \int_{\sigma} d\sigma' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} |_{z'=0}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\tilde{E}}{\tilde{E}_I} \right|^2 = \left( \frac{k a^2}{r} \right)^2 \left( \frac{J_1(k a \vartheta)}{k a \vartheta} \right)^2$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega} = a^2 (k a)^2 \left( \frac{J_1(k a \vartheta)}{k a \vartheta} \right)^2 \right]$$

Starke Vorwärtsstreuung für  $a \gg \lambda$ .

Frequenzabhängigkeit:  $\lambda \propto \frac{1}{k} \propto \frac{1}{\omega}$ ; je größer  $\omega$  desto kleiner  $\lambda$  und desto engere Vorwärtsrichtung. Geometrische Optik entspricht  $\lambda \to 0 \Rightarrow$  nur Licht in exakte Vorwärtsrichtung  $\vartheta = 0$ .

Totaler Streuquerschnitt

$$\sigma = \oint d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$$
$$\sigma = \underbrace{2\pi}_{(*)} a^2 \underbrace{\int_{0}^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \left(\frac{J_1(k \, a \, \vartheta)}{\vartheta}\right)^2}_{(**)} \approx \pi \, a^2$$



Abbildung 1.36: Streudiagramm:  $\vartheta_{min} = \pm 0.6 \frac{\lambda}{d}$ ; Länge des Vektors:  $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta)$ 

da (\*): Symmetrie um z-Achse  $\int d\varphi \dots = 2\pi \dots$ (\*\*):  $\approx \int_{0}^{\pi} d\vartheta \, \vartheta \, \frac{J_{1}^{2}(ka\vartheta)}{\vartheta^{2}} \approx \frac{1}{2} \quad \text{da} \ a \gg \lambda \Rightarrow \vartheta \ll 1$ 

Geometrische Fläche der Lochblende  $\sigma=\pi a^2$ ergibt sich, da für  $a\gg\lambda$ geometrische Optik gilt.

## 1.11.3 Erinnerung Dipolstrahlung

## 1.11.3.1 Ableitung aus Maxwellgleichung

Lösung der beiden inhomogenen Wellengleichungen mit nur 2 Näherungen.  $\left(1.22\right)$ aus 1.1.2

## A) Lokalisierte Quelle und Fernfeldnäherung

$$\mathbf{\hat{j}}(|\mathbf{r}'| > r_0, \omega) \equiv 0 \quad \text{und} \quad r \to \infty$$

gegebene Quelle lokalisiert.

⇒ GREEN'sche Funktion der HELMHOLZgleichung in Fernfeldnäherung vereinfacht zu  $(\mathbf{k} = \hat{\mathbf{n}}_{c}^{\omega})$  mit  $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ 

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \frac{-1}{4 \pi r} e^{-i\frac{\omega}{c}r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \\ \Rightarrow & \tilde{B}(\mathbf{r},\omega) \xrightarrow{r \to \infty} \frac{-i\omega}{c} \left( \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\omega) \right) \frac{1}{r} e^{-i\frac{\omega}{c}} \\ & \tilde{E}(\mathbf{r},\omega) \xrightarrow{r \to \infty} -c \left( \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega) \right) \\ & \text{mit} \quad \tilde{q}(\mathbf{k},\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \, \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}',\omega) \end{aligned}$$

FOURIER-transformierte Ströme in Quelle (z.B. Antenne) legen Fernfelder fest. Die Strahlungsfelder sind auslaufende Kugelwellen, transversal ( $\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0$  mit  $\left| \tilde{\mathbf{B}} \right| = \frac{1}{c} \left| \tilde{\mathbf{E}} \right|$ ) und fallen für  $r \to \infty$  wie  $\frac{1}{r}$  ab.

 $\Rightarrow \quad \text{Ausgestrahlte Leistung im Raumwinkel } d\Omega \text{ um Richtung } \mathbf{n} \text{ (zeitl. gemittelt).}$   $\left( \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \, \hat{\mathbf{n}} \, \left| \tilde{E} \right|^2 = \frac{\varepsilon_0 c^3}{2} \, \hat{\mathbf{n}} \, \left| \tilde{B} \right|^2 \right)$   $\boxed{ \left[ -\frac{d^2 W}{2} - \frac{\varepsilon_0 c}{2} + \frac{\varepsilon_0$ 

$$P = \frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}\Omega \,\mathrm{d}\omega} = \frac{\varepsilon_0 \, c}{2} \,\omega^2 \,\left|\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \omega)\right|^2 = \lim_{r \to \infty} r^2 \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \rangle \tag{1.24}$$

#### Larmor Formel

- *P* ist unabhängig vom Abstand *r*, da  $|\mathbf{S}| = \frac{1}{r^2}$  und  $|\mathbf{do}| = r^2 d\Omega$
- Ein zeitlich konstanter Strom  $j \approx \tilde{j}(\omega) e^{i\omega t} \big|_{\omega=0}$  entspricht  $\omega = 0$ , also  $\frac{d^2 W}{d\alpha d\omega} = 0$ . (Nur / jede beschleunigte Ladung strahlt)

## B) Multipolentwicklung

Für  $|\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'| \ll 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad r_0 \ll \lambda \text{ kann } \tilde{q}(\mathbf{k}, \omega)$  Taylor entwickelt werden:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\omega) = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \left( \tilde{\mathbf{d}}(\omega) + i\mathbf{k}\underline{\underline{Q}}(\omega) + \mathcal{O}(k^2) \right)$$

Diese Entwicklung heißt Multipolentwicklung mit führendem Term der Dipolstrahlung ( $\underline{\tilde{Q}}$ : Quadrupolstrahlung, etc.). Wobei:  $\mathbf{\tilde{d}}(\omega) = \int d^3 r' \mathbf{r}' \, \tilde{\varrho}(\mathbf{r}', \omega)$  frequenzabh. Dipolmoment.

$$\tilde{\mathbf{q}}(0,\omega) = \frac{i\,\omega\,\mu_0}{4\,\pi}\,\tilde{\mathbf{d}}(\omega)$$

Für Atome $\lambda\approx 10^{-7}{\rm m}$  ,  $r_0\lesssim 10^{-9}{\rm m}$  gute Näherung.

## Dipolstrahlung - Genaue Herleitung

Lösung der inhomogenen elektromagnetischen Wellengleichung mit 2 Näherungen.

- (A) Fernfeld für  $r \gg r_0$
- (B) Multipolentwicklung für  $r_0 \ll \lambda$

für lokalisierte Quellen (z.B. Atom  $r_0 \lesssim 10^{-9}$ m)

Für monochromatische Felder ~  $e^{i\omega t}$  gilt:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega) = -\mu_0 \,\nabla \times \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},\omega)$$
$$\begin{bmatrix} \nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega) = i\omega\mu_0 \left[\tilde{\mathbf{j}} + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \,\nabla \left(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}}\right)\right]$$

Lösung mit GREENscher Funktion der HELMHOLTZgleichung in Fernfeldnäherung.

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \to \frac{-1}{4 \pi r} \ e^{-i \frac{\omega}{c} r} \ e^{i \mathbf{k} \mathbf{r}'}$$

Da

$$\begin{split} \int \mathrm{d}^3 r' \; e^{i\,\mathbf{k}\,\mathbf{r}'} \; \nabla_{r'} \times \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}',\omega) \\ &= -i\frac{\omega}{c}\,\mathbf{n} \times \int \,\mathrm{d}^3 r' \; e^{i\,\mathbf{k}\,\mathbf{r}} \; \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}',\omega) \\ \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{B}} \to \frac{-i\,\omega\,\mu_0}{4\,\pi\,c} \frac{1}{r} \; e^{-i\frac{\omega}{c}\,\mathbf{r}}\,\mathbf{n} \times \int \,\mathrm{d}^3 r' \; e^{i\,\mathbf{k}\,\mathbf{r}'} \; \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}',\omega) \\ \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{B}} \to \frac{-i\,\omega}{c} \frac{1}{r} \; e^{-i\frac{\omega}{c}\,\mathbf{r}}\,\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\omega) \\ \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \; \int \,\mathrm{d}^3 r' \; e^{i\,\mathbf{k}\,\mathbf{r}'} \; \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}',\omega) \end{split}$$

Analog gilt wegen

$$\begin{split} \int d^{3}r' \ e^{i \,\mathbf{k} \,\mathbf{r}'} & \left[ \tilde{\mathbf{j}} + \left( \frac{\omega}{c}^{2} \right) \,\nabla \left( \nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}} \right) \right] \\ &= \int d^{3}r' \ e^{i \,\mathbf{k} \,\mathbf{r}} \left[ \tilde{\mathbf{j}} - \mathbf{n} \left( \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{j}} \right) \right] \\ &= -\mathbf{n} \times \left( \mathbf{n} \times \int d^{3}r' \ e^{i \,\mathbf{k} \,\mathbf{r}'} \ \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', \omega) \right) \\ \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{E}} \to \frac{i \,\omega \,\mu_{0}}{4 \,\pi} \ \frac{1}{r} \ e^{-i \,\frac{\omega}{c} \,r} \ \mathbf{n} \times \left( \mathbf{n} \times \oint d^{3}r' \ e^{i \,\mathbf{k} \,\mathbf{r}'} \ \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', \omega) \right) \\ \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{E}} \to -c \left( \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) \right) \quad \text{Transversalwellen!} \end{split}$$

Die Multipolentwicklung einer (neutralen!) Quelle folgt aus (1.5) und (1.6).

$$\begin{aligned} \frac{i}{\mu_{0}} \nabla \times \tilde{\mathbf{B}} &= \tilde{\mathbf{j}} + i \, \omega \, \varepsilon_{0} \, \tilde{\mathbf{E}} \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} &= \frac{\tilde{\varrho}}{\varepsilon_{0}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad \nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}} = -i \, \omega \, \tilde{\varrho} \qquad \text{(Ladungserhaltung)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \int \mathrm{d}^{3} r' \, e^{i \, \mathbf{k} \, \mathbf{r}'} \, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', \omega) = -i \, \mathbf{k} \cdot \int \mathrm{d}^{3} r' \, e^{i \, \mathbf{k} \, \mathbf{r}'} \, \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', \omega) \\ &= -i \, \omega \int \mathrm{d}^{3} r' \, e^{i \, \mathbf{k} \, \mathbf{r}'} \, \tilde{\varrho}(\mathbf{r}', \omega) \qquad \text{(für lokale Quellen)} \end{aligned}$$

$$\doteq -i \, \omega \left\{ \underbrace{\int \mathrm{d}^{3} r' \, \tilde{\varrho}(\mathbf{r}', \omega)}_{\text{Wegen Ladungsneutralität}} + i \, \mathbf{k} \cdot \int \mathrm{d}^{3} r' \, \mathbf{r}' \, \tilde{\varrho}(\mathbf{r}', \omega) + \cdots \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \left[ \tilde{\mathbf{d}}(\omega) := \int \mathrm{d}^{3} r' \, r' \, \tilde{\varrho}(\mathbf{r}', \omega) = -\frac{4 \pi \, i}{\omega \, \mu_{0}} \, \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k} = 0, \omega) \right]$$

 $\Rightarrow$  Damit folgt das Dipol-Fern-Strahlungsfeld:

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega) \to \frac{\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \left(\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{d}}(\omega)\right) \frac{1}{r} e^{-i\frac{\omega}{c}r}$$

 $\Rightarrow$ und die zeitlich gemittelte Strahlungsleistung

$$P_D = \frac{\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3} \left| \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{d}}(\omega) \right|^2$$

Für elektrischen Dipol mit  $\tilde{\mathbf{d}}=\hat{\mathbf{x}}\;\tilde{d}(\omega)$ 



Abbildung 1.37: Das Strahlungsdiagramm eines HERTZ-Oszillators. Es besteht Rotationssymmetrie um die Dipolachse

$$\Rightarrow \left| \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{d}} \right|^2 = \sin^2 \vartheta \left| \tilde{d}(\omega) \right|^2$$
$$P_{eD} = \frac{\omega^4}{32 \pi^2 \varepsilon_0 c^3} \left| \tilde{d}(\omega) \right|^2 \sin^2 \vartheta$$

Hertz'sche Dipol-Strahlung

## 1.11.3.2 Winkelabhängigkeit

für elektrischen Dipol:  $\tilde{\mathbf{d}} = \tilde{d}(\omega)\hat{\mathbf{x}}$ 

$$\Rightarrow \left| \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{d}}(\omega) \right|^2 \sim \sin^2 \vartheta$$
$$P_{eD} = \frac{\omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \left| \tilde{d}(\omega) \right|^2 \sin^2 \vartheta$$

Ausstrahlung maximal: senkrecht zur Dipol-Achse Ausstrahlung gleich Null: parallel zur Dipol-Achse

Intensität:  $P\sim \omega^4 \left| \tilde{d}(\omega) \right|^2$ 

## 1.11.4 Rayleigh-Streuung

Einfachstes Streumodell an gebundenen Ladungen. Streuprozess modelliert, dass einfallende Welle polarisierbare Punktatome ("LORENTZ-Modell") zu Dipolstrahlung anregt.

$$\Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{d}} = \alpha_0 \,\varepsilon_0 \, \mathbf{E}_{\mathbf{I}}(\mathbf{r} = 0, t) = \alpha_0 \,\varepsilon_0 \, \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{I}} \, e^{i\omega t}$$

 $\alpha_0$ : atomare Polarisierbarkeit ( $\alpha_0=\frac{e^2}{m_e\,\omega_0^2}$ im LORENZ'schen Atom)

$$\Rightarrow \quad \left| \frac{\mathrm{d}^2 \sigma}{\mathrm{d}\Omega \,\mathrm{d}\omega} = \frac{P_{eD}}{\frac{\varepsilon_{0c}}{2} |\tilde{\mathbf{E}_I}|^2} = \frac{\alpha_0^2 \,\omega^4}{16 \,\pi^2 \,c^4} \,\sin^2 \vartheta \right| \qquad \text{Rayleigh-Streuquerschnitt}$$

- Wenn Material (völlig) homogen ist, gibt es zu jedem Streuzentrum ein zweites im Abstand <sup>λ</sup>/<sub>2</sub> in jede Richtung. ⇒ Alles gestreute Licht interferiert destruktiv
   Nur in Vorwärtsrichtung interferieren gestreutes und einfallendes E-Feld zum D-Feld. (Siehe Erklärung zum Brechungsindex)
- Also nur Inhomogenitäten, wie Dichtefluktuationen/Staubteilchen etc. in Luft streuen und führen zur blauen Farbe des Himmels, auf Grund der Proportionalität zur vierten Potenz der Frequenz.



Abbildung 1.38: Versuchsskize:  $\sigma_{\text{Rayleight}} \sim \omega^4$ 

# 2 Spezielle Relativitätstheorie

## 2.1 Einschub: Konzepte und Definitionen

2.1.1 (kartesische) Koordinaten



Jeder Punkt im Raum besitzt Raumkoordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Jeder Punkt in Raum und Zeit besitzt Raum-Zeit-Koordinaten:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

### 2.1.2 Minkowski-Raum

## Minkowski-Metrik und Einstein'sche Inertialsysteme

Alle Punkte (Ereignisse) in der Raum-Zeit  $\mathbf{x}$  mit  $x^{\mu} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, x^{\mu} \in \mathbb{R}$  konstituieren einen MINKOWSKI-Raum M, wenn eine Metrik gegeben ist, so dass das Längenelement einer beliebigen Kurve lautet:

$$\mathrm{d}l^2 = g_{\mu\nu} \,\mathrm{d}x^\mu \,\mathrm{d}x^\nu$$

 $g_{\mu\nu}$ heißt MINKOWSKI-Tensor oder MINKOWSKI-Metrik. Ein MINKOWSKI-Raum mit einem Koordinatensystem, so dass

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

lautet, heißt Inertialsystem. Denn dann gilt:

$$dl^{2} = (dx^{0})^{2} - (dx^{1})^{2} - (dx^{2})^{2} - (dx^{3})^{2}$$

• Vergleichen wir M mit dem euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$ , in dem gilt:

$$dl^{2} = dx^{2} + dy^{2} + dz^{2} = g_{ij} dx^{i} dx^{j} \qquad \text{mit} \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Krummlinige Koordinaten werden nicht diskutiert, da diese komplizierter sind.
- $g_{\mu\nu}$  definiert ein Skalarprodukt:

$$\langle {\bf a}, {\bf b} \rangle = g_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

Wir definieren den kovarianten Vektor

$$a_{\nu} := g_{\mu\nu}a^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{3} g_{\mu\nu}a^{\mu} = (a^0, -\mathbf{a})$$

sodass  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_{\mu} b^{\mu} \mathbf{a}$ Die Inverse zu  $g_{\mu\nu}$  ist  $g^{\mu\nu}$ , also

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\kappa} = \delta^{\mu}_{\kappa} = \begin{cases} 1 & \mu = \kappa \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und lautet im Inertialsystem:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}$$

## 2.1.3 Definition der Lorentz-Transformationen als ausgezeichnete Koordiantentransformationen

Eine homogene Koordinatentransformation  $x^{'\mu} = L^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$  heißt ausgezeichnet, wenn sie Inertialsysteme in Inertialsysteme überführt, d.h. wenn gilt:

$$g_{\mu\nu} = L^{\kappa}_{\ \mu} L^{\lambda}_{\ \nu} g'_{\kappa\lambda} \quad \text{und} \quad g_{\mu\nu} \stackrel{!}{=} g'_{\mu\nu}$$
(2.1a)

In Matrixschreibweise sieht das so aus:

$$g = L^T g L \tag{2.1b}$$

Dazu muss gelten:

$$g^{\sigma\mu}g_{\mu\nu} = g^{\sigma\mu}L^{\kappa}_{\ \mu}L^{\lambda}_{\ \nu}g_{\kappa\lambda}$$
$$\delta^{\sigma}_{\ \nu} = L^{\ \sigma}_{\lambda}L^{\lambda}_{\ \nu} = (L^{-1})^{\sigma}_{\ \lambda}L^{\lambda}_{\ \nu}$$

also  $(L^{-1})^{\sigma}_{\lambda} = L^{\sigma}_{\lambda}$  in Matrixschreibweise

$$L^{-1} = \left(gLg\right)^T \tag{2.1c}$$

Daraus folgt: det  $(L) = \pm 1$  weil det g = -1

Die Transformationsregel 
$$g = L^T g L$$
 folgt aus Betrachtung des Längenelementes:

$$\mathrm{d} l'^2 = g'_{\mu\nu} \,\mathrm{d} x'^{\mu} \,\mathrm{d} x'^{\nu} = g'_{\mu\nu} \,L^{\mu}_{\ \kappa} L^{\nu}_{\ \lambda} \,\mathrm{d} x^{\kappa} \,\mathrm{d} x^{\lambda}$$

welches in IS und IS' gleich berechnet wird:

$$\mathrm{d}l^2 = g_{\kappa\lambda} \,\mathrm{d}x^\kappa \,\mathrm{d}x^\lambda$$

also

$$g_{\kappa\lambda} = g'_{\mu\nu} L^{\mu}_{\ \kappa} L^{\nu}_{\ \lambda}$$

wobei

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\kappa} x^{\kappa}$$

Die Aussage ", L ist ausgezeichnete Koordinatentransformation" bedeutet nun  $\Leftrightarrow$  Längenberechnung in KS, KS', die mit Koordinatentransformation L verknüpft sind, verwendet identischen Rechenweg.

- Ausgezeichnete Koordinatentransformation im euklidischen  $\mathbb{R}^3$  sind Orthogonaltransformationen und sind durch eine Rotationsmatrix gegeben.  $(g_{ij} = \underline{1} \rightarrow \underline{1} = R^T R)$
- Die ausgezeichneten Koordinatentransformationen heißen LORENTZtransformationen im MINKOW-SKIraum.

## 2.1.4 Tensoren

Tensoren sind Verallgemeinerung des Konzeptes Vektoren, Skalaren, Matrix etc. Bsp.: Rotation: KS  $\longrightarrow$  KS'



Abbildung 2.1: Tensoren am Beispiel von Rotation des Koordinatensystems

$$\begin{pmatrix} x'\\y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\\\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\y \end{pmatrix}$$
  
Rotation des Vektors: 
$$\begin{pmatrix} q'_x\\q'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\\\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x\\q_y \end{pmatrix}$$

Ein Vektor erfüllt also bei einer Koordinatentransformation

$$x^{\prime i} = R^i_{\ i} \, x^j$$

mit Rotationsmatrix R die Transformationseigenschaft

$$q^{\prime i}(\mathbf{x}^{\prime}) = R^{i}_{\ i} \ q^{i}(\mathbf{x})$$

Verallgemeinert mit der Matrix  $D^{\mu}_{\nu}$  der Koordinatentransformation (D = R für euklidischen  $\mathbb{R}^3$ ; LORENTZ-Transformation im MINKOWSKI-Raum) nennt man das  $d^N$ -Tupel (d.h. die Menge von  $d^N$  reellen Zahlen; d = 3 in  $\mathbb{R}^3$ ; d = 4 in M) von Zahlen  $t^{\mu_{(1)}\mu_{(2)}\cdots\mu_{(N)}}(\mathbf{x})$  ( $\mu_i = 0,1,2,3$  in M) kontravarianten Tensor N-ter Stufe, wenn er unter der Koordinatentransformation transformiert gemäß

$$t^{\prime \mu_{(1)} \cdots \mu_{(N)}}(\mathbf{x}') = d(D) D_{\nu_{(1)}}^{\mu_{(1)}} \cdots D_{\nu_{(N)}}^{\mu_{(N)}} t^{\nu_{(1)} \cdots \nu_{(N)}}(\mathbf{x})$$
(2.2)

wobei gelten soll für

$$d(D) = \begin{cases} 1 & \text{Tensor} \\ \text{Det}(D) = \pm 1 & \text{Pseudotensor} \\ \frac{L_0^0}{|L_0^0|} = \pm 1 & \text{zeitartigen Pseudotensor (bei LORENTZtransformation)} \end{cases}$$

Bsp.:

- Im euklidischen  $\mathbb{R}^3$ :
  - In der Elektrodynamik and Ladungen Q Ladungsdichten  $\rho(\mathbf{r},t)$  ein Skalar (-feld) (Tensor 0-ter Stufe, der von  $\mathbf{r}, t$  abhängt),  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$  und  $\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$  Vektoren (Tensor 1-ter Stufe),
  - **B** ein Pseudovektor (d.h. unter Spiegelung  $x'^i = -x^i$  wird  $\mathbf{j}'(\mathbf{r}', t) = -\mathbf{j}(-\mathbf{r}, t)$  und  $\nabla' = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = -\nabla$  deswegen muss  $\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t) = \mathbf{B}(-\mathbf{r}, t)$  damit  $\mathbf{j}'(-\mathbf{r}', t) = \nabla' \times \mathbf{B}'(-\mathbf{r}', t) = -\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  gilt)
  - ist das KRONECKER-Delta  $\delta_{ij}$  ein symmetrischer Tensor 2-ter Stufe = Matrix
  - ist der LEVI-CIVITA-Symbol  $\varepsilon_{ijk}$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \\ -1 & \varepsilon_{jik} = \varepsilon_{ikj} = \varepsilon_{kji} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Pseudotensor 3-ter Stufe.

Mit ihm lautet das Vektorprodukt  $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \Rightarrow a_i = \varepsilon_{ijk} b_j c_k$ 

– ist ein antisymmetrischer Tensor 2-ter Stufe  $M_{ij} = -M_{ji}$  eindeutig verknüpft mit einem Pseudovektor **m**:

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & m^3 & -m^2 \\ -m^3 & 0 & m^1 \\ m^2 & -m^1 & 0 \end{pmatrix}$$

so dass  $\underline{M}\mathbf{a} = \mathbf{m} \times \mathbf{a}$ 

- Im Minkowskiraum:
  - -ist $g^{\mu\nu}$ ein (symmetrischer) Tensor 2-ter Stufe
  - ist  $t^{\nu}_{\mu} = g_{\mu\lambda} t^{\lambda\nu}$  ein gemischter kontra und kovarianter Tensor 2-ter Stufe und wird transformiert wie  $t'^{\nu}_{\mu} = g'_{\mu\lambda} t'^{\lambda\nu} = g_{\mu\lambda} L^{\lambda}_{\sigma} L^{\nu}_{\tau} t^{\sigma\tau} = L^{\sigma}_{\mu} L^{\mu}_{\tau} t^{\tau}_{\sigma} = (L^{-1})^{\sigma}_{\mu} L^{\nu}_{\tau} t^{\tau}_{\sigma}$

**Verjüngung:** Ein Tensor N-ter Stufe ergibt nach Absummierung zweier Indizes einen Tensor (N-2)-ter Stufe.

$$s^{\mu_{(1)}\dots\mu_{(N-2)}} = g_{\mu_{(N-1)}\mu_{(N)}} t^{\mu_{(1)}\dots\mu_{(N)}} = g_{\nu\kappa} t^{\mu_{(1)}\dots\mu_{(N-2)}\nu\kappa}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{4} t^{\mu_{(1)}\dots\mu_{(N-2)}\nu} \nu$$

Verjüngung eines Tensors 2ter Stufe gibt Skalar, der Spur heißt.

• im euklidischen  $\mathbb{R}^3$ :

$$\operatorname{Sp} t = t^{ii} = t^{11} + t^{22} + t^{33}$$

Summe der Diagonalterme

• im Minkowskiraum

Sp 
$$t = g_{\mu\nu}t^{\mu\nu} = t^{\mu}_{\mu} = t^{\mu}_{\mu} = t^{00} - t^{11} - t^{22} - t^{33}$$

Beispiel: Sp  $g = g_{\mu}^{\ \mu} = 4$ , Sp  $1 = \delta^{\mu}_{\ \mu} = 4$ 

## 2.2 Newton'sche Mechanik

Newton: "Mechanische Vorgänge laufen in allen Inertialsystemen gleich ab." Galilei: "Zwei Inertialsysteme sind durch eine GALILEI-Transformation miteinander verknüpft."

$$x^{i} = \sum_{j=1}^{3} R_{j}^{i} x^{\prime j} + r_{0}^{i} + v^{i} t$$

$$t = t' + t_{0}$$
(2.3a)
(2.3b)

mit Konstanten  $R_j^1, \ \mathbf{r}_0, \ t_0; \ R_j^i$ sind Einträge einer Rotationsmatrix.

$$\sum_{j=1}^{3} R_{j}^{i} R_{k}^{j} = \delta_{k}^{i} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

In Matrix-Schreibweise also

 $\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}}^T = 1$ Bemerkung: Die Indizes für Koordinaten  $x^i$  stehen oben (kontravarianter Vektor) und werden mit den



Abbildung 2.2: Transformation zweier Koordinatensysteme

Indizes unten an Matrix  $R_i^i$  absummiert.

Abkürzung: Im folgenden verwenden wir häufig die Einstein'sche Summenkonvention:

$$\sum_{j=0,1}^{3} R_{j}^{i} x^{'j} \hat{=} R_{j}^{i} x^{'j}$$

doppelt auftauchende Indizes werden absummiert.

spezielle Galilei-Transformation:

$$\begin{aligned} x^{i} &= x^{'i} + v^{i}t \qquad (2.3c) \\ t &= t^{\prime} \qquad (2.3d) \end{aligned}$$



Bewegung entlang  $\mathbf{v}$  ohne Drehung. Transformation auf gleichförmig geradlinig bewegtes Bezugssystem.

# 2.2.1 Widerspruch der Galilei-Invarianz zur Wellengleichung und zu den Maxwell-Gleichungen

## A) Wellengleichung:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right]\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0$$

Die Wellengleichung ist eine Folge der MAXWELL-Gleichungen im Vakuum mit der speziellen Lösung:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

für  $\omega = ck$ . Die GALILEI-Transformation auf ein mitbewegtes Inertialsystem (mit  $\mathbf{v} = \mathbf{k}\frac{c}{k}$ ) ergibt eine stehende Welle:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}',t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \frac{k^2}{k} ct) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}')$$

Diese stehende Welle ist keine Lösung der MAXWELL-Gleichungen (Wellengleichung) im Inertialsystem KS'.

Daraus "folgern" wir, dass sowohl die Wellengleichung als auch die Elektrodynamik nach Maxwell nicht GALILEI-invariant sind. Diese Inkonsistenz ist der Ausgangspunkt der speziellen Relativitätstheorie.

B) Versuch von Michelson-Morley: Da sich die Erde bewegt, sollte es möglich sein, unterschiedliche Lichtgeschwindigkeiten in verschiedene Richtungen zu messen. Man verwende ein MICHELSON-



Abbildung 2.3: Michelson-Morley-Versuch: Rotation um c entlang Weg  $l_1$  oder  $l_2$  zu ändern

Interferometer und benutzt eine Rotation des Spektrometers, um Unterschiede in der Lichtgeschwindigkeit entlang der Wege 1 und 2 zu messen, welche auf Grund der Bewegung der Erde zustande kommen. Erwarten würde man, dass die Verschiebung der Interferenzmaxima  $N \propto \frac{L_1+L_2}{\lambda} \left(\frac{v}{c}\right)^2$  mit der Erdgeschwindigkeit v auf Grund des großen Vorfaktors  $\frac{L_1+L_2}{\lambda}$  messbar sind. Durch den Vorfaktor sind selbst feinste Unterschiede messbar. Im Versuch wird aber trotzdem kein Unterschied beobachtet, somit existiert keine Geschwindigkeitsabhängikeit der Lichtgeschwindigkeit bei GALILEI-Transformation auf das

 $\Rightarrow c$  ist konstant in allen mit v bewegten Intertialsystemen.

## 2.3 Relativitätsprinzip und Lorentztransformation

#### 2.3.1 Einstein'sches Relativitätsprinzip

Erdsystem.

Alle physikalischen Vorgänge laufen in Inertialsystemen gleich ab, und zwei Inertialsysteme sind durch eine Lorentztransformation verknüpft.

#### 2.3.2 Konstanz von Lichtgeschwindigkeit in Vakuum

Die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum ist unabhängig vom Inertialsystem und ändert sich also nicht unter einer LORENTZ-Transformation.

## 2.3.3 Die spezielle Lorentz-Transformation

Betrachte zwei Inertialsysteme, die sich relativ zu einander mit  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$  bewegen.



Die Wellenfront einer vom Ursprung zu Zeitpunkt t = t' = 0 ausgestrahlter Kugelwelle von Licht werde in zwei Koordinatensystemen betrachtet. Ihre Position muss gleich lauten

$$r^{2} - c^{2}t^{2} = r^{2} - (x^{0})^{2} = r'^{2} - c^{2}t'^{2} = r'^{2} - (x'^{0})^{2}$$

Zur Vereinfachung wählt (unter der Annahme  $\mathbf{v} \parallel \hat{\mathbf{z}}$ ) man:

$$x'^{1} = x^{1}$$
 und  $x'^{2} = x^{2}$   
 $\Rightarrow \qquad z^{2} - c^{2}t^{2} = z'^{2} - c^{2}t'^{2}$ 
(\*)

Sei die LORENTZtransformation gegeben durch die Matrix L:

$$x^{\prime\mu} = L^{\mu}_{\ \nu}(\mathbf{v})x^{\nu}$$
 (  $\nu$  wird absummiert)

(von KS nach KS' mit Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$ )

#### **Bemerkung:**

• wir postulieren hierbei eine lineare homogene Abbildung Linearität:

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \to \lambda_1 \mathbf{x}_1' + \lambda_2 \mathbf{x}_2'$$

 $\mathbf{x} = 0 \rightarrow \mathbf{x}' = 0$ 

Homogenität:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ f & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix}$$
(\*\*)

also  $L_0^0 = a$ ,  $L_3^0 = b$  etc.

Darum lautet die Inverse Transformation

$$\begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bf} \begin{pmatrix} d & -b \\ -f & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix}$$
 (\*\*\*)

und muss Transformation von KS' nach KS mit Relativgeschwindigkeit  $-\mathbf{v}$  beschreiben. d.h. (\* \* \*)

$$x^{\mu} = L^{\mu}\nu(-\mathbf{v})x^{\prime\nu}$$

Wegen Isotropie des Raumes die Transformation muss (\*\*) gleich bleiben bei  $z \to -z$  und  $z' \to -z'$  und  $v \to -v'$  d.h.

$$\begin{pmatrix} ct \\ -z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a(-v) & b(-v) \\ f(-v) & d(-v) \end{pmatrix}}_{L^M \nu (-\mathbf{v})} \begin{pmatrix} ct \\ -z \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$L^{M}\nu(-\mathbf{v}) = \frac{1}{ab - df} \begin{pmatrix} d & -b \\ -f & a \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a(-v) & b(-v) \\ f(-v) & d(-v) \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$ad - bf = \det(L) = 1$$
  
 $b = v\bar{b}(v^2)$  und  $f = v\bar{f}(v^2)$ 

damit in (\*)

$$z^{2} - c^{2}t^{2} = (az + v\bar{f}ct)^{2} - (act + v\bar{b}z)^{2}$$
  
=  $(a^{2} - v^{2}\bar{b}^{2}) z^{2} - (a^{2} - v^{2}f^{2}) c^{2}t^{2} + 2av (\bar{f} - \bar{b}) ctz$   
 $\Rightarrow \bar{f} = \bar{b}$  und damit  $a^{2} - v^{2}\bar{b}^{2} = 1$  d.h.  $a^{2} - b^{2} = 1$ 

Damit kann der "Winkel $\varphi ``$ eingeführt werden mit

$$a = d = (\pm) \cosh \varphi$$
$$b = f = (\pm) \sinh \varphi$$

sodass

$$L^{\mu}_{\ \nu}(v) = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}$$

 $\operatorname{mit}$ 



Abbildung 2.4: Darstellung von cosh, sinh und tanh

$$\begin{split} \gamma &= \cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \beta &= \tanh \varphi \\ \Rightarrow L^{\mu}_{\ \nu} &= \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{split}$$

Aus Vergleich mit GALILEI-Transformation für  $v \to 0$  folgt  $\beta \to \frac{v}{c}$  und damit  $\gamma \to 1 + \mathcal{O}(v^2)$  also  $\bar{b} \to \frac{1}{c}$ . Aus <u>Hintereinanderschalten</u> von zwei speziellen LORENTZ-Transformationen folgt, dass

$$\beta = \frac{v}{c}$$

(Gruppeneigenschaft)

Es folgt also die spezielle LORENTZ-Transformation

$$t' = \frac{t + \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \xrightarrow{v \ll c} t' = t$$
(2.4a)

$$z' = \frac{z + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow{v \ll c} z' = z + vt$$
(2.4b)

Für  $v \ll c$  folgt also spezielle GALILEI-Transformation.

## 2.3.4 Elementare Folgerungen

## A) Addition von kollinearen Geschwindigkeiten



unter Annahme  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \parallel \hat{\mathbf{z}}$  (kollinear)

$$L^{\mu}_{\ \nu}(u)\cdot L^{\nu}_{\ \kappa}(v)=L^{\mu}_{\ \kappa}(w)$$

Für spezielle LORENTZ transformation gilt also:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ \frac{u}{c} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1 + \frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} + \frac{u^2v^2}{c^4}}}_{\underbrace{\frac{v+u}{c(1 + \frac{uv}{c^2})}}_{i}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{v+u}{c(1 + \frac{uv}{c^2})} \\ \frac{v+u}{c(1 + \frac{uv}{c^2})} & 1 \end{pmatrix}$$

weil für \* gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{v}{c} + \frac{u}{c}\right)^2}{\left(1+\frac{uv}{c}\right)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{(u+v)}{c}}{\frac{(u+v)}{(1+\frac{uv}{c^2})}}\right)^2}$$

Also: relativ zu KS bewegt sich KS" mit der addierten Geschwindigkeit

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

#### Bemerkung:

- Dies belegt die Grupeneigenschaft der speziellen LORENTZ-Transformationen und hätte nicht gegolten, wenn  $\beta \neq \frac{v}{c}$  gewesen wäre. (verwendet in 2.3.3)
- Sei u = v dann ist  $w = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = c \frac{2\beta}{1 + \beta^2}$  mit  $\beta = \frac{v}{c}$



91

c ist also Grenzgeschwindigkeit

**B)** Raum-Zeit-Diagramme Zwei Punkte ("Ereignisse")  $\mathbf{x}_{(1)}$  und  $\mathbf{x}_{(2)}$  mit Abstand

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{(1)} - \mathbf{x}_{(2)}$$

o.B.d.A.  $x^1 = 0 = x^2$  (also kein Abstand entlang  $x^1$ - und  $x^2$ -Richtung). Können nach ihren Abständen charakterisiert werden. So ist

erhalten unter LORENTZ-Transformation.



• 1. Fall  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$  (also  $\Delta t^2 > \frac{\Delta z^2}{c^2}$ )  $\mathbf{x}$  heißt *zeitartig* und liegt im Zukunfts- / Vergangenheitskegel

 $\rightarrow$  Es gibt Inertial<br/>system IS, in dem beide Punkte am selben Ort $\Delta z=0$  stattfinden, aber mit Zeit<br/>differenz $\Delta t.$ 

In allen anderen Inertialsystemen IS' gilt:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > \Delta t$$

also  $\Delta t' > \Delta t$  Zeitdilatation

- 2. Fall:  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ , der Vektor liegt direkt auf dem Lichtkegel.
- 3. Fall:  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$ , dann heißt  $\mathbf{x}$  raumartig. Der Bereich, in dem diese Ereignisse liegen, heißt Gleichzeitigkeitskegel. Es gibt kein Inertialsystem, in dem man mit einem Lichtsignal diese beiden Punkte verbinden könnte, da das Licht nicht schnell genug ist, um von  $\mathbf{x}_{(1)}$  nach  $\mathbf{x}_{(2)}$  zu kommen. Eine Länge  $l = \Delta z$  die im Inertialsystem ruht ist im bewegten Inertialsystem kürzer:

$$l' = \Delta z'|_{\Delta t'=0} = \gamma (l - \beta^2 l) = \sqrt{1 - \beta^2} l = \frac{l}{\gamma} < l$$

(es muss bewegte Länge bei  $\Delta t' = 0$  gemessen werden, und deshalb  $\Delta t' = 0 = \gamma (\Delta t + \frac{v}{c^2} \Delta z)$  gelten) Dieses Verhalten wird Längenkontraktion genannt.

#### 2.3.5 Weltlinien und Eigenzeit



Eine Kurve  $\mathbf{x}(s)$  in der Raumzeit, mit s als beliebigem Kurvenparameter, (zum Beispiel der Zeit) heißt Weltlinie, wenn der infinitesimale Abstand zweier Punkte

$$dl^{2} = c^{2} dt^{2} - dx^{2} - dy^{2} - dz^{2} > 0$$

ist, die Tangente also zeitartig ist und das Teilchen somit nie mit Überlichtgeschwindigkeit fliegt. Wenn das Teilchen eine eigene Uhr hat, so misst diese nach folgender Gleichung (nach Wahl von t als Kurvenparameter)

$$dl^{2} = c^{2} dt^{2} \left(1 - \frac{1}{c^{2}} \dot{\mathbf{r}}^{2}\right) = c^{2} dt^{2} \left(1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}\right) =: c^{2} d\tau^{2}$$
$$\Rightarrow \qquad d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}} dt = \frac{dt}{\gamma}$$
(2.5)

 $\tau$  ist die Eigenzeit der Weltlinie, die somit langsamer läuft. Das d $\tau$  entspricht einem Zeitelement, das eine auf der Kurve bewegte Uhr messen würde. Diese Formel spiegelt die Zeitdilatation wieder.

## 2.4 Lorenz-invariante Formulierung physikal. Gesetze: 1-tes Bsp. Dopplereffekt

Umsetzung des EINSTEIN'schen Relativitäts-Prinzips: Formulierung der physik. Gesetze mit MINKOWSKI-Tensoren, z.B. Skalarprodukt  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_{\mu} b^{\mu}$  und 4er-Vektoren etc., sodass die Gesetze LORENTZ invariant sind, d.h. in allen Inertialsystemen gleich lauten.

Die Phase einer elektromagnetische Welle  $\varphi = \omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}$  entspricht dem Skalarprodukt  $\varphi = g_{\mu\nu} k^{\mu} x^{\nu}$  mit 4-er Wellenvektor  $k^{\mu} = \begin{pmatrix} k^0 = \frac{w}{\mathbf{k}} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}$ . Im <u>bewegten</u> Bezugssystem

$$k^{\prime \mu} = L^{\mu}_{\ \nu} \, k^{\nu}$$

für LORENTZ transformation ( $\mathbf{v} \parallel \hat{\mathbf{z}}$ )

$$\begin{array}{ll} \omega' = j(\omega + v \, k_z) & k_z = \frac{\omega}{c} \, \cos\vartheta \\ k'_z = j(k_z + \frac{\omega v}{c^2}) & k_x = \frac{\omega}{c} \, \sin\vartheta & j \to \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{array}$$

**Bemerkung:**  $k_{\mu}k^{\mu} = 0 = \langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle$  ist LORENTZ invariante Schreibweise der Dispersionsrelation.

## A) Longitudinaler Dopplereffekt:

$$(k_x = 0, \quad k_z = \frac{\omega}{c}, \quad \vartheta = 0)$$
  
 $\omega' = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \omega \doteq \left(1 + \frac{v}{c}\right) \omega$ 

Frequenz ändert sich, wenn Abstand von Empfänger und Sender wegen der Relativbewegung zu-, abnimmt.

#### B) transversaler Dopplereffekt

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad k_z = 0, \quad k_x = \frac{\omega}{c}$$

$$\omega' = \gamma \omega = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \doteq \omega \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots\right)$$

Man spricht vom quadratischen transversalen Dopplereffekt. Dieser fehlt in der klassischen Physik komplett.

**Bemerkung:** Lösung des Widerspruchs zwischen Maxwelgleichungen und Wellengleichung zur Mechanik. Phase einer monochromatischen, ebenen Welle ist LORETZINVARIANT (MINKOWSKI-Skalar).

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \cos(x^{\mu} k_{\mu})$$
 in IS

und

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}',t) = \mathbf{E}'_0 \cos(x'^{\mu} k'_{\mu}) \quad \text{in IS}$$

(Transformation von  $\mathbf{E}_0'$  in QM II)

## 2.5 Relativistische oder Einstein'sche Mechanik

Die Bewegung eines Massenpunktes mit Ruhemasse m entspricht einer Weltlinie im MINKOWSKI-Raum.



$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x_\mu(\tau) \qquad \mathrm{d}x^\mu(\tau) = c^2 \,\mathrm{d}\tau^2 > 0$$

dabei ist $\tau$  die Eigenzeit als Kurvenparameter

#### 2.5.1 Vierergeschwindigkeit

Wird die Weltlinie mit der Eigenzeit  $\tau$  des Massenpunktes (Uhr am Massenpunkt) parametrisiert, dann heißt der Tangentenvektor:

$$u^{\mu}(\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} x^{\mu}(\tau) = \dot{x}^{\mu}(\tau)$$

## Vierergeschwindigkeit.

Zwischen der Vierergeschwindigkeit  $u^{\mu}$ und der Dreiergeschwindigkeit im Raum  ${\bf v}$  besteht folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}(t) \\ \frac{\mathrm{d}x^{\mu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\mathrm{d}x^{\mu}(\tau(t))}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\ &= \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad u^{\mu} &= \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt:

$$u_{\mu}u^{\mu} = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2 = \text{const}$$

ist LORENTZ*invariant*. Das bedeutet, dass  $\frac{1}{c}u^{\mu}$  ein normierte Tensor 1-ter Stufe ist, der sogenannte "**Tangentenvektor**" an der Weltlinie.

#### **Bemerkung:**

Daraus folgt für die Viererbeschleunigung  $\dot{u}^{\mu}$ :

$$\dot{u}^{\mu} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} u^{\mu}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} c^{2} = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} g_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu}$$
$$= 2g_{\mu\nu} u^{\mu} \dot{u}^{\nu}$$
$$\Leftrightarrow u^{\mu} \dot{u}_{\mu} = 0$$
$$\Rightarrow \dot{\mathbf{u}} \perp \mathbf{u}$$

Beschleunigung ist senkrecht zur Geschwindigkeit.

#### 2.5.2 Viererimpuls

**A)** Relativistische Energie-Impuls Beziehung Der räumliche Impuls **p** wird durch die 0te Komponente  $\frac{E}{c}$  mit der totalen Energie E des Massepunktes zum Viererimpulsvektor:

 $E = mc^2$ 

$$p^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \tag{2.6a}$$

mit LORENTZinvarianter Länge (EINSTEIN 1905):

$$p_{\mu}p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 =: (mc)^2$$
 (2.6b)

mit der Ruhemasse m. Im Ruhesystem ( $\mathbf{p} = 0$ ) gilt also:

(Ruheenergie =  $c^2 \cdot \text{Ruhemasse}$ )

Allgemein gilt also:

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (c\mathbf{p}^2)^2}$$
(2.6c)

(relativistische Energie-Impuls-Beziehung) Die verallgemeinerte Newton'sche Beziehung folgt für  $\frac{v}{c} \ll 1$ :

$$E \xrightarrow{p \to 0} mc^2 + \underbrace{\frac{\mathbf{p}^2}{2m}}_{\substack{\text{kin. Energie}\\ \text{nach Newton}}} + \dots$$

#### Bemerkung:

Der Ansatz  $p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)$  soll hier nicht bis ins Detail begründet werden. Es wird lediglich eine Motivation für diesen Ansatz gegeben:

Energie und Impuls charakterisieren die Bewegung eines Massenpunktes. Dieser hat als einzigen Parameter die Ruhemasse m. Laut EINSTEIN ist die einzige physikalisch wichtige Konstante die Lichtgeschwindigkeit c. Also müssen diese beiden Dinge miteinander in Verbindung gebracht werden, was durch obigen Ansatz geschieht.

Die Energie-Masse-Äquivalenz kann z.B. bei der Kernspaltung oder Kernfusion (Deuterium + Tritium  $\rightarrow$  Helium + Neutron mit  $\frac{\Delta m}{m_{He}} \approx 8 \cdot 10^{-3} \rightarrow 18 \text{MeV}$ ) beobachtet werden.

**B)** Träge Masse Eine Verbindung zwischen Kinematik  $(x^{\mu}(\tau) \text{ Bahn}, u^{\mu}(\tau) \text{Geschwindigkeit})$  und der Dynamik (Energie, Impuls) ist gegeben durch:

Ansatz wie bei Newton:  

$$p^{\mu} = mu^{\mu}$$

$$p_{\mu}p^{\mu} = m^{2}u_{\mu}u^{\mu} = m^{2}c^{2}$$
woraus folgt:  

$$p^{\mu} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}} \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \gamma m \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} =: m(v) \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

mit der trägen Masse:

$$m(v) := m\gamma(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Es folgt 3er-Impuls  $p^{\mu} = m(v) \cdot \mathbf{v}$  und  $E = m(v)c^2$  (Energie-Masse-Äquivalenz), wenn der Massenpunkt die Geschwindigkeit v relativ zum Laborsystem hat.

Massepunkt bewegt sich also mit träger Masse, wenn er Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  im Labor hat.

#### **Bemerkung:**

Aus  $(mc)^2 = p_{\mu}p^{\mu}$  folgt  $p_{\mu}\frac{d}{d\tau}p^{\mu} = 0$  (Impulsänderung ist senkrecht auf Impuls)

#### 2.5.3 Einstein'sche Bewegungsgleichung

Es fehlt noch, wie eine Kraft den Massepunkt beschleunigt.

A) Minkowski-Kraft Die Definition der MINKOWSKI-Kraft folgt in Analogie zur Newton'schen Mechanik (nur dass Vierervektoren genommen werden) Es gelte:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p^{\mu} = F^{\mu}$$

Die "eigenzeitliche Änderung" des Impulses erfolgt auf Grund einer Krafteinwirkung. Daraus und aus den Anfangsbedingungen folgt die Bahn des Massenpunktes.

**Bemerkung:** Wegen  $0 = p_{\mu} \frac{d}{d\tau} p^{\mu} = p_{\mu} F^{\mu}$  muss Kraft senkrecht auf  $p_{\mu}$  stehen, also:

$$p_{\mu}F^{\mu} = mu_{\mu}F^{\mu} = m(cF^{0} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{F})$$
  
$$\Rightarrow u_{\mu}F^{\mu} = 0$$

**F** steht für die vertraute 3-er Kraft. also  $F^0 = \frac{1}{c} \mathbf{v} \mathbf{E}$  ist 0-te Komponente der MINKOWSKI-Kraft die Energieänderung liefert.

**B)** Lorentz-Kraft Bsp. für  $\mathbf{F}^{\mu}$ : LORENTZ-Kraft beschreibt die Kraft, die elektromagnetischen Felder auf Massenpunkt mit Ladung q ausübt.

$$\mathbf{F}^{\mu}_{\text{Lor}} = q\gamma \begin{pmatrix} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \end{pmatrix}$$
(2.7)

 $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{v}$  sind vertraute 3er Vektoren.

Aus  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p^{\mu} = \mathbf{F}^{\mu}_{\mathrm{Lor}}$  folgt wegen  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p^{\mu} = \frac{1}{\gamma}\mathbf{F}^{\mu}_{\mathrm{Lor}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(v)c^{2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(v)\mathbf{v} = q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

**Bemerkung:** 

96

• Gleichung 1.7 ist LORENTZ invariant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

nur wird der Impuls mit träger Masse gebildet:  $\mathbf{p} = m(v)\mathbf{v}$ 

- Gleichungen 2.6 und 2.7 sind Postulate, müssen durch Beobachtung verifiziert werden
- $\bullet~2.7$ beschreibt Bewegung eines Massepuk<br/>ntes mit beliebiger Geschwindigkeit v im Labor

#### Bsp.:

Experimenteller Nachweis von m(v) im Synchrotron. Betrachte Bewegung in konstantem, homogenen Magnetfeld  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ . Wegen  $\mathbf{E} = 0$ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(v)c^{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad m(v) = \mathrm{const.}$$

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}} = \mathrm{const.} \quad \Rightarrow \quad v^{2} = \mathrm{const.}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(v^{2})\mathbf{v} = m(v^{2})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v} = q \qquad \underbrace{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}_{\mathrm{senkrecht zu } \mathbf{v}, \mathbf{B}}$$

$$\Rightarrow \quad v_z(t) = v_z^0 = \text{const.} \qquad z(t) = z_0 + v_z^0 t$$

lineare Bewegung entlang  $\boldsymbol{z}$ 

Ansatz:

$$\mathbf{v}(t) = v_z^0 \hat{\mathbf{z}} + \underbrace{\sqrt{v_0^2 - (v_z^0)^2}}_{v_x^0} (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_L t - \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_L t)$$

Kreisbewegung:

$$\Rightarrow m(v)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v} = m(v^2)v_x^0\omega_L\begin{pmatrix} -\sin\omega_L t\\ -\cos\omega_L t\\ 0 \end{pmatrix} = qv_x^0B\begin{pmatrix} -\sin\omega_L t\\ -\cos\omega_L t\\ 0 \end{pmatrix}$$

Ansatz ist OK  $\rightarrow$  LARMOR-Frequenz:

$$\omega_L = \frac{qB}{m(v)} = \frac{qB}{m\gamma} = \omega_L(v) = \omega_L(E)$$

und Radius:

$$r_0 = \frac{v_x^0}{\omega_L} = \frac{m\gamma v_x^0}{qB} = r_0(v^2)$$

Die energieabhängige Größen  $\omega_c$  und  $r_0$  geben leicht nachweisbare Überprüfungeen der speziellen Relativitätstheorie. Bei Atomspektren z.B. ist  $\left(\frac{v}{c}\right)$  der Elektronen im H-Atom auch nicht vernachlässigbar.

## 3 Analytische Mechanik

## 3.0 Variationsrechnung

• Die NEWTON'schen Bewegungsgleichungen für N Massenpunkte (*Teilchen*) mit Massen  $m_i$   $i = 1, \ldots, N$  lauten:

$$\underbrace{\underline{m_i}\ddot{\mathbf{r}_i}}_* = \underbrace{\mathbf{F}_i^{ext}}_{**} + \underbrace{\sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij}^{int}}_{***} \text{ für } i = 1, \dots, N$$

\*: Impulsänderung

\*\*: wirkende äußere Kraft auf Massepunkt \*\*\*: von Teilchen j auf Teilchen i ausgeübte interne Kräfte

Dies sind also f = 3N inhomogenene, nicht lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die zusammen mit den 2f Anfangsbedingungen die Bahnen (Bewegung) der Massepunkte  $\mathbf{r}_i(t)$  beschreiben.

- Die Formulierung der Mechanik nach LAGRANGE, HAMILTON usw. (wird analytische Mechanik genannt) leistet dasselbe: Allerdings ist sie häufig leichter lösbar.
   Das Prinzip der Analytischen Mechanik wird in der sogenannten "Technische Mechanik" oft verwendet.
- **Prinzip der Variationsrechnung** liegt der analytischen Mechanik zu Grunde (siehe auch FER-MAT'sches Prinzip aus 1.6.2) und wurde dort auch (weiter) entwickelt und wird in fast allen Gebieten der modernen Physik verwendet.
- Konzepte der analytischen Mechanik wurden verallgemeinert zur Quantenmechanik, allgemeiner Relativitätstheorie etc.
- Die Verknüpfung von Symmetrie und Erhaltungsgrößen ist wichtigstes Konzept.

## 3.1 Grundzüge der Variationsrechnung

## 3.1.1 Motivation und klassische Beispiele



Im x - y-Ebene seien zwei Punkte  $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$  gegeben. Was ist die kürzeste Bahn / Kurve, die beide Punkte verbindet?

#### Definition einer Bahn:

Eine Abbildung  $\mathcal{C} : I \to \mathbb{R}^f$  mit  $I : [t_A, t_B]$ , die durch f stetige und stetig differenzierbare Funktionen  $q_i(t)$  mit  $i = 1 \dots f$  gegeben ist (Abkürzung  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^f$ ) heißt **Bahn** (t wird später häufig die Zeit sein).

Hier bedeutet dies also, dass x(t) und y(t) durch zweimal stetig differenzierbare Funktionen gegeben sind, mit  $x(t_a) = x_a$ ,  $y(t_a) = y_a$ ,  $x(t_b) = x_b$  und  $y(t_b) = y_b$ , dabei ist  $t_a \le t \le t_b$ . Die Länge der Bahn ist  $l(\mathcal{C}) = \int ds$  mit dem Inkrement ds der Bogenlänge s.



Wir betrachten die Tangente  $\dot{\mathbf{q}}(t)$ . Mit dieser folgt:

Bogenlänge  $\Delta s \approx$  Sekantenlänge  $\approx |\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)|$ 

 $\Delta s \doteq |\dot{\mathbf{q}}(t)| \Delta t$  Unter Verwendung von Taylor für  $\Delta t \rightarrow dt \rightarrow 0$ 

Wobei  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{q}(t)$  Tangente der Bahn  $\mathcal{C}$  im Punkt  $\mathbf{q}(t)$ . Wenn  $\Delta t$  infinitesimal  $\rightarrow \mathrm{d}s = |\dot{\mathbf{q}}| \mathrm{d}t$ :

$$\Rightarrow L(C) = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \sqrt{\dot{\mathbf{q}}(t)^2} = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Wir parametrisieren zur Vereinfachung die Bahn nach x um (ohne Diskussion). Voraussetzung ist, dass x(t) umkehrbar (injektiv) zu t(x) ist mit  $t(x_a) = t_a$  und  $t(x_b) = t_b$ .

$$dt = \frac{dt}{dx} dx = \frac{dx}{\dot{x}}$$
$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{dy}{dx} = \dot{x}y'(x)$$
$$\Rightarrow L(C) = \int_{x_a}^{x_b} d\frac{1}{\dot{x}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{x}^2 y'^2} = \int_{x_a}^{x_b} dx \sqrt{1 + y'^2}$$

Gesucht ist diejenige Funktion, welche y(x) minimiert.

L ist ein sogenanntes **Funktional** L[y(x)]; ist Abbildung, die der Funktion y(x) eine reelle Zahl (Länge) zuweist.

## **Definition eines Funktionals:**

Es ist eine Abbildung vom Raum der Bahnkurven  $\mathcal{C}$  in  $\mathbb{R}$  gegeben durch die Auswertung der Aufsummierung einer sogenannten *Dichtefunktion*  $L = \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  entlang der jeweiligen Bahn  $\mathcal{C}$ :

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \, L\left(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t\right)$$

Falls die Bahn C durch  $\mathbf{q}(t)$  bekannt ist, ist also L = L(t) bekannte Funktion und S ergibt sich durch Integration:

$$S = \int\limits_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \ L(t)$$

Die Variationsrechung bestimmt somit eine Bahn C (oder  $\mathbf{q}(t)$ ), so dass S minimal oder maximal wird (allgemein: stationär). Die Abhängigkeit von  $t_b - t_a$  interessiert nicht.

#### 3.1.2 Die Euler'schen Gleichungen



Gegeben ist ein eindimensionales Bahnfunktional:

$$S[q(t)] = \int_{t_{-}}^{t_{+}} \mathrm{d}t \ L\left(q(t), \dot{q}(t), t\right)$$

Die Bahnen sollen durch Randpunkte gegeben, durch  $q_-$  bei $t_-$ und  $q_+$  bei $t_+$  gehen.

D.h. q = q(t) für  $t_{-} \le t \le t_{+}$  mit  $q(t_{-}) = q_{-}$  und  $q(t_{+}) = q_{+}$ . q(t) sei zweimal stetig differenzierbar und L stetig differenzierbar nach seinem Argumenten. Wir vergleichen die Bahnen  $q(t) = q_{0}(t) + \varepsilon h(t)$ , wobei  $h(t_{-}) = h(t_{+}) = 0$  gelten muss, damit alle Bahnen q(t) durch die Endpunkte gehen. Ansonsten ist h(t) eine (in einer  $\varepsilon$ -Umgebung beliebige) Funktion.

Welches  $q_0(t)$  führt auf die Entwicklung von S:

$$S[q_0(t) + \varepsilon h(t)] = S_0 + \varepsilon S' + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

für beliebiges h(t) mit S' = 0?

#### **Bemerkung:**

Dieses Problem lässt sich behandeln, in dem man das Minimum von  $S(\varepsilon)$  ermittelt.

$$S[q_0(t) + \varepsilon h(t)] = \int_{t_-}^{t_+} \mathrm{d}t \ L\left(q_0(t) + \varepsilon h(t), \dot{q_0}(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t\right)$$
$$\doteq \int_{t_-}^{t_+} \mathrm{d}t \ \left\{ L\left(q_0(t), \dot{q_0}(t), t\right) + \frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=\dot{q}_0}} \varepsilon h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=\dot{q}_0}} \varepsilon \dot{h(t)} \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Bei Variation von h(t) ist  $\dot{h(t)}$  auch fest, aber erst wenn wir alle Terme  $\sim h(t)$  zusammenfassen, können wir S' = 0 für beliebiges h(t) folgern. Dies geschieht mit partieller Integration:

$$= S[q_0] + \varepsilon \int_{t_-}^{t_+} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=\dot{q}_0}} \varepsilon h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=\dot{q}_0}} \varepsilon \dot{h}(t) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Partielle Integration im zweiten Term:

$$= S[q_0] + \varepsilon \int_{t_-}^{t_+} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{q_0,\dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{q_0,\dot{q}_0} \right] h(t) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{q_0,\dot{q}_0}}_{=0 *} h(t) \Big|_{t_-}^{t_+} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$= S[q_0] + \varepsilon \underbrace{\int_{t_-}^{t_+} dth(t) \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{q_0,\dot{q}_0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{q_0,\dot{q}_0} \right]}_{S'} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

 $\ast$ da Randterme verschwinden.

Damit das Integral S' (linearer Term in  $\varepsilon$ ) für alle h(t) verschwindet, muss also  $[\ldots] \equiv 0$  entlang der

gesamten Bahn

$$\frac{\partial L}{\partial q}\Big|_{\substack{q=q_0,\\\dot{q}=\dot{q}_0}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right|_{\substack{q=q_0,\\\dot{q}=\dot{q}_0}} \stackrel{!}{=} 0$$

dies nennt man die EULER-Gleichung

Beispiel: Kürzeste Bahn (Achtung:  $t \to x$ ) in der Ebene. Weil  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$  ist, gilt:

$$l = \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x \, L(\, y(x), y'(x), x\,) \quad \text{mit} \quad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

In unserem Beispiel ist

$$L(y(x),y'(x),x) = L(y') = \sqrt{1+y'^2}$$

Die EULERgleichung bedeutet hier:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

Und da die erste Ableitung  $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$  ergibt, haben wir:

$$0 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c = \mathrm{const.}$$

Es folgt also für die erste Ableitung:

$$y'(x)^2 = c^2 (1 + y'(x)^2) \quad \Rightarrow \quad y'(x)^2 = \frac{c^2}{1 - c^2} = \bar{c}^2 = \text{const.}$$

Damit erhalten wir, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Gerade ist:

$$y(x) = y_0 + \bar{c}x$$

Setzen wir nun die Randwerte ein, so erhalten wir:

$$y(x) = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$

#### Bemerkungen:

- Die kürzeste Bahn wird auch als **Geodäte** bezeichnet. Auf diesem Prinzip basiert die Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie, bei der  $g_{\mu\nu}$  eine Funktion des Ortes ist.
- Eine Variable  $q_i$  (wie hier y), die in  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  nicht explizit auftaucht, (d.h.  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ , hier:  $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ ) heißt zyklische Variable und die zugehörige Größe, der sogenannte verallgemeinerte (kanonische) Impuls,  $p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  ist eine Erhaltungsgröße, p = const. (d.h.  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{const.}$  hier  $\frac{\partial L}{\partial u'} = \text{const.}$ )

Verallgemeinerung auf eine Bahn im  $\mathbb{R}^f$ :

#### Theorem:

Die Bahnkurve  $\mathcal{C}$  im  $\mathbb{R}^f$ , gegeben durch

 $\{(\mathbf{q},t)|q_i = q_i(t) \mid i \le i \le f \text{ mit } f \text{ stetig und zweimal stetig differenzierbaren Funktionen } q_i(t)\}$ 

ist Extremalkurve des Funktionals.

$$S = \int_{t_{-}}^{t_{+}} \mathrm{d}t \, L(\,\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t\,)$$

Das heißt,  $S[\mathbf{q}]$  ist stationär bei festen Randpunkten  $\mathbf{q}(t_{-}) = \mathbf{q}_{-}$  und  $\mathbf{q}(t_{+}) = \mathbf{q}_{+}$  mit der Dichtefunktion:

$$L: \ \mathbb{R}^f imes \mathbb{R}^f imes \mathbb{R} o \mathbb{R}$$

mit gewissen Glattheitsbedingungen an L. Das Funktional ist extremal genau dann, wenn:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, f \tag{3.1}$$

0

unter Vorgabe fester Randpunkte  $\mathbf{q}(t_{\pm}) = q_{\pm}$ . Dies sind die EULERgleichungen.

#### **Beweis:**

Die f Vergleichsbahnen  $\mathbf{q}(t,\varepsilon)$  erfüllen  $\mathbf{q}(t,\varepsilon=0) = \mathbf{q}(t)$  (optimale / stationäre Bahn). Wobei  $\mathbf{q}(t)$  die extremale Bahn ist. Ebenfalls gilt, dass alle Vergleichsbahnen durch die Randpunkte gehen:

$$\mathbf{q}(t_{\pm},\varepsilon) = \mathbf{q}(t_{\pm}) = \mathbf{q}_{\pm}$$

Desweiteren soll  $\mathbf{q}(t,\varepsilon)$  entwickelbar sein:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t,\varepsilon) &= \mathbf{q}(t) + \varepsilon \left. \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \qquad (\text{TAYLOR in } \varepsilon) \\ & \left( S[\mathbf{q}(t,\varepsilon)] - S[\mathbf{q}(t)] \right) \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} S' = \left. \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \\ & \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_-}^{t_+} \mathrm{d}t \, \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \left. \frac{\partial q_i(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left. \frac{\partial \dot{q}_i(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right) \stackrel{!}{=} \end{aligned}$$

Wegen  $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \dot{q}_i(t,\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} q_i(t,\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} q_i(t,\varepsilon)$  lässt sich die Zeitableitung partiell integrieren:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_{-}}^{t_{+}} \mathrm{d}t \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial q_{i}(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} \left(\frac{\partial L\left(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t\right)}{\partial q_{i}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L\left(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t\right)}{\partial \dot{q}_{i}}\right) + \left[\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i}} \frac{\partial q(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right]_{t_{-}}^{t_{+}} = 0$$

da  $q_i(t,\varepsilon)|_{t_{\pm}} = q_{\pm}$  folgt für alle  $\varepsilon$ :  $\frac{\partial q_i(t_{\pm},\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0$ . Die große Klammer muss also für jeden Index *i* einzeln 0 ergeben. Betrachten wir im Detail:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial^2 L}{\partial t \,\partial q_i} + \sum_{j=1}^f \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \,\partial q_j} \,\dot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^f \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \,\partial \dot{q}_j} \,\ddot{q}_j(t)$$

 $\Rightarrow$  Die Euler-Gleichungen sind gekoppelte implizite Differentalgleichungen zweiter Ordnung.

Beispiel: Kürzeste Bahn:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = dtv$$
$$\Rightarrow L[\mathcal{C}] = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$$

also haben wir:

$$L\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t\right) = L\left(\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}(t)\\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}, t\right) = L\begin{pmatrix} \dot{x}(t)\\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = L(\dot{x}, \dot{y})$$

Die Euler-Gleichungen hierfür lauten:

=

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \mathrm{konst.}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \mathrm{konst}$$

Da z.B. x zyklisch ist gilt  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = c = \text{const.}$  Damit erhalten wir also die Beziehung:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{c_2}{c_1} = \mathrm{konst}$$

Wir erhalten wieder eine Gerade: y' = konst.Die selbe Bahn/Kurve ergibt sich aus der Variationsrechnung für beliebige Parametrisierung.

Beispiel: Kürzeste Bahn in Polarkoordinaten<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos\varphi(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ y(t) &= r(t)\sin\varphi(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{aligned}$$

also ist die Geschwindigkeit in ebenen Polarkoordinaten nichts anderes als:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

Es folgt für L:

$$L[\mathcal{C}] = \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t \,\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}$$

Umparametrisieren ergibt:

$$L[\mathcal{C}] = \int_{r_A}^{r_B} \mathrm{d}r \sqrt{1 + r^2 \varphi'^2} \qquad \text{mit} \quad \varphi' = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$$

Die kürzeste Bahn folgt nun aus der EULERgleichung mit

$$L\left(\varphi(r),\varphi'(r),r\right) = \sqrt{1 + r^2 \varphi'^2}$$

Eingesetzt ergibt dies:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \frac{\partial L}{\partial \varphi'} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \frac{r^2 \varphi'}{\sqrt{1 + r^2 \varphi'^2}} = c = \mathrm{konst.}$$

Um  $\varphi(r)$  oder  $\varphi'(r)$  zu finden, ist ein größerer Rechenaufwand als zuvor notwendig. Das liegt an der ungeschickten Wahl unserer Koordinaten. Das Ergebnis bleibt natürlich eine Gerade.

#### 3.1.3 Klassisches Beispiel: Die Brachystochrone

Historisches Problem: BERNOULLI (1696)



<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Dieses Beispiel wurde nicht in der Vorlesung besprochen.

Gesucht ist die Kurve, auf der ein Teilchen unter Einwirkung der Schwerkraft am schnellsten von A nach B kommt.

Das Teilchen ist bei A (oberhalb von B) anfänglich in Ruhe. Eine Bahn, auf der das Teilchen zuerst stark beschleunigt und dann mit größerer Geschwindigkeit entlangläuft ist womöglich schneller als die kürzeste Bahn.

Wir ermitteln die Zeit zum Durchlaufen der Bahn mit dem Bogenlängenelement ds und der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$ :

$$t\left[\mathcal{C}\right] = \int_{A}^{B} \frac{\mathrm{d}s}{|\mathbf{v}|}$$

weil  $ds = |\mathbf{v}| dt$ , wobei v aus der Energieerhaltung bestimmt werden kann:

$$E = \text{konst.} = \frac{m}{2}v^2 - mgz = 0$$

wegen Wahl der Anfangbedingungen bei A: v = 0, z = 0. Damit können wir  $v = \sqrt{2gz}$  ersetzen:

$$t\left[\mathcal{C}\right] = \int_{A}^{B} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gz}} = \int_{A}^{B} \mathrm{d}t \, \frac{\sqrt{\dot{x}^{2} + \dot{z}^{2}}}{\sqrt{2gz}}$$

Durch Umparametrisieren mit t = t(x) folgt:

$$L[\mathcal{C}] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x \sqrt{\frac{1 + z'(x)^2}{z(x)}}$$

gesucht ist z(x), sodass  $F(\mathcal{C}) = \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x \sqrt{\frac{1+z'(x)^2}{z(x)}}$  extremal  $= \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x L(z(x), z'(x), x)$  mit

$$L(z(x), z'(x), x) = \sqrt{\frac{1+z'^2}{z}}$$

$$\stackrel{\text{Extremum}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial L}{\partial z'} = 0 \qquad \text{wobei } z' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$
$$\implies \quad \frac{\sqrt{1+z}}{z^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{z'}{\sqrt{z(1+z'^2)}}$$

weiteres Differenzieren wird kompliziert und  $z'' = \frac{d^2 z}{dx^2}$  taucht auf. **Tipp:** Verwende nicht die EULER-Gleichung wenn es auch einfacher geht!

=

#### Wichtiger Trick: Energieerhaltung

Multiplikation der Euler-Gleichung mit z', und danach anwenden der Produktregel liefert:

$$z' \frac{\partial L}{\partial z} - z' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial L}{\partial z'} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad z' \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} z' \frac{\partial L}{\partial z'} + \frac{\partial L}{\partial z'} z'' = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \underbrace{\frac{\partial L}{\partial z} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial L}{\partial z'} \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x}}_{(*)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} z' \frac{\partial L}{\partial z'} = 0$$

Die Klammer (\*) entspricht: =  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L(z(x), z'(x), x)$  genau dann, wenn  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ , weil gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L(z(x),\dot{z}(x),x) = \frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial z'}\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial L}{\partial x}$$

dann folgt:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( L - z' \frac{\partial L}{\partial z'} \right) \quad \Leftarrow \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

<u>Fazit:</u> Somit ergibt sich aus der EULER-Gleichung: für  $\frac{\partial L}{\partial x}=0$  gibt es Erhaltungsgröße

$$E = L - z' \frac{\partial L}{\partial z'} = \text{const.} = E(z(x), z'(x)) \quad \text{mit } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}E = 0$$

was ein großer Vorteil ist, weil E nur von z und z' (nicht aber von z'') abhängt

In unserem Beispiel ist:

$$E = z' \frac{z'}{\sqrt{z(1+z'^2)}} - \sqrt{\frac{1+z'^2}{z}} = \frac{-1}{\sqrt{2a}} = \text{const.} \quad \text{mit einer Länge } a$$
$$E = \frac{1}{\sqrt{z(1+z'^2)}} (z'^2 - 1 - z'^2) = \frac{-1}{\sqrt{z(1+z'^2)}} \quad \Leftrightarrow \quad z (1+z'^2) = 2a = \text{const.}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z' = \pm \sqrt{\frac{2a}{z} - 1}$$

dabei ist a die Länge eine Integrationskonstante. Trennung der Variablen:

$$\int \mathrm{d}x = x - x_0 = \int \mathrm{d}z \,\sqrt{\frac{z}{2a - z}}$$

Variablensubstitution:  $z = a (1 - \cos \vartheta) \quad \Leftrightarrow \quad dz = a \sin \vartheta \, d\vartheta$ 

$$\Rightarrow \qquad x - x_0 = \int d\vartheta \ a \sin \vartheta \sqrt{\frac{a \left(1 - \cos \vartheta\right)}{a \left(1 + \cos \vartheta\right)}}$$
$$= a \int d\vartheta \ \sin \vartheta \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}}} = 2a \int d\vartheta \ \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$
$$= a \left(\vartheta - \sin \vartheta\right)$$

D.h. mit der Parametrisierung der Bahn durch  $\vartheta$ ist die Brachystochrone gegeben durch:

$$z = a (1 - \cos \vartheta)$$
$$x = a (\vartheta - \sin \vartheta) + x_0$$

 $x_0$  und a sind zwei unbekannte Integrationskonstanten, die aus den Randbedingungen bei den Punkten



Abbildung 3.1: Die Brachystochrone ist hier ein Stück einer Zykloide, die man durch Abrollen eines Rades mit Radius a erhält.

A und B folgen z.B.:  $x(\vartheta_A) = z(\vartheta_A) \stackrel{!}{=} 0$  folgen.

$$\vartheta_A = 0$$
  $x_0 = 0$   $x(\vartheta_B) = x_B$   $z(\vartheta_B) = z_B$ 

## 3.2 Lagrange Mechanik

## 3.2.1 Prinzip von Hamilton

## A) Newton'sche Bewegung eines Massepunktes im Potential

Nach NEWTON ist die Bahn des Massepunktes verknüpft mit

$$\begin{array}{ll} \text{Bahn:} & t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3 & (\text{häufig } \mathbf{r} = \mathbf{q}) \\ \text{Geschwindigkeit:} & \mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, \mathbf{r}(t) = \mathbf{\dot{r}}(t) \\ \text{kinetischer Impuls:} & \mathbf{p}(t) = m \, \mathbf{v}(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \, \frac{m}{2} \, \mathbf{v}^2 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \, T(\mathbf{v}) & \text{mit der Masse } m \\ \text{kinetische Energie:} & T := \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 \\ \text{Kraft aus Potential:} & \mathbf{F} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \, U(\mathbf{r}(t), t) \end{array}$$

 $\Rightarrow$ gegebene NEWTON'schen-Gleichung:  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}=\mathbf{F}$ ist äquivalent zu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 - \underbrace{U(\mathbf{r}, t)}_{=0 \ (*)} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \underbrace{\frac{m}{2} \mathbf{v}^2}_{=0 \ (**)} - U(\mathbf{r}, t) \right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \underbrace{(T - U)}_{=:L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (T - U) = 0$$

(\*) da U unabhängig von **v** ist und (\*\*) da kinetische Energie nicht von **r** abhängt. Im Vergleich erkennt man, dass die NEWTON-Gleichung der EULER-gleichung (3.1) zur (LAGRANGE)-Dichte ist.

$$L = L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) = T - U = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}, t) = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 - U(\mathbf{r}, t)$$
(3.2a)

Das HAMILTON'sche Prinzip besagt, dass die Bewegungsbahnen des Massepunktes (Parameter m) die "Extremalen, der "Wirkung, (des Wirkungsfunktionals) sind.

$$S[\mathbf{r}(t)] = \int_{t_{-}}^{t_{+}} \mathrm{d}t \ L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t)$$
(3.2b)

## Bemerkungen:

- Das Prinzip heißt auch "Prinzip der kleinsten Wirkung"
- In der Mechanik heißen die EULER-Gleichungen  $(3.2) \Rightarrow$  EULER-LAGRANGE-Gleichungen

## B) Die Einstein'sche Bewegung eines Massepunktes im Potential

Alles identisch zu (A), nur dass der Impuls  $\mathbf{p}$  die träge Masse enthält.

$$\mathbf{p} = m(v)\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} m \, \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( -m \, c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \right)$$
$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, \mathbf{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( -m c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} - \underbrace{U(\mathbf{r}, t)}_{=0} \right)$$
$$\stackrel{\text{Einstein}}{=} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \underbrace{-m c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}_{=0} - U(\mathbf{r}, t) \right)$$

Die Bahnen eines Massenpunktes der EINSTEIN'schen Mechanik im Potential Usind Extremalen der Wirkung

$$S = \int_{t_{-}}^{t_{+}} \mathrm{d}t L(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = \int_{t_{-}}^{t_{+}} \mathrm{d}t \, \left( -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} - U(\mathbf{r}, t) \right)$$
(3.3)

#### C) konservatives N-Teilchensystem (nach Newton)

Zunächst betrachten wir die NEWTON'sche Beschreibung für Bahn  $\mathbf{r}$ , Bahntangente (Geschwindigkeit)  $\mathbf{v}$ und Impuls  $\mathbf{p}$  mit der Masse des *i*-ten Teilchens  $m_i$ :

$$t \to \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{1}(t) \\ \mathbf{r}_{2}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{N}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{f=3N}$$
  
Tangentenvektor  $t \to \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{1}(t) \\ \mathbf{v}_{2}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{N}(t) \end{pmatrix}$  mit  $\mathbf{v}_{i}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}_{i}(t) = \dot{\mathbf{r}}_{i}(t)$   
Impuls  $t \to \mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{1}(t) \\ \mathbf{p}_{2}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{N}(t) \end{pmatrix}$  mit  $\mathbf{p}_{i}(t) = m_{i}\mathbf{v}_{i}(t)$ 

dabei ist  $m_i$  die Masse des *i*-ten Teilchens.

konservatives Kraftfeld bedeutet:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1(\mathbf{r}(t)) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N(\mathbf{r}(t)) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{F}_i = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}(t)) = -\nabla_i U$$

mit einem(!) Potential U für alle Teilchen, das zeitunabhängig ist.  $\left(\frac{\partial U}{\partial t}=0\right)$ 

#### Bemerkung

• U kann externes Potential (externes Kraftfeld) sein

$$U(\mathbf{r}) = U^{\text{ext.}}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} U^{\text{ext.}}(\mathbf{r}_i)$$

wobei  $U^{\text{ext.}}$  gegeben ist (z.B. als Gravitationspotential  $U^{\text{ext.}} = m_i gz$ ).

• *internes Potential* (z.B. Paar-Wechselwirkungen)

$$U = U^{\text{int.}} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} U^{\text{int.}} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

 $U^{\text{int.}}$  kann z.B. COULOMB-Potential sein mit  $U = -\frac{q_i \cdot q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$ . Damit das zweite NEWTON'sche Axiom (actio=reactio) erfüllt ist, muss  $U^{\text{int.}}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = U^{\text{int.}}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$  sein. Denn damit folgt für die Kraft auf ein Teilchen *i* vom Teilchen *j*:

$$\mathbf{F}_{i,j}^{\text{int.}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U^{\text{int.}}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} U^{\text{int.}}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = -\mathbf{F}_{j,i}^{\text{int.}}$$

dass sie also gleich ist zu der negativen Kraft von Teilchen i auf j. Die NEWTON-Gleichungen  $\frac{d}{dt}\mathbf{p}_i = \mathbf{F}_i$  sind äquivalent zu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_i\mathbf{v}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} \left( \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} v_j^2 - U(\mathbf{r}) \right) \right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \left( -U(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} v_j^2 \right)$$
#### Fazit:

Die Bahnen des konservativen N-Teilchensystems nach NEWTON sind die Extremalen zur LAGRAN-GEdichte:

$$L(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} v_i^2 - U(\mathbf{r})$$
(3.4)

Bemerkung:

- Salopp: L = T U =kinetische Energie-potentielle Energie
- Konzept der Kraft (als ein Vektor) taucht nicht auf
- kartesisches Koordinatensystem verwendet. Die Gültigkeit der EULER-Gleichung nach Koordinatentransformation bliebt noch zu zeigen. Dann wird häufig  $U(\mathbf{r}) \to U(\mathbf{q},t)$  bei Koordinatentransformation von  $\mathbf{r} \to \mathbf{q}$ . Dabei wird auch oft  $T(\mathbf{v}) \to T(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q})$  die kinetische Energie ortsabhängig.

# D) Newton'sche Mechanik eines geladenen Teilchens in elektromagnetischen Feldern

Wir untersuchen nun ein Teilchen der Ladung q in einem elektromagnetischen Feld. Dazu betrachten wir die LORENTZ-kraft (1.7):

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = q \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t) \right]$$

wobei die **E** und **B** aus Potentialen bestimmbar sind: (1.5 / 1.6)

$$\begin{split} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\nabla \Phi(\mathbf{r},t) - \partial_t \, \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \\ \text{und} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \end{split}$$

### Bemerkung:

- $\Phi$  ist ein skalares Potential, **A** ein Vektorpotential.
- Die Potentiale sind jedoch nicht eindeutig. Dieselben E- und B-Felder, die sich aus Φ und A ergeben, folgen auch aus Φ und Ā wenn Ā = A + ∇χ und Φ = Φ ∂<sub>t</sub>χ.
  A, φ und Ā, φ geben für beliebige Funktion χ die selben elektromagnetischen Felder

$$\nabla \times \bar{\mathbf{A}} = \nabla \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla \chi}_{=0} = \mathbf{B}$$
$$-\nabla \bar{\phi} - \partial_t \bar{\mathbf{A}} = -\nabla \phi + \nabla \partial_t \chi - \partial_t \mathbf{A} - \partial_t \nabla \chi = \mathbf{E}$$

Beispiel: ein homogenes **B**-Feld in  $\hat{z}$ -Richtung **B**( $\mathbf{r},t$ ) =  $B(t)\hat{\mathbf{z}}$  folgt aus

$$\mathbf{A} = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \quad \bar{\mathbf{A}} = B \begin{pmatrix} -y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit der LORENTZkraft lautet die x-Komponente der NEWTON-Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}mv_x = q\left[-\partial_t\phi - \partial_x A_x + v_y(\partial_x A_y - \partial_y A_x) - v_z(\partial_z A_x - \partial_x A_z)\right]$$
$$= q\left[-\frac{\partial}{\partial x}(\phi - v_y A_y - v_z A_z \underbrace{-v_x A_x}_*) - (\partial_t + \underbrace{v_x \partial_x}_* + v_y \partial_y + v_z \partial_z)A_x\right]$$
$$= -q\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_x(\mathbf{r}(t), t)\right]$$

wobei bei \* = 0 addiert wurde. Analog für  $p_y$  und  $p_z$ 

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( m \mathbf{v}(t) + q \mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t) \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( -q \phi(\mathbf{r}(t), t) + q \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t) \right)$$

NEWTONgleichungen können geschrieben werden als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\left(\frac{m}{2}\mathbf{v}^{2}+q\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}(t),t)-q\phi(\mathbf{r}(t),t)\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\underbrace{\left(\underbrace{\frac{m}{2}\mathbf{v}^{2}}_{=0}+q\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}(t),t)-q\phi(\mathbf{r}(t),t)\right)}_{I}$$

Fazit: Die NEWTON'schen Bahnen in elektromagnetischen Feldern folgen der LAGRANGE-Dichte

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 + q \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - q \phi(\mathbf{r}, t)$$
(3.5)

Bleibt nur noch die Frage nach der fehlenden Eindeutigkeit von A und  $\phi$  zu klären. Bei Eichtransformation

$$\bar{A} = A - \nabla \chi$$
 und  
 $\bar{\phi} = \phi + \partial_t \chi$ 

ändert sich Lzu

$$L = \frac{m}{2}v^{2} + q\mathbf{v}(\bar{A} + \nabla\chi) - q(\bar{\phi} - \partial_{t}\chi)$$
  
=  $\underbrace{\frac{m}{2}v^{2} + q\mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{A}} - q\bar{\phi}}_{=:\bar{L}} + q\left(\partial_{t}\chi + \nabla\chi\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)$   
=  $\bar{L} + q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\chi(\mathbf{r}(t),t)$ 

also  $\overline{L}$  unterscheidet sich von L durch ein totales Differential der Zeit. (Bedeutung erst später)

**Bemerkung:** Ersetzt man  $\frac{m}{2}v^2 \rightarrow -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ , dann erhält man die EINSTEIN'sche Mechanik des geladenen Teilchens in **E**- und **B**-Feld.

## 3.2.2 Elementare Beispiele

# A) Eindimensionale konservative Systeme

Ein Massenpunkt, dessen Position  $q(t) \in \mathbb{R}$  in einem gegebenem Potential  $U(\mathbf{q})$  variiert, sei modelliert durch

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{q}^{2} - U(q)$$

was zur Euler-Lagrange-Gleichung führt:

$$m\ddot{q}=-\frac{\partial U}{\partial q}$$

Beispiel: Ein starres Pendel im Schwerefeld Das Pendel hat den Freiheitsgrad des Winkels q



$$T = \frac{1}{2}Ml^2\dot{q}^2 \ \text{und} \ U(q) = Mgz = Mgl(1 - \cos q)$$

Für ein Pendel der Länge l = 1 folgt mit M = m:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{q}^{2} - mg(1 - \cos q)$$

Da U(q) zeitunabhängig ist  $(\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0)$ , gilt Energieerhaltung. D.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \dot{q}^2 m - \frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q) \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( T + U \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E \text{ Gesamtenergie}$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q) \right) = m \dot{q} \ddot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} \dot{q} = \dot{q} \left( m \ddot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} \right) = 0$$

die Gesamtenergie  $E = T + U = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + U(q)$  ist zeitlich konstant. Der Massenpunkt benötigt also  $\Delta t = t_2 - t_1$  um von  $q_1 = q(t_1)$  nach  $q_2 = q(t_2)$  zu kommen.

$$t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int \frac{dq}{\dot{q}} = \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}}$$

da nach Energieerhaltung gilt:  $\dot{q} = {}_{(\pm)}\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(q))}$ Da  $\frac{m}{2}\dot{q}^2 \geq 0$ ist, erfolgt die Bewegung im Bereich gegeben durch  $U(q) \leq E$ 

Wir wollen nun eine Diskussion verschiedener möglicher / typischer Bahntypen anschließen:



- (i) E sei  $U_{min}$ ,  $\dot{q}$  sei 0:  $q(t) = q_{min}$  ist mögliche Bahn da  $U_{min}$  ein lokales Minumim ist und folgt  $\frac{\partial U}{\partial q}\Big|_{q_{min}} = F = 0$ Dieser Punkt ( $q = q_{min}$  heißt Gleichgewichtspunkt).
- (ii)  $U_{min} < E < U_{max} (q < q_{max})$

hier ist  $\dot{q}(t) \neq 0$ . Im Allgemeinen jedoch gibt es zwei Umkehrpunkte  $q_+$  und  $q_-$  an denen die Geschwindigkeit verschwindet, nämlich die Punkte, für die gilt:

$$U(q_+) = U(q_-) = E$$

 $q_{-} \leq q(t) \leq q_{+}$ : Bewegung verläuft zwischen den Umkehrpunkten.

 $\rightarrow$ geschlossene Bahnen, die anharmonische Oszillationen darstellen mit der Periode:

$$\frac{2\pi}{\omega} = T = 2\int_{q_-}^{q_+} \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}}$$

Die Bewegung ist periodisch: q(t + T) = q(t)Beweglung: Im Allgemeinen höngt ist also vor

<u>Bemerkung:</u> Im Allgemeinen hängt  $\omega$  also von Amplitude  $(q_+ - q_-) = \Delta q$  ab.

- (iii)  $E = U_{max}$  und  $F = \frac{\partial U}{\partial q}\Big|_{q_{max}} = 0$ Da  $U_{max}$  lokales Maximum ist, haben wir ein labiles Gleichgewicht:  $q(t) = q_{max}$  ist Bahn
- (iv)  $E > U_{max}$ , es gibt nur noch einen Umkehrpunkt, an dem  $E = U(q_{-})$ Das Teilchen läuft nach  $q \to +\infty$  für  $t \to \infty$ .

## B) Linearisierungen um Gleichgewichtspunkte

(i) Um die Punkte  $q_{min}$  und  $q_{max}$  aus Beispiel (A) kann die EULER-LAGRANGE-Gleichung linearisiert werden. Dies soll im allgemeinen, konservativen Fall von f Freiheitsgraden skizziert werden.

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) \quad \text{mit } \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{f}$$

Ein Punkt  $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^f$  ist Gleichgewichtspunkt, genau dann, wenn

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_0) = -\left.\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}_0} = 0$$

Wenn dort keine Kraft wirkt. Es gilt dann  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0$  ist Bahn. Beweis:

$$U(\mathbf{q}) = E \quad \text{weil} \quad T = 0 \quad \text{und} \quad m\mathbf{q} = 0$$
$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t_0) + \dot{\mathbf{q}}(t_0)(t - t_0)$$

...

ergibt  $\mathbf{q}(t) \equiv \mathbf{q}_0$  wenn  $\dot{\mathbf{q}} = 0$ irgendwann einmal.

(ii) Für kleine Abweichungen  $\delta \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_0$  vom Gleichgewichtspunkt werden die EULER-LAGRANGE-Gleichungen lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial q_i} = m_i \ddot{q}_i = F_i(\mathbf{q}_0 + \delta \mathbf{q}(t)) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$
$$F_i(\mathbf{q}_0) + \delta \mathbf{q}(t) = F_i(\mathbf{q}_0) + \sum_{j=1}^f \left. \frac{\partial F_i}{\partial q_j} \right|_{\mathbf{q}_0} \delta q_j + \mathcal{O}(\delta \mathbf{q}^2)$$
also:  $\Rightarrow m_i \delta \ddot{q}_i = -\sum_{j=1}^f \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\mathbf{q}_0} \delta q_j(t) + \mathcal{O}(\delta q^2)$ 

mit der symmetrischen Matrix der zweiten Ableitung des Potentials ausgewertet am Gleichgewichtspunkt.



Zurück zum Beispiel:

An beiden Gleichgewichtspunkten  $q_{min}$  und  $q_{max}$  gilt: Bei  $q_{min}$ :

$$U(q_{min} + \delta q) = U_{min} + \frac{1}{2}k\delta q^2 + \dots \qquad \text{mit } k = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q_{min}}$$
$$\Rightarrow \quad \delta \ddot{q} + \omega^2 \delta q = 0$$

Dabei ist k die Federkonstante der Rückstellkraft. Es kommt zu einer harmonischen Oszillation mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{q}^2}}$$

und beschränkter Amplitude. Man spricht von einem linear stabilen Gleichgewichtspunkt.

**Bemerkung:** Nichtlineare Terme können zum im Allgemeinen Fall (z.B.  $\delta \mathbf{q} \in \mathbb{R}^p$ ) Anwachsen der Amplitude führen. Man spricht dann von *nichtlinearer Instabilität* Bei  $q_{max}$ :

$$\mathbf{q}_{max} : U(q_{max} + \delta q) = U_{max} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}}_{<0} \Big|_{q_{max}} \delta q^2 + \dots$$
$$\delta \ddot{q} - \alpha^2 \delta q = 0$$
$$\text{mit} \quad \alpha = \sqrt{-\frac{1}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}}$$

gibt im Allgemeinen exponentiell anwachsende Ablenkungen.

$$\delta q(t) \sim e^{\alpha t} \to \infty \qquad t \to \infty$$

(iii) kleine Schwingungen und charakteristische Frequenzen

Der Ansatz  $\delta q_i(t) = A_i e^{i\lambda t}$  mit dem Amplitudenvektor **A** macht die EULER-LAGRANGE-Gleichungen zu einem Set von f homogenen, gekoppelten, linearen Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -m_1\lambda^2 & & & \\ & -m_2\lambda^2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & 0 & & -m_f\lambda^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} & \cdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} & \ddots & \\ \vdots & & \frac{\partial^2 U}{\partial q_f^2} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_f \end{pmatrix} = 0$$

die nur eine nicht-triviale Lösung  $(\mathbf{A} \neq 0)$  besitzen, wenn die Determinante der Matrix

$$\left|\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} - m_i \lambda^2 \delta_{ij}\right| = 0$$

Dies legt die (verallgemeinerten) Frequenzen  $\lambda^2 = \pm \omega^2(\alpha)$  für  $\alpha = 1, \ldots, f$  als Eigenwerte fest. Dabei ist  $\lambda^2 \in \mathbb{R}$ , da  $\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}$  symetrisch ist.

Ist eine der Frequenzen  $\lambda^2 < 0$ , dann ist der Gleichgewichtspunkt instabil, weil  $\delta \mathbf{q}(t) \sim e^{\pm \sqrt{\omega^2(\alpha)t}}$ folgt. Zu jedem  $\omega_{\alpha}$  gehört ein Eigenvektor  $\mathbf{A}_{\alpha}$ , der:

$$\sum_{i} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} - m_i \omega_\alpha^2 \delta_{ij} \right) A_j^\alpha = 0$$

erfüllt, sodass die allgemeine Lösung:

$$\delta q_i(t) = \sum_{\alpha=1}^f A_i(\alpha) \left( c_{\alpha}^{(1)} e^{i\omega_{\alpha}t} + c_{\alpha}^{(2)} e^{-i\omega_{\alpha}t} \right)$$

lautet (mit den Integrationskonstanten  $c_{\alpha}^{(1,2)}$ , die aus Anfangswerten folgen). Dieses Verfahren findet weite Anwendung, da viele Systeme (beispielsweise Moleküle, Festkörper, Pendel etc.) kleine Schwingungen um die Gleichgewichtspunkte machen.

#### C) Bewegung im konservativen Zentralpotential

Sei  $U(\mathbf{r},t) = U(r)$  Zentralpotential. D.h. ein Teilchen im Potential spürt nur radiale Kräfte:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}\qquad \hat{\mathbf{r}} \parallel \mathbf{r}$$

Wie jetzt gezeigt werden soll, ist es im wesentlichen nur ein eindimensionales Problem. Unser Modell:

$$L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - U(r)$$

lautet

Erinnerung: Es gibt eine extremale Wirkung, wenn die EULER-LAGRANGE-Gleichung gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,m\dot{\mathbf{r}} = -\,\frac{\partial U}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}$$

(i) Drehimpulserhaltung.

Drehimpuls 
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{L} \stackrel{!}{=} 0$   
 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \, \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial U}{\partial r} \, (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}}) = 0$ 

d.h.  $\mathbf{L} = \text{const.}$  ist erhalten.

(ii) ebene Bewegung



 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0$ 

weil **L** ein konstanter Vektor ist, gibt  $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{L} = 0$  die Ebenengleichung. Deshalb liegt **r** in der Ebene senkrecht zu **L** durch den Ursprung. Wir wählen  $\mathbf{L} = l \hat{\mathbf{z}}$ . Die Bewegung erfüllt also z(t) = 0.

(iii) Ebene Polarkoordinaten:

Mit der Wahl der z-Achse parallel zu L, d.h.  $\mathbf{L} = l\hat{z}$  Bewegung in x, y-Ebene mit  $z(t) \equiv 0$ 

 $x(t) = r(t) \cos \phi(t) \quad \& \quad y(t) = r(t) \sin \phi(t)$ 

und für die Geschwindigkeit:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi$$

Damit ergibt sich für die LAGRANGEdichte:

$$L = \frac{m}{2} \left( \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) - U(r)$$
  
=  $\frac{m}{2} \left[ \left( \dot{r}^2 \cos^2 \phi + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi + \dot{r}^2 \sin^2 \phi + r^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi + 0 \right) - U(r) \right]$   
=  $\frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - U(r) = L(r, \dot{r}, \dot{\phi})$  (3.6a)

(iv) Drehimpulserhaltung II

weil nun  $\phi$  eine zyklische Variable ist, d.h.  $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$  gilt, folgt:

$$l = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi} = \text{const.}$$
(3.6b)

wobei *l* der Betrag des Drehimpulses ist, was man durch explizites Einsetzten in  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$  sieht.

(v) Radialgleichung und effektives Potential

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\dot{r} = m\ddot{r} = \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}$$
$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(U(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}U^{\mathrm{eff.}}$$

Wir haben die Gleichungen nun auf ein radiales Problem mit dem effektiven Potential mit Zentrifugalterm zurückgeführt (wobei der Bruch den Zentrifugalterm darstellt).

also: 
$$m\ddot{r} = -\frac{\partial U^{\text{eff.}}}{\partial r}$$
  
mit  $U^{\text{eff.}}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$  (3.6c)

Es verbleibt nur die Radialgleichung (3.6c) mit dem effektiven Potential  $U^{\text{eff.}}(r)$  zu lösen (dies gibt r(t) und mit (3.6b) folgt Winkelbewegung  $\phi(t) = \int dt \dot{\phi}$ )

(vi) Energieerhaltung

Zum Lösen von (3.6c) verwendet man nun

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + U^{\text{eff.}}(r) = \text{const.}$$

**Beweis**:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\frac{\dot{r}^2}{2} + U^{\mathrm{eff.}}(r)\right) = \dot{r}\left(m\ddot{r} + \frac{\partial U^{\mathrm{eff.}}}{\partial r}\right) = 0$$

Zur Bestimmung von  $r(\phi)$  verwenden wir die Integrabilität von  $E(r,\dot{r})$  und  $l(l,r,\dot{\phi})$ .

# 3.2.3 Axiome und Grundbegriffe der Lagrange-Mechanik

Die Formulierung der Mechanik nach LAGRANGE erfolgt mit dem HAMILTONSchen Extremalprinzip für Bahnkurven zur LAGRANGEdichte L.

## 1. Axiom:

Ein mechanisches System entspricht einer Bahn  $\mathcal{C}$  im Konfigurationsraum  $\mathcal{M}$ .

$$\mathcal{C}: \{t, \mathbf{q}: \, \mathbf{q} = \mathbf{q}(t) \text{ für } t_{-} \leq t \leq t_{+}; \, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{f} \}$$

Bemerkungen:

- Die Begriffe werden noch sauberer definiert.
- Der Parameter t ist die Zeit
- Für *n* Teilchen ist der Raum  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{3n}$  und wird als Konfigurationsraum (Positionen- oder Lage-Raum) bezeichnet. Die Erklärung für  $f \leq 3n$  folgt
- Die Dimension f von  $\mathcal{M}$  ist die Zahl der Freiheitsgrade.
- Falls f Koordinaten ausgewählt werden  $(q_1, \ldots, q_f)$ , mit denen jeder Punkt von  $\mathcal{M}$  dargestellt werden kann, heißen die  $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_f)$  generalisierte Koordinaten.

#### 2. Axiom:

Die Dynamik ist bestimmt durch die Angabe einer Dichtefunktion  $L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$  (unter gewissen Regularitätsbedingungen), so dass die Bahnen C des Systems Extremalen des HAMILTON'schen Wirkungsfunktionals  $S = \int_{t_{-}}^{t_{+}} dt L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$  sind.

# Bemerkungen:

- Die Angabe von L heißt Modell des Systems
- S heißt Wirkung, daher kommt der Name des "Prinzips kleinster Wirkung"

• Die EULER-LAGRANGE-Gleichungen (zweiter Art) lauten hierzu:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, f$$
(3.7)

- Die  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ heißen (generalisierte oder kanonische) Impulse
- z.B. mit magnetischen Feldern  $L = \frac{m}{2}v^2 + q\mathbf{v}A$  stimmen kinetische und kanonische Impulse nicht überein:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A} \neq m\mathbf{v}$$

•  $q_i$  und  $p_i$  heißen zueinander konjugierte Variablen. (wenn  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ )

Wichtige bisher schon besprochene Eigenschaften der Bewegung (= von L) sind:

• Zyklische Variablen:

Eine Variable  $q_i$  ist zyklisch wenn gilt:  $\frac{\partial L}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$ . Dann ist der zugehörige kanonische Impuls zeitlich konstant:  $p_i = \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} = \text{const.}$ 

• Energieerhaltung: Hängt  $L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$  nicht explizit von der Zeit ab, d.h.  $L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$  und damit  $\frac{\partial L}{\partial t}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = 0$ , dann ist

$$H = \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

eine Erhaltungsgröße und  $\frac{d}{dt}H = 0$ . Oft entspricht H = E der Gesamtenergie des mechanischen Systems.

## 3.2.4 Hamilton'sche Funktion

### 3.2.4.1 Hamilton'sche Gleichungen

Das System der f EULER-LAGRANGE-Gleichungen sind f Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, f$$

Die zum System der Variationsrechnung für das Wirkungsfunktional gehören.

1

$$S = \int_{t_{-}}^{t_{+}} \mathrm{d}t \, L\left(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t\right)$$

Die EULER-LAGRANGE-Gleichungen sind äquivalent zu den 2f Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_{i}(t) = \dot{q}_{i}(t) = \frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)}{\partial p_{i}} \qquad i = 1, \dots, f$$

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{i}(t) = \dot{p}_{i}(t) = -\frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)}{\partial q_{i}} \qquad i = 1, \dots, f \qquad (3.8)$$

HAMILTON'sche Gleichungen

wobei

$$H(\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t),t) = \dot{\mathbf{q}}\mathbf{p} - L = \left(\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \dot{q}_i - L$$

Dabei hängt die sogenannte HAMILTON'sche Funktion H von den zueinander konjugierten Variablen  $\mathbf{q}$  (Ort) und  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  (kanonischer Impuls) ab:

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \dot{\mathbf{q}}\,\mathbf{p} - L$$

Bei der Berechnung von **H** muss also  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$  gefunden werden um  $\dot{q}$  zu eliminieren. Dies gelingt durch Invertierung von

$$\mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

**Beispiel:** 

Eindimensionale Bewegung im Potential. Laut NEWTON gilt:

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$$

Die kinetische Energie T und die potentielle Energie U sind gegeben durch:

$$T = \frac{m}{2}\dot{q}^2$$
 und  $U = U(q)$ 

Die LAGRANGE-Funktion lautet dann:

$$L(q,\dot{q}) = T - U = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - U(q)$$

Der Impuls p ist nichts anderes als:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}$$

Dessen Invertierung lautet damit also:

$$\dot{q} = \frac{1}{m} p$$

Die HAMILTON-Funktion sieht dann folgendermaßen aus:

$$H = \dot{q} p - L = \frac{p p}{m} - \frac{1}{2m} p^2 + U(q) = \frac{p^2}{2m} + U(q) = T + U$$

EULER-LAGRANGE-Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$$

HAMILTON'sche Bewegungsgleichungen

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$$
$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

Mit den selben Anfangsbedingungen legen die HAMILTON-Gleichungen und die EULER-Gleichungen die selben Bahnen fest!

Beweis: über Betrachtung des totalen Differentials

$$dH(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \, d\mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \, d\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial t} \, dt$$

Achtung: H hängt nicht von  $\dot{q}$  ab!

Vergleichen mit dem Differential dX von  $X = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  also

$$dX(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}, t) = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \, \mathrm{d}\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} \, \mathrm{d}\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial t} \, \mathrm{d}t + \left(\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) \, \mathrm{d}\dot{\mathbf{q}}$$

Behauptung:

Damit  $dH \stackrel{!}{=} dX$ , muss  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  sein, genau so wie  $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$  und  $\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$ . Außerdem gilt mit diesen Beziehungen, (mit der zugehörigen EULER-Gleichung):

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, \mathbf{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

# Bemerkungen:

• Die HAMILTON'sche Funktion H spielt beim Übergang zur Quantenmechanik eine zentrale Rolle

- $H(\mathbf{q},\mathbf{p})$  ist Funktion im 2*f*-dimensionalen *Phasenraum*, wenn Konfigurationsraum *f*-dimensional ist
- Jedes Variationsproblem lässt sich mit *L* oder *H* formulieren (falls Iversion  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$  möglich ist)
- für ein mechanisches Problem ist häufig L = T U mit  $U = U(\mathbf{q})$  und  $T = \sum_{i} \frac{m}{2} \dot{q}_{i}^{2}$ , sodass  $p_{j} = m_{j} \dot{q}_{j} \Rightarrow \dot{q}_{j} = \frac{p_{j}}{m_{j}}$

 $H = \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - L = 2T - (T - U) = T + U$ 

damit ist H die Gesamtenergie. Es gilt dann auch:

$$rac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = rac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_i} = m_j \delta_{ij}$$

sodass  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  nach  $\dot{\mathbf{q}} = g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  auflösbar ist, nämlich  $\dot{q}_j = \frac{1}{m_j} p_j$ .

# 3.2.4.2 Energieerhaltung

Aus dem totalen Differential von H folgt die totale Zeitableitung (mit den HAMILTON'schen Gleichungen):

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}(\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t),t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\,\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\,\dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial t} = -\dot{\mathbf{p}}\,\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}\,\dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Wenn die HAMILTON'sche Funktion (bzw. die LAGRANGE-Dichte) nicht explizit von der Zeit t abhängt (also  $-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = 0 \Rightarrow H = E = \text{const.})$ , dann ist H insgesamt eine Konstante, die man häufig einfach Gesamtenergie nennt.

#### Bemerkungen:

- Systeme mit  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  heißen autonom
- E ist oft Gesamtenergie
- Erhaltungsgrößen / Konstanten der Bewegung / Erste Integrale (erhaltene Energie und kanonischer Impuls einer zyklischen Variable) sind nützlich zur Bestimmung der Bahnen

# 3.2.5 Zwangsbedingungen

## A) Holonome Zwangsbedingungen

Bsp.: (i)Starres (ebenes) Pendel



Die Behauptung, der Massepunkt hängt an einer Stange der festen Länge L ist eine Zwangsbedingung.  $|\mathbf{r}(t)| = L$  ist eine Modellierung des Festkörpers Stange.

# (ii) Zwei starr gekoppelte Pendel

Seien zwei Pendel durch eine Feder gekoppelt, sodass die LAGRANGEfunktion lautet:

$$L = L_1 + L_2 + \frac{\alpha}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)^2$$



Abbildung 3.2: (starr) gekoppelte Pendel

Im Grenzfall  $\alpha \to \infty$ : Starre Kopplung wird modelliert durch die Zwangsbedingung  $\varphi_1 = \varphi_2$ . (siehe Aufgabe 38)

## **Bemerkung:**

Nur selten (hier in (ii)) verstehen wir mechanische Geräte (Stangen, Federn, Schaniere etc.), welche Zwangsbedingungen realisieren. <u>Ziel:</u> Allgemein wollen wir jedoch technische Geräte einfach modellieren. Das machen wir durch Zwangsbedingungen

**Definition:** Sei ein mechanisches System nach LAGRANGE gegeben im f-dimensionalen Konfigurationsraum durch die LAGRANGEdichte

$$l = l(q_1(t), \cdots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \cdots, \dot{q}_f(t), t) = l(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

Das System von n Gleichungen

$$F_1(q_1(t), \cdots, q_f(t), t) = 0$$
  
$$\vdots$$
  
$$F_n(q_1(t), \cdots, q_f(t), t) = 0$$

kurz  $F_i(\mathbf{q}(t), t) = 0$  für  $1 \le i \le n$  (n < f) gibt *n* holonome Zwangsbedingungen. Als Reaktion auf diese Zwangsbedinungen wirkt das System mit Zwangskräften Z nach außen, d.h. auf die mechanischen Geräte, die die Zwangsbedingungen erzwingen.

(iii) **Perle auf rotierendem Ring im Schwerefeld** Ein Ring mit Radius R, der sich um die vertikale  $\hat{z}$ -Achse durch seinen Mittelpunkt mit fester Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dreht, auf dem ein Massepunkt m reibungsfrei gleitet.

Seine Polarkoordinaten lauten also:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos \varphi(t) \sin \vartheta(t) \\ y(t) &= r(t) \sin \varphi(t) \sin \vartheta(t) \\ z(t) &= r(t) \cos \vartheta(t) \end{aligned}$$

mit LAGRANGEdichte

$$\Rightarrow \qquad l = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) - m \, g \, r \cos \vartheta$$

Und die Zwangsbedingungen für m lauten:

r(t) = R (fester Radius des Ringes)  $\varphi(t) = \omega t$  (konstante Rotation)

Die 3 Koordinaten des Massepunktes unterliegen den Zwangsbedingungen: für  ${\bf r}$  in Polarkoordinaten also:

$$F_1(r, \varphi, \vartheta, t) = r^2 - R^2 = 0$$
  
$$F_2(r, \varphi, \vartheta, t) = \varphi - \omega t = 0$$

**Bemerkung:** 



Abbildung 3.3: Perle auf rotierendem Ring

- Koordinaten sind wegen Zwangsbedingungen nicht unabhängig voneinander.
- Zeitunabhängige Zwangsbedingungen (d.h. alle  $F_i(\mathbf{q}, t)$  sind  $F_i(\mathbf{q}), \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0$ ) heißen skleronom. Zeitabhängige heißen rheonom.
- Nicht holonome Zwangsbedingunen lassen sich nicht in Form  $F_i(\mathbf{q}(t),t) = 0$  bringen, da sie die Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  enthalten, so dass es keine Stammfunktion gibt.

#### B) Lagranges System mit Zwangsbedingungen

**Satz** (i): Ein System mit f Freiheitsgraden

$$l = l(q_1, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_f, t)$$

wird durch n funktional unabhängige holonome Zwangsbedingungen.

$$F_i(q_1, \cdots, q_f, t) = 0 \qquad 1 \le i \le n < f$$

auf einen F = f - n-dimensionalen Konfigurationsraum M gezwungen, der beschrieben sei durch F lokale Koordinaten  $\mathbf{Q}$ , also  $Q_1, \ldots, Q_F$ .

Wenn in M die alten Koordinaten  $\mathbf{q}$  durch die neuen Koordinaten  $\mathbf{Q}$  ausgedrückt werden können, d.h.  $q_i = f_i(\mathbf{Q}, t)$  für  $1 \dots f$  so lautet die neue LAGRANGEdichte L, die das System vollständig in M beschreibt:

$$L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L(Q_1, \cdots, Q_F, \dot{Q}_1, \cdots, \dot{Q}_F, t)$$
$$= l \left( q_1 = f_1(\mathbf{Q}, t), \cdots, \underbrace{q_i = f_i(\mathbf{Q}, t)}_{(*)}, \cdots, q_f, \dot{q}_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_1(\mathbf{Q}, t), \cdots, \underbrace{\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_i(\mathbf{Q}, t)}_{(**)}, \cdots, \underbrace{\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_i(\mathbf{Q}, t)}_{(*)}, \cdots, \underbrace{\dot{q}_i$$

(\*): i-te Komponente von  $q_i = f_i(\mathbf{Q}(t), t) = q_i(\mathbf{Q}, t)$  (letzte Gleichheit als Abkürzung) (\*\*): i-te Komponente der Geschwindigkeit  $\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_i(\mathbf{Q}, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_i(\mathbf{Q}, t) = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^F \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j$ 

**Satz (ii):** Ist das System gegeben durch L in M gelöst (z.B. durch EULER, LAGRANGE, Energiesätze), so ist das Problem mit l gelöst, und man erhält die Zwangskräfte, indem man die  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(Q(t), t)$  in die ursprüngliche EULER-LAGRANGE-Gleichung von l einsetzen.

d.h. 
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} \Big|_{q_i(t) = f_i(\mathbf{Q}, t)} =: Z_i \qquad 1 \le i \le f$$

Dies ist die Definition der Zwangskraft, dass man in die ursprüngliche EULER-LAGRANGE-Gleichug zu l, die aus dem Q(t) bestimmten unrsprünglichen Koordinaten  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{Q}, t)$  einsetzt.

**Bew:** von Satz (i) in 3.4.3 Satz (ii) gibt die Definition der Zwangskraft

Bem: Satz gibt allgemeines Lösungsverfahren.

## Zu Bsp (iii):

1. Formuliere l = U - T (z.B. in Kartesischen Koordinaten)

$$l(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - U(r) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2 - mgz \qquad (\text{Ausgangspunkt})$$

- 2. Berücksichtige Zwangsbedingungen durch Einführung geeigneter krummliniger Koordinaten um Zwangsbedingungen einfach zu formulieren, hier Polarkoordinaten  $r, \varphi, \vartheta$  mit denen der neue Konfigurationsraum  $\mathcal{M}$  leicht formuliert werden kann.
- 3. Berücksichtige Zwangsbedingungen, und finde neue Variable Q in  $\mathcal{M}$ , die uneingeschränkt variiert. hier:  $Q(t) = \vartheta(t)$  als Winkel zur  $\hat{z}$ -Achse.

$$M = \{Q : Q(t) = \vartheta(t) | 0 \le Q \le \pi\} \qquad (F = 3 - 2 = 1)$$

Die ursprünglichen Koordinaten lauten in M durch Q ausgedrückt:

$$x(t) = R \cos \omega t \sin Q(t)$$
  

$$y(t) = R \sin \omega t \sin Q(t)$$
  

$$z(t) = R \cos Q(t)$$

und erfüllen die Zwangsbedingungen:  $Zb_1$  und  $Zb_2$ 

4. Stelle neues L auf (im  $F = 1 = \dim M$ ):

$$L(Q, \dot{Q}, t) = l(x(t) = R \cos \omega t \sin(Q(t)), y(t) = \dots, \dot{x} = -R\omega \sin \omega t \sin Q(t) + R\dot{Q} \cos \omega t \cos Q(t), \dots)$$
$$= \frac{m}{2} \left( R^2 \dot{Q}^2 + R^2 \omega^2 \sin^2 Q \right) - m g R \cos Q$$

- 5. Löse  $L(Q, \dot{Q}, t)$  durch LAGRANGE / HAMILTON Formalismus, um Q(t) aus den Anfangsbedingungen  $Q(t_0), \dot{Q}(t_0)$  zu bestimmen.
- 6. Falls von Interesse, bestimme ursprüngliche Koordinaten (x, y, z) oder  $(r, \varphi, \vartheta)$  aus Q(t) um Zwangskraft zu bestimmen. Hier z.B.  $Z_r$  (radiale Zwangskraft).



$$Z_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial l}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial l}{\partial r} \bigg|_{\substack{r=R;\\\varphi=\omega t;\\\vartheta=Q(t)}} = m \left( \ddot{r} - \left( \dot{Q}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 Q \right) r + g \cos Q \right) \bigg|_{\substack{r=R;\\\varphi=\omega t;\\\vartheta=Q(t)}} = m R \left( \underbrace{\dot{Q}^2}_{(i)} + \underbrace{\omega^2 \sin^2 Q}_{(ii)} + \underbrace{mg \cos Q}_{(iii)} \right)$$

(i): Zentrifugalkraft für Bewegung entlang des Rings. (ii): Radiale Komponente (sin Q) der Zentrifugalkraft bei Rotation um die  $\hat{z}$ -Achse im Abstand  $R\sin Q$ .

(iii): Radiale Komponente der Gewichtskraft

# Bem:

- Genau diese Zentralkraft muss der Ring aushalten
- Behandlung von Zwangsbedingungen nach LAGRANGE einfacher, als nach NEWTON
- Alternatives Lösungsverfahren zur Behandlung von (nicht-hononomen) Zwangsbedingungen verwendet LAGRANGE-Multiplikatoren. (s. in Lehrbchern, wir etwa [No2])

# 3.3 Mathematischer Einschub

In diesem Einschub werden wir etwas Geometrie behandeln. Eine Motivation dazu liefert der nächste Paragraph

# 3.3.0 Motivation



Zunächst untersuchen wir die Bewegung eines Massenpunktes auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R (entspricht sphärischem Pendel). Für diese Bewegung gilt die Zwangsbedingung:

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} = 1$$
  $R = 1$  o.B.d.A.)

Die Bahn des Punktes liegt in der Menge aller Punkte auf der Oberfläche der sogenannten "Einheitskugel" oder auch "Einheitsphäre", die durch:

$$S^{(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

definiert ist.

Somit ist die Einheitsphäre der Konfigurationsraum  $S^{(2)} = \mathcal{M}$ .

Es stellt sich nun die Frage, wie man in diesem Konfigurationsraum rechnet. Beispielsweise interessiert man sich für die Geschwindigkeit ("die Ableitung der Bahnkurve"). Für zwei Orte in  $S^{(2)}$ :

$$\mathbf{r}_1 \in \mathcal{M} = S^{(2)}$$
$$\mathbf{r}_2 \in \mathcal{M} = S^{(2)}$$
$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \notin \mathcal{M}$$

gilt aber (i.A.). Wenn wir z.B. TAYLOR-entwickeln

$$\mathbf{r}(t) \approx \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_2)}{(t_2 - t_1)} (t - t_1) + \mathbf{r}(t_1) \xrightarrow{t_2 \to t_1} \mathbf{v}(t_1) (t - t_1) + \mathbf{r}(t_2)$$

haben wir das Problemm, dass dieser Ausdruck für  $\mathbf{r}(t)$  nicht im Konfigurationsraum liegt,  $\mathbf{r}(t) \notin \mathcal{M}$ . Somit muss geklärt werden, wie die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  und die Beschleunigung  $\dot{\mathbf{v}}(t)$  definiert werden muss, wenn die Bewegung ganz in  $S^{(2)}$  verlaufen soll.

In der Newton'schen Mechanik benötigt man die Beschleunigung!

# Lösung:

Die analytische Mechanik (nach LAGRANGE, HAMILTON etc.) verwendet generalisierte Koordinaten.

#### 3.3.1 Karten und Koordinaten

Definition:



Abbildung 3.4: zur Definition von Karten

Für eine Menge  $\mathcal{M}$  (Konfigurationsraum nach Lagrange) von Punkten im  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ , wollen wir Koordinaten einführen, um jeden Punkt aus  $\mathcal{M}$  zu bezeichnen ("labeln"). Koordinaten sind Tupeln von  $f \leq n$  reellen Zahlen  $q_1, \ldots q_f$  aus einem offenen Gebiet  $U \leq \mathbb{R}^f$ Bemerkungen:

- Die Zahl f der notwendigen Koordinaten heißt Dimension von  $\mathcal{M}$ .
- kartesische Koordinaten  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$  leisten das Gewünschte, wenn  $\mathcal{M}$  im  $\mathbb{R}^n$  eingebettet ist, häufig sind aber "krummlinige" Koordinaten viel nützlicher als kartesische.

## **Definition:**

Eine *Karte* ist eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^f$  mit den Koordinaten Punkt  $(q_1, \ldots, q_f) \in U$  zusammen mit eindeutig umkehrbaren Abbildungen von U in eine Untermenge  $f(U) \subset \mathcal{M}$ .  $(\subset \mathbb{R}^n)$ 

$$f: U \mapsto f(U) \subset \mathcal{M}; \quad r_i = f_i(q_1, \dots, q_f) \qquad i = 1 \dots n$$

Was wir hier unter Karten verstehen, kann man vergleichen mit Landkarten die jeden Punkt einer geographischen Region genau beschreiben.

1. Beispiel:

 $\overline{\mathcal{M} = S^{(1)}}$  Einheitskreis mit n = 2 und damit  $\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 

$$S^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

a) in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Sei}\ U\ \mathrm{gegeben:} & q\in ]-1,1[=U\\ \mathrm{Eine\ Abbildung\ sei:} & f:\ x=q & y=\sqrt{1-q^2}\\ \mathrm{sodass} & f_1(U)=\{\mathrm{Halbkreis},y>0\}\\ \mathrm{Andere\ Abbildung\ sei} & f_2:\ x=q & y=-\sqrt{1-q^2}\\ \mathrm{sodass}\ f_2(U)=\{\mathrm{Halbkreis},\ y<0\} \end{array}$$

b) Karte in Polarkoordinaten:

$$\varphi_1 \in ]0,2\pi[$$

$$x = \cos \varphi_1 \qquad y = \sin \varphi_1$$

$$f(u) = \left\{ \text{Kreis} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

**Bem.**:  $S^{(1)}$  ist Konfigurationsraum des Pendels (3.3.2)

## 2. Beispiel:

Wir betrachten wieder die Einheitssphäre  $\mathcal{M} = S^{(2)}$  in  $\mathbb{R}^3$ :  $S^{(2)} = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Damit folgt f = 2.

a) Zunächst wollen wir dieses Problem in kartesischen Koordinaten behandeln:

$$(q_1,q_2) \subset \left\{ \text{offener Einheitskreis} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \text{ mit } q_1^2 + q_2^2 < 1 \right\} = U$$

Mit der Abbildung in die Kugel:

$$f: \quad x = q_1, \quad y = q_2, \quad z = \sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2}$$
$$f(u): \{\text{Halbkugel } z > 0\}$$

b) Karte in der stereographischen Projektion für y = 0:



Abbildung 3.5: stereographische Projektion ergibt sich als Durchstoßpunkt der Gerade durch den Nordpol und dem Punkt auf der Erde mit der Tangentialebene des Südpols.

 $\begin{array}{ll} \text{Geradengleichung:} & g(s) = z + \frac{1-z}{(-x)}(s-x) \\ & \text{Durchstoßpunkt:} & g(q_1) = -1 \\ \Rightarrow q_1 = \frac{z}{1-z} & \text{also die Fläche der Karte: } U = \mathbb{R}^2 & -\infty < q_1, q_2 < \infty \\ & \text{Das Bild ist:} & f(U) = \Big\{ \text{Einheitskugel ohne Nordpol, } S^{(2)} \backslash \left\{ \begin{smallmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \Big\} \\ & \text{Umkehrabbildung:} & f^{-1}: & q_1 = \frac{2x}{1-z} & q_2 = \frac{2y}{1-z} \end{array}$ 

## c) Karte in Polarkoordinaten





#### **Bemerkungen:**

- Eine Karte reicht typischerweise nicht aus, um die Einheitssphäre ganz darzustellen.
- U soll eine offene Menge sein, um infinitesimale Verschiebungen  $dq_i$  um jeden Punkt zuzulassen; dadurch sind Ableitungen möglich.

Die Lösung von LAGRANGE zum Problem, das in der Motivation gestellt wurde, lautet, dass wir nur in U differenzieren müssen und nicht im Konfigurationsraum  $\mathcal{M}$ . Für die Geschwindigkeit benötigen wir nur  $\dot{\varphi}(t)$  und  $\dot{\vartheta}(t)$ .

Da U eine offene Menge und einfache "flache" Teilmenge des  $\mathbb{R}^{f}$  ist, können wir das und es ist wie gewohnt.

#### **Definition:**

Ein Atlas ist eine Sammlung von "kompatiblen" Karten, so dass jeder Punkt von  $\mathcal{M}$  in mindestens einer Karte dargestellt werden kann.

Zwei Karten U und  $\overline{U}$  haben einen überlappenden Bildbereich in M:  $f(U) \cap \overline{f}(\overline{U}) = \overline{M} \neq 0$ .

Beide Karten heißen kompatibel, wenn die Abbildungen:

$$\begin{array}{ll} f^{-1} \circ \bar{f} : & q_i = \bar{g}_i(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_f) \\ \bar{f}^{-1} \circ f : & \bar{q}_i = g_i(q_1, \dots, q_f) \end{array} \quad \text{ für } i = 1, \dots, f$$

differenzierbar und zueinander invers sind.

125



Diese Formulierung ist viel komplizierter, als was man sich darunter vorstellen muss. Vergleichen wir hier wieder mit Landkarten, so sind dort zwei Landkarten genau dann kompatibel, wenn die selbe Strecke auf beiden Karten auch gleich lang ist, dazu muss man vielleicht auf der einen von Inch in Zentimeter umrechnen, aber es gibt diese Umrechnungsformeln und sie sind umkehrbar.

# 3.3.2 Koordinatentransformationen

Der Übergang  $\mathbf{q} \to \bar{\mathbf{q}}$  oder  $\bar{\mathbf{q}} \to \mathbf{q}$  heißt Koordinatentransformation (oder auch Punkttransformation). Diese Definition der Koordinatentransformation ist viel allgemeiner gehalten als bei der Relativitätstheorie (vgl. LORENTZtransformation), die linear war.

In der analytischen Mechanik muss nur die Kompabilität von Koordinaten bei Koordinatentransformationen gesichert sein.

#### Satz:

Eine differenzierbare Koordinatentransformation mit JACOBI-Determinante  $\neq 0$  im Punkt P ist lokal umkehrbar und gibt zulässige Koordinatentransformation in Umgebung von P.

#### **Beweis:**

Eine Koordinatentransformation  $\bar{q}_i = g_i(q_1, \ldots, q_f) = g_i(\mathbf{q})$  für  $i = 1 \ldots f$  ist im Punkt P differenzierbar, wenn die JACOBI-Determinante J von Null verschieden ist, d.h.:

$$\det \frac{\partial g_i}{\partial q_j}\Big|_P = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{q_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial q_f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_f}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial g_f}{\partial q_f} \end{pmatrix} \right|_P \neq 0$$

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt dann, dass die f Gleichungen für die  $\bar{q}_i$ :

$$F_i(\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_f,q_1,\ldots,q_f) = \bar{q}_i - g_i(\mathbf{q}) = 0 \qquad \text{für} \quad i = 1,\ldots,f$$

aufgelöst werden können nach den  $\mathbf{q}=\bar{g}(\bar{\mathbf{q}})$ 

Beispiel: ebene Polarkoordinaten:

$$x = r \cos \varphi$$
  $y = r \sin \varphi$   $r = \sqrt{x^2 + y^2}$   $-\infty < x, y < \infty$ 

also:

$$\varphi = \operatorname{arccot} \frac{x}{y}, \quad y \neq 0, \quad \varphi = 0, \quad y = 0 \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad 0 < r < \infty$$
$$J = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{y}} & \frac{y}{\sqrt{y}} \\ \frac{-y}{\sqrt{y}} & \frac{x}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0 \quad \text{für } r \neq \infty$$

**Fazit:** Es genügt bei einer Koordinatentransformation in der analytischen Mechanik sicher zu stellen, dass die JACOBI-Matrix  $\neq 0$  ist (fast überall).

#### 3.3.3 Koordinatentransformation zur Eliminierung von Zwangsbedingungen

# **Definition:**

• *m* holonome Zwangsbedingungen  $(F_i(q_1, \ldots, q_l, t) = 0)$  sind *funktional unabhängig*, wenn eine differenzierbare Koordinatentransformation:

$$q_i = f_i(Q_1, \dots, Q_F, \bar{q}_{F+1}, \dots, \bar{q}_f, t) \quad i = 1..f$$

existiert, so dass die Zwangsbedingungen lauten:

$$F_i(\ldots q_i(\mathbf{Q},\bar{q})\ldots) = F_i(Q_1,\ldots,Q_F,\bar{q}_{F+1},\ldots,\bar{q}_f,t) = 0$$

und die Funktionaldeterminante im Punkt P mit i = 1, ..., m:

Det 
$$\left\{\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \bar{q}_j}\right\} \neq 0$$
 erfüllt, für  $j = F + 1, \dots, f$  wobei  $F = f - m$  und  $i = 1, \dots, m$ 

Nach dem Satz über implizite Funktionen können dann die m Zwangsbedingungen  $F_i = 0$  in der Umgebung von P eindeutig aufgelöst werden nach

$$\bar{q}_i = g_i(Q_1, \dots, Q_F, t) \qquad F+1 \le i \le f$$

sodass dies eingesetzt in Zwangsbedingungen diese erfüllt.

$$\mathbf{\bar{F}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(\mathbf{Q}, t), t), t) = 0$$

und damit ist es gelungen auf M die alten Koordinaten  $\mathbf{q}$  durch die neuen  $\mathbf{Q}$  auszudrücken und die Zwangsbedingungen automatisch zu erfüllen.



Beispiel<sup>2</sup>:

 $\overline{M}$  sei als Konfigurationsraum gegeben durch die Zwangsbedingung:

$$F(q_1,q_2) = 0$$

dann ist f = 2 und F = 1.

Wir betrachten als Beispiel ein Pendel der festen Länge l = 1, zunächst haben wir f = 2 Koordinaten  $(q_1 \& q_2)$  mit der Zwangsbedingung:

$$F(q,q_2) = q_1^2 + q_2^2 - 1 = 0$$

Die Zwangsbedingung ist funktional unabhängig, also führen wir eine Koordinatentransformation in Polarkoordinaten durch:

$$q_1 = \bar{q} \cos Q = f_1(\bar{q}, Q) \qquad 0 < \bar{q} , 0 < Q < 2\pi$$
$$q_2 = \bar{q} \sin Q = f_2(\bar{q}, Q)$$

Die Zwangsbedingung lautet dann:

$$\bar{F}(\bar{q},Q) = F(f_1,f_2) = \bar{q}^2 - 1 = 0$$

Und weil det  $\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{q}} = 2\bar{q} \neq 0$ , kann man also  $\bar{F} = 0$  und man kann nach  $\bar{q} = g(Q)$  auflösen. In diesem liegt ein Spezialfall vor, nämlich dass  $\bar{q} = 1 = const.$ , also unabhängig von Q ist.

Fazit: Die Betrachtung der Funktionaldeterminanten genügt, um die Zwangsbedingungen durch die Wahl geschickter Koordinaten zu eliminieren.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Dieses Beispiel wurde nicht in der Vorlesung besprochen.

#### Zur Erinnerung:

### Satz über implizite Funktionen:

Seien  $U_1 \subset \mathbb{R}^k$  und  $U_2 \subset \mathbb{R}^m$  offene Teilmengen und

$$F: U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m, \qquad (x,y) \mapsto F(x,y)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei  $(a,b) \in U_1 \times U_2$  ein Punkt mit

$$F(a,b) = 0.$$

Die  $m \times m\text{-}\mathrm{Matrix}$ 

$$\frac{\partial F}{\partial y} := \frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

9.17

9.0

sei im Punkt (a,b) invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung  $V_1 \subset U_1$  von a, eine Umgebung  $V_2 \subset U_2$  von b sowie eine stetig differenzierbare Abbildung  $g: V_1 \to V_2 \subset \mathbb{R}^m$  mit g(a) = b, so dass

$$F(x,g(x)) = 0$$
 für alle  $x \in V_1$ 

Ist  $(x,y) \in V_1 \times V_2$  ein Punkt mit F(x,y) = 0, so folgt y = g(x).<sup>3</sup>

## 3.3.4 Differenzierbare Mannigfaltigkeit

#### **Definition:**

Eine zusammenhängende Menge ist eine f-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, wenn ein Atlas aus kompatiblen Karten existiert, so dass jeder Punkt von  $\mathcal{M}$  in mindestens einer Karte vorhanden ist.

### Bemerkungen:

- Mannigfaltigkeiten sind Konzepte zur Verallgemeinerung des Raumes auf krummlinige Koordinaten.
- Differentation etc. wird mit den Koordinaten in den kartesischen Gebieten  $U \subset \mathbb{R}^f$  durchgeführt.
- Der Konfigurationsraum  $\mathcal{M}$  eines LAGRANGE-Systems ist eine f-dimensionale Mannigfaltigkeit.

# 3.4 Symmetrien und Erhaltungssätze

Symmetrien und Erhaltungssätze sind Einsichten in mechanische Systeme, die aus der Formulierung als Variationsprinzip nach LAGRANGE abgeleitet werden können. (analoge Ergebnisse gelten für alle Variationsprobleme)

#### 3.4.1 Bahndeterminismus

Wir erinnern uns an die Beobachtung von NEWTON:

Durch Anfangsorte und Anfangsgeschwindigkeiten sind die Bahnen eindeutig mit der NEWTON'schen Bewegungsgleichung festgelegt:

 $m\mathbf{\dot{v}}=\mathbf{F}$ 

natürlich stellt sich nun die Frage, ob dies auch in der Formulierung der Mechanik nach LAGRANGE gilt. Dazu betrachten wir die EULER-LAGRANGE-Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 = \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \left( + \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)$$

Wir definieren die sogenannte LEGENDRE-Matrix:

$$L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Der Beweis des Satzes und weitere Anmerkungen z.B. in [For]

Wenn die LEGENDRE-Matrix  $L_{ij}$  invertiert werden kann (gemäß den Rechenregeln aus der Linearen Algebra bedeutet dies, dass ihre Determinante von Null verschieden sein muss), dann sind die EULER-LAGRANGE-Gleichungen äquivalent zu folgenden expliziten Differentialgleichungen 2<sup>ter</sup> Ordnung:

$$\ddot{q}_i + \left(\sum_{j=1}^f \left(L^{-1}\right)_{ij} \sum_k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = 0$$

Diese Gleichungen liefern nach den Sätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen eindeutige Lösungen zu den Anfangswerten:

$$q_i(t_0) = q_{i0}$$
 und  $\dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_{i0}$  für  $i = 1 \dots f$ 

Daraus folgt, dass es sich auch bei der LAGRANGE-Formulierung der Mechanik um eine eindeutige deterministische Bewegung handelt, für den Fall, dass die Determinante der LEGENDRE-Matrix von Null verschieden ist. Dann legen also die Anfangswerte für Ort und Geschwindigkeit die Bahn eindeutig fest. Bemerkung:

Ein Gegenbeispiel, wo Variationsrechnug keine eindeutige Lösung liefert, ist das Beispiel der kürzesten Bahn in der Ebene:

$$L = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}$$
$$L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$
$$\Rightarrow L_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{x}^2 & -\dot{x}\dot{y} \\ -\dot{x}\dot{y} & \dot{y}^2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}$$

mit det  $(L_{ij} \equiv 0)$ .

Es existziert also keine eindeutige Lösung, was wir nicht erwartet haben. Über die Geschwindigkeiten kann keine Aussage getroffen werden.

 $\Rightarrow$  Gerade kann mit beliebiger Geschwindigkeit v durchlaufen werden

#### 3.4.2 Kovarianz

### **Definition:**

*Kovariant* also *(form-)invariant* heißen Bewegungsgleichungen, die in beliebigen Koordinatensystemen dieselbe funktionale Form annehmen.

Die Idee ist, dass die Physik unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist.

#### **Bemerkung:**

Die NEWTON'sche Mechanik mit  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$  ist nur kovariant unter Galilei-Transformation, ansonsten treten Scheinkräfte auf.

#### Satz:

Die Eigenschaft einer Kurve, eine Extremale des Wirkungsfunktionals zur LAGRANGEdichte zu sein, ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten.

Dieser Satz bedeutet, dass die EULER-LAGRANGE-Gleichungen kovariant unter beliebigen zulässigen Koordinatentransformationen (Punkttransformation) sind.

Die Kovarianz ist der große Vorteil der Variationsrechnung!

Wir wollen im Folgenden den Satz beweisen: Die Behauptung lautet, dass aus:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} = 0 \qquad (z.B. \text{ kartesische Koordinaten})$$
  
und 
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0 \qquad (z.B. \text{ Polarkoordinaten})$$

die selbe Bahn folgt, wenn die Koordinaten zusammenhängen durch Koordinatentransformation:

 $\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{Q},t)$ 

und beide LAGRANGEdichten durch Einsetzten der Koordinaten verknüpft sind.

$$L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = l\left(\mathbf{f}(\mathbf{Q}, t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{f}(\mathbf{Q}, t), t\right)$$

Wir stellen folgende Vorüberlegungen an (mit EINSTEIN'scher Summenkonvention):

-

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_i = \dot{q}_i = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial Q_k}\dot{Q}_k$$

da f nur von Koordinaten **Q** abhängt (und  $\dot{\mathbf{Q}}$  nicht auftaucht)

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \tag{*}$$

da  $\dot{Q}_j$  nur explizit auftaucht.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial Q_j} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial Q_j \partial Q_k} \dot{Q}_k \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_j} \tag{**}$$

Damit folgt für  $X := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L}{\partial Q_j}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial Q_j} &= \frac{\partial l}{\partial Q_j} = \sum_i \frac{\partial l}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \sum \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_i \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} \stackrel{*}{=} \sum_i \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \stackrel{\mathrm{Prod.-Reg.}}{=} \sum_i \left( \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \sum_i \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right) \end{aligned}$$

Die letzten drei Formeln liefern:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = \sum_i \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \sum_i \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\right)$$

da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial Q_j \partial t} + \sum_k \frac{\partial^2 f_i}{\partial Q_j \partial Q_k} \dot{Q}_k \stackrel{\star\star}{=} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}$$

folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$$

Somit ist bewiesen, dass die EULER-LAGRANGE-Gleichungen für die  $\mathbf{Q}$ -Koordinaten gelten, weil sie für die  $\mathbf{q}$ -Koordinaten gelten.

also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial Q_j} - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0 \quad \Leftarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} = 0$$

### 3.4.3 Kovarianz unter holonomen Zwangsbedingungen

In 3.2.5 wurde behauptet, dass das LAGRANGE-System  $l(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  mit n Zwangsbedingungen  $F_i(\mathbf{q}, t)$  für  $i = 1, \ldots, n$  gelöst wird durch  $L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)$  in der  $F = f \cdot n$  dimensionalen Mannigfaltigkeit (Konfigurationsraum)  $\mathcal{M}$ . In 3.3.3 wurden Koordinaten gefunden, so dass innerhalb von  $\mathcal{M}$  gilt:

$$q_i = f_i \left( \mathbf{Q}, \bar{\mathbf{q}}, t \right) \qquad i = 1, \dots, f$$

und alle  $\bar{q}_i$  durch die  $\mathbf{Q}(t)$  bestimmt sind:

$$\boxed{\bar{q}_i = g_i\left(\mathbf{Q}, t\right)} \qquad \text{für} \qquad i = F + 1, \dots, f$$

Die eingeschränkten Koordinaten  $\bar{\mathbf{q}}$ , die über die Zwangsbedingungen durch die  $\mathbf{Q}$  festgelegte Werte annehmen, sichern uns, dass  $\mathbf{F}(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, t)), t) = 0$  für alle  $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}$ . Damit können wir fortfahren

$$L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = l(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q(Q, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{q}), t)$$

Bei der Berechung der Bahn in der Variationsrechnung können also nur die  $Q_i,...,Q_F$  variiert werden, während die  $\bar{q}_{F+1}, ..., \bar{q}_f$  aus **Q** folgen und ihre Werte  $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(\mathbf{Q})$  annehmen. Die Variation der Wirkung unter  $Q_i(t) \to Q_i(t,\varepsilon) = Q_i(t) + \varepsilon \, \delta Q_i(t)$  (Vergleichsbahnen) lautet:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = 0 = \int_{t_{-}}^{t_{+}} \mathrm{d}t \, \sum_{j=1}^{F} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{j}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{j}}\right) \delta Q_{j}(t)$$

weil die  $\bar{\mathbf{q}}$  feste Funktionen der  $\mathbf{Q}$  sind.

Zu beachten ist, dass die  $\delta Q_i$  beliebige Funktionen darstellen bis auf Anfangs- und Endpunkte, für die gilt:  $\delta Q_i(t_{\pm}) = 0$ .  $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}q}\Big|_q = 0$  zu setzen bedeutet die F EULER-LAGRANGE-Gleichungen zu lösen. Folglich gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} \neq 0$$

#### 3.4.4 Eichinvarianz

Die Idee ist: Beim Variationsprinzip werden Integrale miteinander verglichen. Das heißt aber nicht, dass die Integranden auch gleich sein müssen.

**Satz:** Mit einer beliebigen Funktion  $\chi = \chi(\mathbf{q}, t)$ , die nicht von  $\dot{\mathbf{q}}$  abhängt, ergeben L und  $\bar{L} = L + \frac{d}{dt}\chi(\mathbf{q}, t)$  die selben extremalen Bahnen.

**Beweis:** Der Wert der Wirkung  $\overline{S}$  lautet dann:

$$\bar{S} = \int_{t_{-}}^{t_{+}} \mathrm{d}t \ \bar{L} = \int_{t_{-}}^{t_{+}} \mathrm{d}t \ L + \int_{t_{-}}^{t_{+}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \chi(\mathbf{q}, t) \ \mathrm{d}t = S + \underbrace{\chi(\mathbf{q}(t_{+}), t_{+}) - \chi(\mathbf{q}(t_{-}), t_{-})}_{\text{const.}}$$

#### Bemerkung:

- Die hinteren Terme bilden eine Konstante, da beim Vergleich der Bahnen alle durch die Anfangsund Endpunkte gehen. Diese Konstante beeinflusst die Bahn also nicht.
- Das erklärt das Verhalten von L bei Eichtransformation der elektromagnetischen Potentiale  $\phi$  und A in 3.2.1D

Es gilt:

$$\bar{\phi} = \phi + \partial_t \chi$$
  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \nabla \chi$  und also  $\bar{L} = L - q \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \chi$ 

mit Ladung q., was also die Bahnen von Teilchen in elektromagnetischen Feldern invariant lässt.

## 3.4.5 Das Noether-Theorem

Das NOETHER-Theorem beschreibt den Zusammenhang zwischen Symmetrien der LAGRANGEdichte L und Erhaltungsgrößen

#### A) Erinnerung: Autonome Systeme

vgl. 3.2.4.2B

Wenn die Lagrangedichte ein autonomes System beschreibt, also wenn gilt  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , dann ist die HAMIL-TON'sche Funktion konstant:

$$H = E = \text{const.}$$
$$H = \dot{\mathbf{q}} \, \dot{\mathbf{p}} - L = \text{const.} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

 $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  bedeutet, dass das System zeitlich invariant ist. Ob wir die Bewegung bei  $t_0$  starten (mit den Anfangsbedingungen  $\mathbf{q}_0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_0$ ) ist identisch zu der Bewegung, die bei  $t'_o = t_0 + \delta t_0$  gestartet wird mit den gleichen Anfangsbedingungen. Beide Bahnen sind gleich bis auf eine zeitliche Verschiebung um  $\delta t_0$ . Sei die eine Bahn  $\mathbf{q}(t,t_0)$ , dann ist die zeitlich verschobene Bahn  $\mathbf{q}'(t,t'_0) = \mathbf{q}(t + \delta t_0,t_0)$ 

### Bemerkungen:

- Häufig ist H = T + U = E die Gesamtenergie. Dann spricht man von Energieerhaltung.
- Im Falle rheonomer Zwangsbedingungen, die aber auf ein autonomes L führen, ist  $H = \text{const.} \neq$ Gesamtenergie, weil die Zwangskräfte Arbeit leisten (siehe Perle auf drehendem Ring (...)). Das ergibt sich aus dem Vergleich von H = T + U und  $\dot{Q} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} - L$ .

ges. Energie: 
$$E = T + U = \frac{m}{2}v^2 + mgz = \frac{m}{2}R^2 \left(\omega^2 \sin^2 Q + \dot{Q}^2\right) + mgR \cos Q$$
$$H = \dot{Q}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} - L(Q, \dot{Q}) = \frac{m}{2}R^2 \left(-\omega^2 \sin^2 Q + \dot{Q}^2\right) + mgR \cos Q \quad \text{also} \quad H \neq E$$
Zwangskraft  $Z_{\varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \varphi}\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(Q,t)} = m\omega R^2 \sin 2Q\dot{Q} \quad \text{leistet Arbeit}$ 

# B) Erinnerung: Zyklische Variable

Zu einer zyklischen Variablen  $q_i$  (d.h.  $q_i$  taucht nicht in L auf,  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ) gehört eine Erhaltungsgröße, der zugehörige kanonische Impuls:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const.}$$

Beweis: EULER-LAGRANGE-Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Beispiel:

in Ebene  $L(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U$ , sei z.B.  $U(x) = \frac{k}{2}x^2$  mit  $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ , also konstant entlang der y-Achse



Der Impuls in y-Richtung ist konstant. Das Potential U (und damit L) ist invariant (symmetrisch) unter Verschiebung entlang der y-Achse, d.h. unter der Abbildung  $y \to y' = y + \alpha$ . D.h. es gilt:

$$L'(x,y'-\alpha,\dot{y}',\dot{x}) = L(x,y',\dot{x},\dot{y}')$$

L ändert sich bei der Verschiebung (Koordinatentransformation) entlang der y-Achse nicht!

**Bemerkung:** Verschiebung entlang der X-Achse  $x \to x' = x + \beta$ :

$$L' = \frac{m}{2} (\dot{x}'^2 - \dot{y}^2) - U(x' - \beta) \neq L(x', y, \dot{x}', \dot{y}')$$

da z.B. im harmonischen Fall

$$U(x' - \beta) = \frac{k}{2}x'^2 - \frac{k}{2}(2x'\beta - \beta^2) \neq U(x') = \frac{k}{2}x'^2$$

Natürlich gilt die Kovarianz und L'(x',...) gibt die selbe Bahn, wie L(x). Jedoch liefert eine Symmetrie L' = L, sofort eine Erhaltungsgröße.

Die Idee stammt von EMMY NOETHER aus dem Jahr 1918: Wenn ein System invariant/symmetrisch ist unter kontinuierlicher Verschiebung, dann gibt es eine Erhaltungsgröße.

#### C) Noether-Theorem

Betrachtet werde eine kontinuierliche Abbildung  $h^{\alpha}$  des Konfigurationsraumes  $\mathcal{M}$  (Verschiebung)

$$h^{\alpha}$$
:  $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ :  $\bar{q}_i = h_i^{\alpha}(\mathbf{q}, t)$   $i = 1, \dots, f$ 

die nach  $\alpha$  stetig differenzierbar sei, für  $\alpha = 0$  die identische Abbildung  $\bar{q}_i = h_i^{\alpha}(\mathbf{q}, t)|_{\alpha=0} = q_i$  sei und invertierbar ist, d.h.  $q_i = \bar{h}_i^{\alpha}(\bar{\mathbf{q}}, t)$ . Wenn LAGRANGEdichte  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  bis auf eine Eichtransformation invariant bleibt.

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\bar{\mathbf{h}}^{\alpha}(\bar{\mathbf{q}}, t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{\mathbf{h}}^{\alpha}(\bar{\mathbf{q}}, t), t)$$
  
=:  $\bar{L}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t, \alpha)$  Definition von  $\bar{L}$   
=  $L(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(\bar{\mathbf{q}}, t\alpha)$ 

(mit der alten LAGRANGE-Dichte!) Dann ist folgende Funktion J konstant:

$$J\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t\right) = \left. \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t\right)}{\partial \dot{q}_{i}} \frac{\partial q_{i}(\bar{\mathbf{q}}, \alpha, t)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial G\left(\bar{\mathbf{q}}, \alpha, t\right)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \text{const.}$$

J ist eine Erhaltungsgröße, ein Integral der Bewegung.

#### **Bemerkung:**

- Zu jeder Symmetrie gehört eine Erhaltungsgröße
- Nicht verwechseln mit Kovarianz! Bei der Koordinatentransformation durch Einsetzen von  $\bar{L}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, \alpha, t) = L(\bar{\mathbf{h}}^{\alpha}(\bar{\mathbf{q}}, t), \dot{\bar{\mathbf{h}}}^{\alpha}(\bar{\mathbf{q}}, t), t)$  folgt die selbe Bahn aufgrund der Kovarianz, die Funktionen L und  $\bar{L}$  sind jedoch unterschiedlich.

**Beweis:** Nach der Annahme gilt für alle  $\alpha$  (allerdings ist nur  $\alpha = 0$  benötigt):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}L(\bar{\mathbf{q}},\dot{\bar{\mathbf{q}}},t)\bigg|_{\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,\left(\bar{L}\left(\bar{\mathbf{q}},\dot{\bar{\mathbf{q}}},\alpha,t\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,G\left(\bar{\mathbf{q}},t,\alpha\right)\right)_{\alpha=0} = 0$$

Dies ist das Gleiche wie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \left. \left( \bar{L}\left( \bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, \alpha, t \right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G\left( \bar{\mathbf{q}}, t, \alpha \right) \right) \right|_{\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \left. \left( L\left( \bar{\mathbf{h}}^{\alpha}(\bar{\mathbf{q}}, t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \bar{\mathbf{h}}^{\alpha}(\bar{\mathbf{q}}, t) t \right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G\left( \bar{\mathbf{q}}, t, \alpha \right) \right)_{\alpha=0} = 0$$

Mit EINSTEIN'scher-Summenkonvention geschrieben sieht das folgendermaßen aus:

· 0

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{h}_i^{\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \bar{h}_i^{\alpha}}{\partial \alpha} - \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \alpha} G\left(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha\right) \right|_{\alpha=0} = 0$$

weil bei einem festen  $\bar{\mathbf{q}}$  die Ableitung  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \rightarrow \frac{\partial}{\partial\alpha}$  wird. Die EULER-Gleichungen bringen uns:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

und es gilt:

$$\frac{\partial \dot{\bar{h}}_i^{\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \bar{h}_i^{\alpha}}{\partial \alpha}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[ \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial G(\bar{\mathbf{q}}, t, \alpha)}{\partial \alpha}}_{J} \right]_{\alpha = 0} = 0$$

**Bemerkung:** 

- Dies ist ein konstruktiver Beweis!
- Er erfordert eine kontinuierliche Abbildung (Parameter  $\alpha$ ). Das Noether-Theorem liefert keine Erhaltungsgrößen bei diskrete Symmetrien (z.B. Spiegelung)
- Symmetrie  $\rightarrow$  Erhaltungsgröße Umkehrung gilt in LAGRANGE-Mechanik nicht! (Gegenbeispiel: RUNGE-LENZ-Vektor beim  $\frac{1}{r}$ -Potential)( $\rightarrow$  HAMILTON Mechanik 3.5.4)

# D) Homogenität

# Translationsinvarianz und Impulserhaltung (beim N-Teilchen-System)

Räumlich homogen (translationsinvariant) bedeutet, dass eine Verschiebung

$$\bar{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{a}$$
  $i = 1, \dots, N$  Teilchenindex mit  $\mathbf{a}$ : beliebiger Vektor

die LAGRANGEdichte invariant lässt. D.h.:

$$\begin{split} L &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \, \dot{\mathbf{r}}_i^2 - U(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \, \dot{\mathbf{r}}_i^2 - U(\bar{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{a}, \cdots, \bar{\mathbf{r}}_N + \mathbf{a}) \\ &\stackrel{\text{Bed.}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \, \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i^2 - U(\bar{\mathbf{r}}_1, \cdots, \bar{\mathbf{r}}_N) \\ \text{d.h.} \qquad \bar{L}(\bar{\mathbf{r}}_i, \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i) = T(\dot{\bar{\mathbf{r}}}_i) - U(\bar{\mathbf{r}}_i) \end{split}$$

Dies erfüllt die Zwangsbedingungen

- (i)  $U = \text{const.} (\rightarrow \text{langweilig})$
- (ii) abgeschlossenes N-Teilchen-System mit nur internen Wechselwirkung; U hängt nur von Abstandsvektoren  $\mathbf{r}_i \mathbf{r}_0$  ab

$$U = \overline{U} \left( \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \dots \right)$$

 $\Rightarrow$  folgen drei erhaltene Größen (da drei Verschiebungen mit  $a_x, a_y, a_z$ )

$$\begin{split} J_{a_x}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial a_x} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_{i=1}^N m \dot{x}_i = p_{x_i} \end{split}$$

x-Komponente des Gesamtimpulses wobei verwendet wurde

$$\mathbf{r}_i = \bar{\mathbf{r}}_i + \mathbf{a}$$
  $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial a_x} = \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}$ 

Insgesamt folgt aus den drei Verschiebungen, dass für den Gesamtimpuls folgt:

$$\mathbf{P} = \sum_{i}^{N} \mathbf{p}_{i} = \sum m_{i} \dot{\mathbf{r}}_{i} = \text{const.}$$

134

Der Gesamtimpuls  $\mathbf{P}$  ist erhalten bei Homogenität des Raums.

#### E) Isotropie des Raums und Drehimpulserhaltung

Räumlich isotrop bedeutet, dass eine Drehung um einen beliebigen Winkel $\alpha$ um eine beliebige Achse das System invariant lässt.

Wähle die z-Achse parallel zur Drehachse mit Drehmatrix  $R_{\alpha}$ 

$$\underline{\underline{R}}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0\\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt also  $\bar{\mathbf{r}}_i = \underline{R}_{\alpha} \mathbf{r}_i$  Damit für die umgekehrte Abbildung

$$\mathbf{r}_i = \underline{\underline{R}}_{\alpha}^T \bar{\mathbf{r}}_i$$
 und  $\dot{\mathbf{r}}_i = \underline{\underline{R}}_{\alpha}^T \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i$ 

Weil  $RR^T = 1$  orthogonal ist, und weil der Ort und die Geschwindigkeit als Vektoren gleich transformiert werden. Damit folgt für  $\bar{L} = L(\mathbf{r}(\bar{\mathbf{r}}))$  eingesetzt:

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i \underbrace{\underline{\underline{R}}_{\alpha} \underline{\underline{R}}_{\alpha}^T}_{=1} \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i - U(\dots, \underline{\underline{R}}_{\alpha}^T (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j), \dots)$$
$$\stackrel{*}{=} L(\bar{\mathbf{r}}, \dot{\bar{\mathbf{r}}}) \Leftrightarrow U(\dots, \underline{\underline{R}}^T (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j), \dots) = U(\dots, \bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j, \dots)$$

(\*) Symmetrie, falls das Potential rotationssymmetrisch ist.

Wenn  $U = U(\ldots, |\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j|, \ldots)$ , dann ist U invariant unter beliebiger Rotation und es folgt, dass es Erhaltungsgröße gibt, die Drehimpuls genannt werden. Da jede Drehung in drei unanbhängige Drehungen um drei (nicht entartete) Achsen zerlegt werden kann, gibt es drei erhaltene Größen  $\rightarrow$  Drehimpuls  $\mathbf{L}$  ist ein Vektor.

 $\rightarrow$  Für die Behauptung der Erhaltungsgröße wird

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}_i(\bar{\mathbf{r}}_i, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$$

benötigt. Weil  $\Delta \mathbf{r} \perp \mathbf{z}$  und  $\mathbf{r}$  für  $x \to 0$ 

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{r} = \alpha \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r} \qquad \alpha \to 0$$
$$\rightarrow \mathbf{r}_i \to \bar{\mathbf{r}}_i + \alpha \hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{r}}_i + \mathcal{O}(\alpha^2)$$



Erhaltungsgröße J lautet:

$$J_z = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \ (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}_i) = \hat{\mathbf{z}} \sum_{i=1}^N \underbrace{(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)}_{L_i} = L_z$$

 $L_z$  ist die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses L, dessen drei Komponenten also bei Isotropie des Raums erhalten sind.

#### F) Galilei-Invarianz und Schwerpunktsatz

Wenn ein homogenes System unter einer (speziellen) GALILEI-Transformation  $\bar{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{v} t$  bis auf eine Eichtransformation invariant ist, d.h.

$$\bar{L} = \sum_{i} \frac{m_i}{2} \left( \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i + \mathbf{v} \right)^2 - U \left( \underbrace{\left( \dots, \left( \bar{\mathbf{r}}_i + \mathbf{v} t \right) - \left( \bar{\mathbf{r}}_j + \mathbf{v} t \right), \dots \right)}_{(*)} \right)$$

und das System homogen ist, d.h. (\*) =  $U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$  also

$$\bar{L} = \sum_{i} \frac{m_i}{2} \, \dot{\mathbf{r}}_i^2 - U(\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j) + \sum_{i} \frac{m_i}{2} \left( 2 \, \mathbf{v} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i + v^2 \right)$$
$$= L(\bar{\mathbf{r}}, \dot{\bar{\mathbf{r}}}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i} \frac{m_i}{2} \left( 2 \, \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{r}}_i + v^2 t \right)$$

Weil eine Eichtransformation mit  $G=\sum_i \frac{m_i}{2}(2{\bf r}\cdot{\bf v}+{\bf v}^2)$  die Bahn nicht ändert, gibt es die 3 Erhaltungsgrößen

$$\mathbf{J} = \sum_{i} \dot{\mathbf{p}}_{i} \frac{\partial \mathbf{r}_{i}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{m_{i}}{2} \left( 2 \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_{i} + v^{2} t \right) \Big|_{\mathbf{v}=0}$$
$$\mathbf{J} = \sum_{i} \mathbf{p}_{i} t - m_{i} \mathbf{r}_{i} = -MR_{0} = \text{const.}$$

Zur Berechnung benötigen wir "Matrix"  $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{v}t) = \underline{1}t$  somit folgt mit dem Gesamtimpuls  $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t)$  gilt

$$M\mathbf{R}(t) = \sum_{i} m_i \mathbf{r}_i(t) = \mathbf{p}t + M\mathbf{R}_0$$

also bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig gleichförmig (wobe<br/>i $M = \sum_i m_i$ Gesamtmasse). Bei einer Koordinatentransformation auf das mit<br/>  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P}}{M}$  bewegte Bezugssystem (Schwerpunktsystem) wird **R** also Erhaltungsgröße.

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0$$

und bewegt sich nicht.

# 3.5 Hamilton'sche Mechanik II

## 3.5.0 Motivation

Weg von NEWTON zu HAMILTON!

	Newton	Euler-Lagrange	HAMILTON
	$m\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{F}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$	$\dot{\mathbf{q}} = rac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \; ; \; \; \dot{\mathbf{p}} = -rac{\partial H}{\partial q}$
Forminvarianz:	Galilei-Transformation	KT $\bar{\mathbf{q}}' = \mathbf{f}(\mathbf{q}, t)$	kanonische Trafo. $\mathbf{q}  \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{Q}, \mathbf{P}$
unter Transformationen	(sonst + Scheinkräfte)	Kovarianz unter	hier Orte und Impulse
		Koordinatentrafo.	gleich behandelt

#### 3.5.1 Phasenraum

Der Phasenraum ist eine 2f-dimensionale Mannigfaltigkeit, gebildet mit den kanonischen Koordinaten  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (Position, Impuls)$ . Erinnerung:  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 

Die mechanische Bewegung entspricht einer Bahn im Phasenraum  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  festgelegt durch die HA-MILTON'schen Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad 1 \le i \le f$$

und Anfangsbedingungen:  $\mathbf{q}(t_o) = \mathbf{q}_0$ ;  $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0$ 



Abbildung 3.6: Phasenraum am Beispiel eines Pendels

Sätze über Differentialgleichungen: Zu jedem Startpunkt  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$  gehört genau eine Bahn, die keine Andere schneidet.

Bsp.: Pendel im Schwerefeld

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega_0^2 (1 - \cos q) = T + U$$

Autonomes Problem  $\Rightarrow$   $H = \mathbf{E} = \text{konst.}$ 

Die Abbildung  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  die jeden Anfangspunkt  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$  des Phasenraums zu einem  $t \neq t_0$  den Punkt  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  zuordnet, heißt *Phasenraumfluss*.

## 3.5.2 Satz von Liouville



Der Phasenraumfluss erhält das Volumen, d.h. füllen die Startwerte für viele Bahnkurven den Bereich  $D(t_0)$  des Phasenraums mit dem Volumen  $V_0$  aus, dann füllen die  $(\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t))$  Punkte der Lösungen der HAMILTON-Gleichungen zu den (vielen) Startpunkten einen anderen Bereich D(t) aus, der aber das selbe Volumen  $V(t) = V_0$  einnimmt

#### **Bemerkung:**

Dies ist die Grundlage der statistischen Mechanik ( $f \approx 10^{23}$ ). Beweis:<sup>4</sup>

$$V_0 = \int\limits_{D(t_0)} \prod_{i=1}^f \mathrm{d} q_i^0 \mathrm{d} p_i^0$$

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>der Beweis wurde in der Vorlesung nicht besprochen!

Volumen für  $t > t_0$ 

$$V(t) = \int_{D(t)} \prod_{i=1}^{f} \mathrm{d}q_i(t) \mathrm{d}p_i(t)$$

mit Abkürzungen

$$\mathbf{X} = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$$
 2*f*-dimensionaler Vektor  
 $\mathbf{X}^0 = (\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0)$  2*f*-dimensionaler Vektor

$$V(t) = \int_{D(t)} \prod_{i} dX_{i} \stackrel{(*)}{=} \int_{D(t_{0})} \prod_{i} dX_{i}^{0} \underbrace{\det\left\{\frac{\partial X}{\partial X_{j}^{0}}\right\}}_{(**)}$$

(\*): Transformation der Integrationsvariablen

(\*\*): Funktional determinante J der Transformation; die Behauptung laut et also J=1

Weil J(t) erfüllt (o.B.d.A.  $t_0 = 0$ )

$$\begin{split} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left| \frac{\partial X_i(t)}{\partial X_j(t_0 = 0)} \right| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left| \frac{\partial X_i(t+s)}{\partial X_j(t=0)} \right|_{s=0} \\ & \stackrel{\mathrm{Kettenregel}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left| \frac{\partial X_i(t+s)}{\partial X_k(t)} \frac{\partial X_k(t)}{\partial X_j(0)} \right|_{s=0} \\ & \stackrel{\mathrm{Det-Prod-Reg}}{=} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} J(s) \right|_{s=0} J(t) \end{split}$$

genügt es im Folgenden  $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J(t)\right|_{t=t_0=0}$ zu betrachten. Dazu muss die Funktionaldeterminante:

$$\det\left\{\frac{\partial X_i}{\partial X_j^0}\right\}\bigg|_{t=t_0+\delta t} = ?$$

betrachtet werden. Mit einer Taylorentwicklung:

$$X_i(t) = X_i^0 + \underbrace{F_i}_{(*)} \underbrace{\delta t}_{(**)} + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

(\*): Abkürzung (\*\*):  $\delta t = t - t_0$ 

mit 
$$F_i = \dot{X}_i \Big|_{t=t_0} = \begin{cases} \dot{q}_i(t_0) \\ \dot{p}_i(t_0) \end{cases}$$

erhält man:

$$\Rightarrow \qquad \text{Funktionalmatrix} \quad \frac{\partial X_i}{\partial X_j^0} = \delta_{ij} + \frac{\partial F_i}{\partial X_j^0} \ \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

Damit folgt für die Determinante (nach Sätzen aus der linearen Algebra):

$$\det\left\{\frac{\partial X_i}{\partial X_j^0}\right\} = \det\left\{\delta_{ij} + \frac{\partial F_i}{\partial X_j^0} \,\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2)\right\} = 1 + \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i}{\partial X_i^0} \,\delta t + \delta(\mathcal{O}t^2)$$
$$= 1 + \operatorname{Spur}\left\{\frac{\partial F_i}{\partial X_j^0}\right\} \,\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

(Nebenbemerkung: Beweis der letzten Gleichung siehe Entwicklungssatz der Determinante)

$$\operatorname{Spur}\left\{\frac{\partial F_i}{\partial X_j^0}\right\} = \underbrace{\sum_{i=1}^f \frac{\partial \dot{q}_i(t_0)}{\partial q_i^0} + \frac{\partial \dot{p}_i(t_0)}{\partial p_i^0}}_{\operatorname{Divergenz \ des \ Phasenraumflusses}} = (*)$$

und mit den HAMILTON-Gleichungen:

$$\begin{split} \dot{q}_i(t_0) &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \Big|_{t_0} \\ \dot{p}_i(t_0) &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \Big|_{t_0} \end{split}$$

$$(*) = \underbrace{\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial}{\partial q_i^0} \frac{\partial H}{\partial p_i^0} - \frac{\partial}{\partial p_i^0} \frac{\partial H}{\partial q_i^0}}_{\text{Divergenz des Phasenraumflusses}} = 0 \end{split}$$

also folgt  $\frac{d}{dt}J(t) = 0 \cdot J(t)$  und weil J(0) = 1, also  $J(t) \equiv 1$ 

$$\Rightarrow \quad V(t) = \int_{D(t_0)} \prod_i \, \mathrm{d}X_i^0 = V(0)$$

**Bemerkung:** Der Phasenfluss ist divergenzfrei! (Vergleichbar mit inkompressiblen Flüssigkeiten aus der Hydrodynamik)

# 3.5.3 Poisson-Klammern

 $(\Rightarrow$  Kommutator in der Quantenmechanik)

# A) Definition:

Für zwei beliebige Funktionen / Variablen im Phasenraum  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  und  $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  ist die POISSON-Klammer definiert durch:

$$\{F,G\} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

Sie ist selber eine Funktion von  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ .

# B) Fundamentale Eigenschaften

Antisymmetrie	$\{F,G\} = -\{G,F\}$
$\Rightarrow$	$\{F,F\} = 0$
Linearität mit $c_1, c_2 = \text{const.}$ :	$\{c_1F_1 + c_2F_2, G\} = c_1\{F_1, G\} + c_2\{F_2, G\}$
Nullelement	$\{F, \text{const.}\} = 0$
Produktregel	$\{F,G_1G_2\} = \{F,G_1\}G_2 + G_1\{F,G_2\}$
JAKOBIIdentität	$\{F, \{G_1, G_2\}\} + \{G_1, \{G_2, F\}\} + \{G_2, \{F, G_1\}\} = 0$

## C) Fundamentale Beispiele:

1. 
$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}$$
;  $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$   
2.  $\{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ ;  $\{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ 

# D) Hamilton'sche Bewegungsgleichungen

#### Satz:

Die totale Zeitableitung einer im Phasenraum definierten Funktion  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  entlang der durch die Bewegung des Systems gegebene Bahn (d.h.  $\mathbf{q}(t)$  und  $\mathbf{p}(t)$  aus HAMILTON-Gleichung) lautet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \left\{ F, \underbrace{H}_{\mathrm{H-Fkt.}} \right\}$$

**Beweis:** 

$$\begin{split} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i} \left[ \frac{\partial F}{\partial q_{i}} \dot{q}_{i} + \frac{\partial F}{\partial p_{i}} \dot{p}_{i} \right] \\ & \stackrel{\mathrm{H-GL}}{=} \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial q_{i}} \frac{\partial H}{\partial p_{i}} - \frac{\partial F}{\partial p_{i}} \frac{\partial H}{\partial q_{i}} \\ & = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \end{split}$$

## Fundamentales Bsp.:

$$\begin{array}{c} \dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{array} \right\} = Hamilton-Gleichungen$$

weil  $\frac{\partial}{\partial t} q_i = \frac{\partial}{\partial t} p_i = 0$ 

# E) Erhaltungsgröße

Satz:

Eine Funktion  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , die also nicht explizit von der Zeit abhängt, ist eine Erhaltungsgröße genau dann, wenn ihre POISSONklammer mit der HAMILTON-Funktion verschwindet:

$$\{F,H\}=0$$

Beweis:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{F(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \mathrm{konst.}}$$

# F) Koordinatenunabhängigkeit

#### Satz:

Die POISSONklammern sind unabhängig von der Wahl der sog. "kanonischen Koordinaten" , d.h. man kann sie mit einem beliebigen Set von Koordinaten formulieren, die über sog. *kanonischen Trnasformationen* miteinander verknüpft sind.

$$K(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \{F,g\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i}$$
$$= \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial Q_i} \frac{\partial G}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial G}{\partial Q_i} = \{F,g\}_{\mathbf{Q},\mathbf{P}} = K(\mathbf{Q},\mathbf{P})$$

Anwendung das Satzes über Erhaltungsgrößen:

$$\begin{split} H &= \frac{1}{2m} \left( q_1^2 + q_2^2 \right) + U(q_1 - q_2) \\ \text{Impuls:} \quad P &= p_1 + p_2 \\ \{P, H\} &= \{p_1, H\} + \{p_2, H\} = \{p_1, U\} + \{p_2, U\} \\ \text{wobei} \{P, H\} &= \sum_{i=1}^2 \underbrace{\frac{\partial p_1}{\partial q_i}}_{=0} \frac{\partial U}{\partial p_i} - \frac{\partial p_1}{\partial p_i} \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_1} \\ \text{also} \{P, H\} &= -\frac{\partial U}{\partial q_1} - \frac{\partial U}{\partial q_2} \\ \text{weil aber} U &= U(q_1 - q_2) \quad \Rightarrow \quad \{P, H\} = -\frac{\partial U}{\partial q_1} - \left(-\frac{\partial U}{\partial q_1}\right) = 0 \end{split}$$

 $\Rightarrow P$  ist also Erhaltungsgröße! Bemerkungen:

- Eine Größe F ist also eine Erhaltungsgröße, wenn ihr Kommutator (ihre POISSONklammer) mit der HAMILTON-Funktion H verschwindet.
- Wir können also z.B. folgern, dass der Gesamtimpuls **P** eines *N*-Teilchensystems erhalten bleibt, wenn:

$$\{\mathbf{P}, H\} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = const.$$
$$\{H, H\} = 0 \Rightarrow H = E = const. \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Die Aussage, dass die Gesamtenergie E konstant ist, ist gleichbedeutend, damit, dass die Hamiltonfunktion nicht explizit von der Zeit abhängt.

•

### 3.5.4 Symmetrietransformation

## A) Definition der Erzeugenden einer Symmetrietransformation

Sei eine kontinuierliche Abbildung des Phasenraums in sich gegeben durch eine kanonische Transformation:  $\mathbf{q}^{\alpha} = \mathbf{q}^{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  und  $\mathbf{p}^{\alpha} = \mathbf{p}^{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  (mit differenzierbarer, invertierbarer Abbildung, die abhängig vom Parameter  $\alpha$  ist,  $\mathbf{q}^{\alpha=0}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}^{\alpha=0}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}$ ) Dann heißt  $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  die **Erzeugende** der Abbildung, wenn eine beliebige Variable  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  sich unter der Abbildung so transformiert, dass gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}F(\mathbf{q}^{\alpha},\mathbf{p}^{\alpha})\Big|_{\mathbf{q},\mathbf{p}}=0 = \{F,G\}$$

In der POISSON-Klammer rechts tauchen nur die Funktion / Variablen q,p auf.

#### Bemerkung:

Wie beim NOETHER-Theorem wird nur die Ableitung bei  $\alpha = 0$  benötigt.

## B) Verallgemeinertes Noether-Theorem

#### Satz:

Wird die kontinuierliche Abbildung ("Verschiebung" ;  $\mathbf{q}^{\alpha} = \mathbf{q}^{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}^{\alpha} = \mathbf{P}^{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  durch eine kanonische Transformation gegeben und ist die HAMILTONfunktion invariant, d.h.  $H(\mathbf{q}^{\alpha}, \mathbf{p}^{\alpha}) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , dann ist die dazu gehörende Erzeugende eine Erhaltungsgröße. Umgekehrt ist jede Erhaltungsgröße eine Erzeugende einer Symmetrietransformation.

In dieser Umkehrung liegt die Verallgemeinerung zum bisher bekannten NOETHER-Theorem, diesen Schluss kann man nicht aus dem bekannten erhalten.

# **Beweis:**

$$\Rightarrow 0 \stackrel{*}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \left. H(\mathbf{q}^{\alpha}, \mathbf{p}^{\alpha}) \right|_{\alpha=0} = \{ H(\mathbf{q}, \mathbf{p}), G(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \}$$
  
$$\Leftrightarrow \qquad G(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = const.$$

Dabei wurde bei \* die Invarianz von H wie oben beschrieben verwendet. Im nächsten Abschnitt ist nur noch die Aussage, dass die Verschiebung eine kanonische Transformation sein muss, zu diskutieren.

#### 3.5.5 Kanonische Transformation

Für das NOETHER-Theorem war eine beliebige Koordinatentransformation  $\mathbf{q}^{\alpha} = \mathbf{q}^{\alpha}(\mathbf{q},t)$  möglich, unter der Bedingung, dass die Transformation kompatibel ist (Bedingung aus der Mathematik). Für die Formulierung im Phasenraum sind allgemeinere Transformationen:

$$\mathbf{q}^{\alpha} = \mathbf{q}^{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$
$$\mathbf{p}^{\alpha} = \mathbf{p}^{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

möglich, nur müssen diese gewisse Bedingungen erfüllen. Man hat nun mehr Freiheit, als beim LAGRAN-GE-Formalismus, weil man die Koordinaten  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{p}$  bei der Transformation miteinander verkn" pfen kann. (auch die Zeit t kann in den Transformationen explizit auftreten: das wird hier aber nicht betrachtet)

# A) Definition:

Eine zeitunabhängige Transformation im Phasenraum:

$$\left. \begin{array}{c} \mathbf{q}, \mathbf{p} \\ \mathbf{q}, \mathbf{p} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{array} \right.$$

ist kanonisch, genau dann wenn die fundamentalen POISSON-Klammern invariant sind, d.h.:

$$\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0 \quad \& \ \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$$
  
$$\Leftrightarrow \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad \& \ \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

Satz:

Kanonische Transformationen erhalten die POISSON-Klammern.

**Beweis:** 

$$\{F(\mathbf{Q},\mathbf{P}),G(\mathbf{Q},\mathbf{P})\} = \sum_{i} \frac{\partial F}{\partial Q_{i}} \frac{\partial G}{\partial P_{i}} - \frac{\partial F}{\partial P_{i}} \frac{\partial G}{\partial Q_{i}}$$

$$\stackrel{*}{=} \sum_{ij} \left(\frac{\partial F}{\partial q_{j}} \frac{\partial q_{j}}{\partial Q_{i}} + \frac{\partial F}{\partial p_{j}} \frac{\partial p_{j}}{\partial Q_{i}}\right) \frac{\partial G}{\partial P_{i}} - \cdots$$

$$= \sum \frac{\partial F}{\partial q_{j}} \left(\frac{\partial q_{j}}{\partial Q_{i}} \frac{\partial G}{\partial P_{i}} - \frac{\partial q_{j}}{\partial P_{i}} \frac{\partial G}{\partial Q_{i}}\right) + \frac{\partial F}{\partial p_{j}} (\cdots)$$

$$\Rightarrow \{F(\mathbf{Q},\mathbf{P}),G(\mathbf{Q},\mathbf{P})\} = \sum_{j} \frac{\partial F}{\partial q_{j}} \{q_{j}(\mathbf{Q},\mathbf{P}),G(\mathbf{Q},\mathbf{P})\} + \frac{\partial F}{\partial p_{j}} \{p_{j}(\mathbf{Q},\mathbf{P}),G(\mathbf{Q},\mathbf{P})\}$$
(\*)

Verwendet man nun die letzte Gleichung für  $G(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = q_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  oder  $G = p_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  dann werden die POISSON-Klammern rechts zu den Fundamentalen POISSON-Klammern, wenn diese schon bekannt sind  $(\{q_i, p_i\} = \delta_{ij})$ , dann folgt:

$$\{F(\mathbf{Q},\mathbf{P}),q_i(\mathbf{Q},\mathbf{P})\} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \{F(\mathbf{Q},\mathbf{P}),P_i(\mathbf{Q},\mathbf{P})\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

Diese beiden Formeln mit Ersetzung  $F \to G$  können wir wieder in (\*) (rechte Seite) einsetzen. Dann folgt:

$$\{F,G\} = \sum_{j} \frac{\partial F}{\partial q_{j}} \frac{\partial G}{\partial p_{j}} - \frac{\partial F}{\partial p_{j}} \frac{\partial G}{\partial q_{j}}$$

Damit ist also:

$$\{F(\mathbf{Q},\mathbf{P}),G(\mathbf{Q},\mathbf{P})\} = \{F(\mathbf{q},\mathbf{p}),G(\mathbf{q},\mathbf{p})\}\$$

### Bemerkung:

- kanonische Transformationen lassen die HAMILTON'schen Bewegungsgleichungen invariant. (Anwendung dieses Satzes)
- Der Phasenfluss  $(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{p}(t_0)) \rightarrow (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$  ist für jedes t eine kanonische Transformation (ohne Beweis).

## B) Erzeugende infinitesimaler kanonischer Transformationen

# Satz:

In linearer Ordnung in  $\alpha$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{\alpha}(\mathbf{q},\mathbf{p}) &= \mathbf{q} + \alpha \frac{\partial q(q,p)}{\partial p} + \delta(\alpha^2) \\ \mathbf{p}^{\alpha}(\mathbf{q},\mathbf{p}) &= \mathbf{p} - \alpha \frac{\partial q}{\partial p} + \delta(\alpha^2) \end{aligned}$$

eine kanonishce Transformation.

**Beweis:** 

$$\{q_i^{\alpha}, p_0^{\alpha}\} = \{q_i, p_j\} + \alpha \left[ \left\{ \frac{\partial G}{\partial p_i} \right\} - \left\{ q_i, \frac{\partial G}{\partial q_0} \right\} \right] + \delta(\alpha^2)$$
$$= \{q_i, p_o\} + \delta(\alpha^2)$$

# Bemerkung:

• Es folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}F(\mathbf{q}^{\alpha},\mathbf{p}^{\alpha})\Big|_{\alpha=0} = \sum_{i} \frac{\partial F}{\partial q_{i}} \frac{\partial G}{\partial p_{i}} + \frac{\partial F}{\partial p_{i}} \left(-\frac{\partial G}{\partial q_{i}}\right) = \{F,G\}$$

dass also G die Erzeugende der kanonischen Abbildung  $(\mathbf{q}^{\alpha}, \mathbf{p}^{\alpha})$  ist, welche im verallgemeinerten NOETHER-Theorem auftrat.

• Wie aus G die gesammte Abbildung  $(\mathbf{q}^{\alpha}, \mathbf{p}^{\alpha})$  bestimmt wird, wird erst im IK4 gezeigt.

#### Satz:

Die Transformation gegeben durch

$$\mathbf{q}^{\alpha}(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \mathbf{q} + \alpha \frac{\partial G(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$
$$\mathbf{p}^{\alpha}(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \mathbf{p} - \alpha \frac{\partial G(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

ist kanonisch (linear in  $\alpha$ ) (G wird Erzeugende genannt)

# **Beweis:**

$$\{q_i^{\alpha}, p_j^{\alpha}\} = \{q_i, p_j\} + \alpha \left[ \left\{ \frac{\partial G}{\partial p_i}, p_j \right\} - \left\{ q_i, \frac{\partial G}{\partial q_j} \right\} \right] + \mathcal{O}(\alpha^2)$$
$$= \delta_{ij} + \alpha \sum_l \frac{\partial^2 G}{\partial p_i \partial q_l} \delta_{jl} - \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial p_l} \delta_{il} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$
$$= \delta_{ij} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

damit folgt für eine beliebige Funktion F:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}F(\mathbf{q}^{\alpha},\mathbf{p}^{\alpha})\Big|_{\alpha=0} = \sum_{i} \frac{\partial F}{\partial q_{i}^{\alpha}} \frac{\mathrm{d}q_{i}^{\alpha}}{\mathrm{d}\alpha} + \frac{\partial F}{\partial p_{i}^{\alpha}} \frac{\mathrm{d}p_{i}^{\alpha}}{\mathrm{d}\alpha}\Big|_{\alpha=0}$$
$$= \sum_{i} \frac{\partial F}{\partial q_{i}} \frac{\partial G}{\partial p_{i}} - \frac{\partial F}{\partial p_{i}} \frac{\partial G}{\partial q_{i}}$$
$$\Rightarrow \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}F(\mathbf{q}^{\alpha},\mathbf{p}^{\alpha})\right|_{\alpha=0} = \{F,G\}$$

Aus diesem Grund, wird G als Erzeugende der Transformation bezeichnet. Dies haben wir für die HAMILTON-Funktion schon angewendet, mit dieser Erzeugenden G können wir also  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}H\Big|_{\alpha=0}$  berechnen.

# 3.6 Näherungsverfahren und Störungstheorie

### Liste (partial) von exakt lösbaren (nicht trivialen) Problemen der Physik:

- freies Teilchen (klassisch, Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie)
- harmonischer Oszillator
- $\frac{1}{r}$ -Potential (KEPLER, H-Atom, SCHRÖDINGER)
- 2-Niveau System (PAULI, DIRAC)
- zweidimensionaler Ising Magnet (ONSAGER)

Da diese List der idealen Probleme, welche mit Physik eindeutig gelöst werden können sehr beschränkt ist, soll hier der Versuch behandelt werden, reale Probleme durch Störungsverfahren mit solchen ideale Probleme zu nähern (zu lösen).

## 3.6.1 Asymptotische Entwicklungen und O- Symbol

• TAYLOR-Entwicklung

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2f''(0) + \dots$$
 nur für  $x \ll 1$  gültig

Fukntion f(x) genähert mit N-Term der TAYLORentwicklung  $\Rightarrow$  Poynomial N-ter Ordnung.

• Asymptotische Näherung

$$F(x,\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{M} c_n(x)\varepsilon^n$$
 kleine Parameter  $\varepsilon$ )

hierbei ist die Koonvergenz nicht interessant. Näherung  $\sum_{n=0}^{M} c_n(x) \varepsilon^n$  für endliche M muss nicht Polynomial sein.

# 3.6.2 Multiskalenverfahren

ungedämpfter, anharmonischer Oszillator folgt die Differentialgleichung:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \left( x + Ax^2 + Bx^3 \right) = 0$$

Anfangbedingungen sind x(t = 0) = t und  $\dot{x}(t = 0) = 0$  und  $O(x^4)$  wird vernachlässigt. (die Auslenkung x(t) ist klein)

Reskalieren zeigt, wo $\varepsilon$ auftaucht

$$y(t) := \frac{x(t)}{\varepsilon}$$
  $\dot{y}((t) + \omega_0^2 \left(y + \varepsilon A y^2 + \varepsilon B y^2\right) = 0$ 

mit y(0) = 1 und  $\dot{y} = 0$ . Dieses Problem ist nicht eindeutig lösbar: nicht lineare Differentialgleichung.

In dem Fall  $\varepsilon=0$  liegt ein harmonoischer Oszillator vor mit

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

und Lösung

$$y(t) = R\cos(\omega_o t + \theta)$$

die natürliche Skala ist  $\tau_0 = \omega_0 t$ .

Der anharmonische Oszillator hat die Potentialfukntion

$$V = \omega_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}Ax^3 + \frac{1}{4}Bx^4\right)$$
Energieerhaltung zeigt, dass die Bewegung beschränk ist.

$$H = \frac{1}{2}m\dot{x}^{2} + V(x) = E$$
  
$$\Rightarrow \quad V(x) = \le E \qquad \left(\text{weil } \frac{1}{2}m\dot{x}^{2} \ge 0\right)$$

Wenn

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = 0$$
$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}Ax^3 + \frac{1}{4}Bx^4 = 0$$

 $\Rightarrow$  maximale Auslenkung  $x_+$  und minimale Auslenkung  $x_-$ 

### Gestörtes Problem

Ansatz der regulären Störungsentwicklung:

$$y(t) = y_o(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots$$

Verwende natürliche Skala des ungestörten Problems $\tau_0=\omega_0 t$ 

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \omega_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_0} \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \omega_0^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau_0^2} := d_\tau^2$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau_0^2} y - y + \varepsilon A y^2 + \varepsilon B y = 0$$

Die Störungsentwicklung eingesetzt ergibt:

$$\left(d_{\tau_0}^2 y_0 + y_0\right)\varepsilon^0 + \left(d_{\tau_0}^2 y_1 + Ay_0^2 + y_1\right)\varepsilon^1 + \left(d_{\tau_0}^2 y_2 + By_0^3 + 2Ay_0y_1 + y_0\right)\varepsilon^2 + \ldots = 0$$

Jede Ordnung in  $\varepsilon$  wird einzeln, nachein<br/>ander bis zu gewünschten Ordnung  $\varepsilon^m$ gelöst.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \varepsilon^{0} : \qquad d_{\tau_{0}}^{2} y_{0} + y_{0} &= 0 \\ \text{mit Lösung} \qquad y_{0} &= R \cos(\tau_{0} + \theta) \\ \varepsilon^{1} : \qquad d_{\tau_{0}}^{2} y_{1} + y_{1} &= -Ay_{0}^{2} = -AR^{2} \cos^{2}(\tau_{0}\theta) = -\frac{1}{2}AR^{2} \left(1 + \cos(2(\tau_{0} + \theta))\right) \\ \text{mit Lösung} \qquad y &= -\frac{1}{2}AR^{2} + \frac{1}{6}AR^{2} \cos(2(\tau_{0} + \theta)) \\ \varepsilon^{2} : \qquad d_{\tau_{0}}^{2} y_{2} + y_{2} &= -By_{0}^{2} - 2Ay_{0}y = \left(-\frac{3}{4}BR^{2} + \frac{5}{6}A^{2}R^{2}\right)\cos(\tau_{0} + \theta) \\ &= c\cos(\tau_{0} + \theta) + \text{andere Terme} \\ y_{2}(\tau_{0}) &= c\tau_{0}\sin(\tau_{0} + \theta) + \text{nicht anwachsender Term} \end{aligned}$$

reguläre Störungstheorie:

$$y(t) = \frac{x(t)}{\varepsilon} \qquad y(t) = y_0 + y_1 \varepsilon + y_2 \varepsilon^2 + \dots$$
$$x(t) = \varepsilon R \cos(\omega t) + \varepsilon^2 \left( -\frac{1}{2}AR^2 + \frac{1}{6}AR^2 \cos(\omega t) \right) + \varepsilon^3 \left( C\omega_0 t \sin(\omega t) + \text{nicht anwachsende Terme} \right)$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$\omega = \left(\frac{\omega_0 + \theta}{t}\right)$$

Term  $(\omega_0(t)\sin(\omega t))$  verletzt Beschränktheit

$$x_- < x < x_+$$

### (Resonanzamplitude)

### Multiskalenverfahren

Intelligenter Ansatz, um die Resonanzkatastrophe zu vermeiden.

$$\tau_0 = \omega_0 t \qquad \tau_2 = \varepsilon^2 t \omega_0$$

$$y(t) = R(\tau_2)\cos(\tau_0 + \theta(\tau_2))$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(\tau_0, \tau_2) = \omega_0 \left(\frac{\partial x}{\partial \tau_0} + \varepsilon^2 \frac{\partial x}{\partial \tau_2}\right)$$

mit  $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial \tau_0}$ :

$$\ddot{y} + y + \varepsilon A y^2 + \varepsilon^2 B y^3 = 0$$
  

$$\Rightarrow \quad \varepsilon^0 \left( \partial_0^2 y_0 + y_0 \right) + \varepsilon^1 \left( \partial_0^2 y_1 + A y_0^2 + y \right) + \varepsilon^2 \left( (2\partial_0 \partial_2) y_0 + \partial_0 r y_0 + B y_0^3 + 2A y_0 y_1 + y_2 \right) + \dots = 0$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{0} : & y_{0} = R(\tau_{2})\cos(\tau_{0} + \theta) \\ \varepsilon^{1} : & y_{1} = -\frac{A}{2}R(\tau_{2}) + \frac{1}{6}AR(\tau_{2})\cos(2(\tau_{0} + \theta(\tau_{2}))) \\ \varepsilon^{2} : & \partial_{0}^{2}y_{2} + y_{2} = \cos(\tau_{0} + \theta) \left[\frac{3}{4}BR^{2} + \frac{5}{6}A^{2}R^{2} - 2R\partial_{2}\theta(\tau_{2})\right] + \sin(\tau_{0} + \theta) \left[2\partial_{2}R\right] \\ & + \text{nicht interessante Terme} \end{aligned}$$

nach POINCARE:

$$\partial_2 R = 0$$
  $\partial_2 \theta = -\frac{1}{2R} C \stackrel{R=1}{=} \frac{3}{8} B - \frac{5}{12} A^2$ 

$$\Rightarrow \qquad R(\tau_2) = 1 - \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
  
$$\Rightarrow \qquad O(\tau_2) = \left(\frac{3}{8}B - \frac{5}{12}A^2\right)\tau_2 = \left(\frac{3}{8}B - \frac{5}{12}A^2\right)\varepsilon^2\omega_0 t$$

$$x(t) = \varepsilon \cos(\omega t) + \varepsilon^2 A \left(\frac{1}{6}\cos(2\omega t) - \frac{1}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \dots$$
$$\omega = \omega_0 \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{3}{8}B - \frac{5}{12}A^2\right) + \mathcal{O}(\varepsilon)\right)$$

Auslenkung von x(t) beschränkt. (Frequenz hängt von  $\varepsilon$  ab.)

### 3.6.3 Fast kreisförmige Bahn in Zentralpotential

Beim KEPLER-Problem lässt sich r(t) und  $\phi(t)$  nicht so einfach berechnen, wie die  $r(\phi)$ . Wir haben eine Potentialfunktion U(r)LAGRANGE:  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - U(r)$  nach (3.2.2) folgt:

$$\begin{split} m\ddot{r}&=-rac{\partial}{\partial r}U^{ ext{\tiny eff.}}(r) \qquad ( ext{Bewegungsgleichung}) \ U^{ ext{eff.}}(r)&=U(r)+rac{L^2}{2mr} \end{split}$$

Für eine fast kreisförmige Bahn ist der relevant kleine Parameter  $\rho(t) = r(t) - \rho$ . Eine TAYLORentwicklung in  $\varepsilon$  gibt:

$$U^{\text{eff.}}(t) = U^{\text{eff.}}(\varrho) + \frac{\partial U^{\text{eff.}}}{\partial r}\varrho + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U^{\text{eff.}}}{\partial r^2}\varrho^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 U^{\text{eff.}}}{\partial r^3}\varrho^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 U^{\text{eff.}}}{\partial r^4}\varrho^4$$

Die Kreisbahn hat den Radius  $\varrho.$  Das ungestörte Problem hat ein Minimum bei $\varrho$ 

$$\begin{split} \frac{\partial U^{\text{eff.}}}{\partial r} \Big|_{\varrho=0} &= 0\\ \Rightarrow \frac{L^2}{r^2} &= \frac{\partial U}{\partial r}\\ \text{ungestörte Frequenz:} \quad \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{m} \frac{\partial^2 U^{\text{eff.}}}{\partial r^2}} \end{split}$$

Die Bewegungsgleichung ist

$$\ddot{\varrho}(t) + \omega_0^2(\varrho + A\varrho^2 + B\varrho^3 + \ldots) = 0$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$A = \frac{1}{2} \frac{U^{''' \text{eff.}}}{U^{'' \text{eff.}}} \qquad B = \frac{1}{6} \frac{U^{'''' \text{eff.}}}{U^{'' \text{eff.}}}$$

Näherung für kleine maximle Auslenkung

$$\varepsilon = -ep$$
 mit  $0 < e \ll 1$ 

Dabei ist e die Exzentrizität. (für die Erde ist e = 0,0167, also klein!) Aus Vergleich mit den Multiskalen Ergebnis folgt:

$$r(t) = p \left[ 1 - e \cos(\omega t) + pAe^2 \left( \frac{1}{6} \cos(2\omega t) - \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right]$$
  
mit  $\omega = \omega_0 \left[ 1 + e^2 p^2 \left( \frac{3}{8} B - \frac{5}{12} A^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right]$ 

 $\phi(t)$  durch Umformungen mit KEPLER-Gesetz.

### 3.6.4 Reguläre Störungstheorie

#### Zusammenfassung:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \left( x + Ax^2 + Bx^3 \right) = 0 \qquad \qquad x(t=0) = \varepsilon$$

Multiskalenverfahren:

$$x(t) = \varepsilon \cos(\omega t) + \varepsilon^2 A \left(\frac{1}{6}\cos\left(2\omega t - \frac{1}{2}\right)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$
$$\omega = \omega_0 \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{3}{8}B - \frac{5}{12}A^2\right)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon)^3)$$

**KEPLER-Problem:** 

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r}U^{\text{eff.}}(r)$$
  $U^{\text{eff.}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$ 

für eine fast kreisförmige Bahn $r(t)\approx p$ 

$$r(t) - p = \varrho(t)$$

damit TAYLOR<br/>entwicklung um p

$$\begin{split} U^{\text{eff.}}(r) &= U^{\text{eff.}}(p) + \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_p \varrho + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U^{\text{eff.}}}{\partial r^2} \right|_p \varrho^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 U^{\text{eff.}}}{\partial r^3} \right|_p \varrho^3 + \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^4 U^{\text{eff.}}}{\partial r^4} \right|_p \varrho^4 \\ \ddot{\varrho}(t) &= \omega_0^2 \left( \varrho + A \varrho^2 + B \varrho^3 \right) = 0 \qquad A = \frac{U^{'''\text{eff.}}}{U^{''\text{eff.}}} \quad B = \frac{1}{6} \frac{U^{''''\text{eff.}}}{U^{''\text{eff.}}} \end{split}$$

$$r(t) = p \left[ 1 - e \cos(\omega t) + pAe^2 \left( \frac{1}{6} \cos(2\omega t) \frac{1}{2} \right) \right]$$
$$\omega = \omega_0 \left[ 1 + e^2 p^2 \left( \frac{3}{8}B - \frac{5}{12}A^2 \right) \right]$$

$$r_{+} - r_{-} = r\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right) - r(t = 0) = 2ep$$
  
$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^{2}} = \frac{L}{mp^{2}} \left[1 + e^{2}\left(\frac{3}{2} + Ap\right) + 2e\cos(\omega t) + e^{2}\left(\frac{3}{2} - Ap\right)\cos(\omega t)\right]$$
  
$$\Omega = \frac{\omega}{2\pi} \int_{0}^{\frac{2\pi}{\omega}} dt \dot{\phi}(t) = \underbrace{\Omega_{0}}_{=\frac{L}{mp^{2}}} \left(1 + e^{2}\left(\frac{3}{2} + Ap\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3})\right)$$
  
$$\phi(t) = \Omega\left(t + \frac{2e}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{e^{2}}{2\omega}\left(\frac{3}{2} - Ap\right)\sin(2\omega t) + \mathcal{O}(\omega^{3})\right)$$

Wenden wir diese Formlen nun explizit beim KEPLER-Problem an:

$$U(r) = -\frac{\gamma m M}{r} \qquad \frac{L^2}{mp^3} = \frac{\gamma m M}{p^2} \Rightarrow p = \frac{L^2}{\gamma m^2 M}$$
$$\omega_0 = \frac{L}{mp^2} \quad \Omega_0 = \frac{L}{mp^2} \quad A = -\frac{3}{p} \quad B = \frac{b}{p^2}$$
$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{3}{2}e^2 + \mathcal{O}(e^3)\right) \qquad \Omega = \omega$$
$$\phi(t) = \omega t + 2e\sin(\omega t) + \frac{5e^2}{4}\sin(2\omega t) + \mathcal{O}(e^3)$$

Diese Formeln sind nützlich zum Verständnis der Länge der Jahreszeiten, Tageslänge etc. (Zeitgleichung) Periheldrehung des Merkur: Eine weitere Anwendung des Näherungsverfahrens beschreibt die Periheldrehung der Planeten, z.B. des innersten Planetes, Merkur. Man macht den Ansatz

$$U^{\rm eff.} = U^{\rm eff.} + \delta r^x$$

wobei die kleine Störung  $\delta r^x$  z.B. durch die Gravitationsbeziehung zu einen der schwereren Planeten entstehen kann. Z.B. der Jupiter, dessen Abstand zur Sonne  $P_J > P_{\text{Merkur}}$  größer sit. Nähert man seine Bahn um die Sonne als Kreisbahn, und nähert man die Merkur-Juppiter Anziehung nach GAUSS, indem man über einen Umlauf des Jupiters mittlet, folgt

$$U(r) = -\frac{\gamma m M}{r} - \frac{\gamma m_J m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{P_J^2 + r^2 - 2rP_J \cos\vartheta}}$$
für  $r \ll P_J$ :  $\approx -\frac{\gamma m M}{r} - \frac{\gamma m_J m}{P_J} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{P_J}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{r}{P_J}\right)^4\right)$ 

Es gilt also  $\delta r^x = -\frac{\gamma m m_{\gamma}}{4P_J} \left(\frac{r}{P_J}\right)^2$  woraus  $\phi_{\text{Merkur}} \approx 2 \cdot 10^{-6}$ /Jahrhundert folgt. Einer der ersten Erfolge der Allgemeinen Relativitätstheorie von EINSTEIN war die Vorhersage einer Störung  $\delta r^x$ , die zu einer Periheldrehung des Merkurs von  $\Delta \phi_{\text{Merkur}} \approx 5 \cdot 10^{-7}$ /Jahrhundert führt. Dies war zuvor gemessen worden, aber unverstanden.

# 4 Thermische Physik

# 4.1 Einleitung

Mechanik: eine Bewegungsgleichung pro Freiheitsgrad eines Systems; lösen  $\Rightarrow$  Verhalten des Systems makroskopische Körper: aufgebaut aus  $\sim 10^{23}$  Kerne und zugehörige Elektronen  $\Rightarrow$  Versuch, möglichst viele mikroskopische Eigenschaften durch makroskopische, gemittelte Größen auszudrücken:

- $\bullet$  Druck P
- spezifische Wärme
- Dichte  $\varrho$
- Ausdehnungskoeffizient
- Temperatur T
- Wärmeleitfähigkeit

allgemein: nur Mittelwerte (räumlich und zeitlich gesehen)

- Messungen mit einer hohen Auflösung  $\rightarrow$  Fluktuationen
- interessant z.B.:
  - (Wahrscheinlichkeits-) Verteilungsfunktionen (*mikroskopisch*)
  - Aggregatszustand als Folge makroskopischer Größen, z.B. Temperatur, Druck oder Dichte
- Weitere Größen, weniger aus dem Alltag bekannt:

•	Entropie	• ]	Enthalpie
•	freie Energie	• (	Chemisches Potential

- statistische Physik: Erklärung thermodynamischer Beziehungen aus mikroskopischen Modellen
- Thermodynamik: axiomatisch postuliert 4 Hauptsätze.

### 0. Hauptsatz der Thermodynamik:

Befinden sich zwei Körper im thermischen Gleichgewicht mit einem dritten, so stehen sie auch untereinander im thermischen Gleichgewicht.

Beispiel 1: zwei Kupfer-Blöcke:



Beispiel 2: Verbindung zweier Gasvolumina



Beispiel 3: zwei Kupfer-Blöcke in Wasser



Aussage: Wenn sowohl der erste, als auch der zweite Kupferblock im thermischen Gleichgewicht mit dem Wasser steht, dann stehen auch die beiden Kupferblöcke untereinander im thermischen Gleichgewicht.

### 4.2 Die Temperatur

- Messgeräte: diverse Thermometer
- Vorschlag: PARACELSIUS (1742)
  - Glasrohr mit Quecksilber (Hg)
     Der Trick dabei ist, die Volumensänderung einer Flüssigkeit sichtbar zu machen. Dazu lässt man die Flüssigkeit in einer kleinen Kapillaren, die an das feste Volumen angeschlossen ist, sich ausdehnen.
  - Annahme: Wärmeausdehnung des Quecksilbers ist linear mit Temperatur T

$$L(T) = L(0) \cdot (1 + \alpha T) \tag{4.1}$$

- $-T = 0^{\circ}$ C: Tripelpunkt von Wasser (Koexistenz von Eis, Wasser und Wasserdampf)
- $-T = 100^{\circ}$ C: Siedepunkt des Wassers unter Normaldruck (P = 1013,251hPa)
- Achtung: Abweichungen durch nichtlineare Terme z.B. bis etwa 1°C bei 50°C

### 4.2.1 Das Gay-Lussac-Thermometer

- bessere Linearität über weiten Bereich, von T: Gase, insbesondere Edelgase und für einen besonders weiten Bereich Helium
- bei konstantem Volumen V Gasdruck P linear zur Temperatur

$$P(t) = P_0(1 + \gamma \cdot T) \tag{4.2}$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$\gamma = \frac{1}{273,16^{\circ}\text{C}}$$



experimentelle Beobachtung: P(T) steigt invers<br/> proportional zur molaren Masse m des Gases, z.B.:

H<sub>2</sub>:  $m \approx 2 \frac{g}{\text{mol}}$ He:  $m \approx 4 \frac{g}{\text{mol}}$ Ar:  $m \approx 40 \frac{g}{\text{mol}}$ 

$$\frac{P}{T} \propto \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{T} \propto N \quad \Rightarrow \quad P \propto NT \tag{4.4}$$

mit N: Anzahl der Gasatome bzw. Gasmoleküle

# 4.3 Das ideale Gas

### 4.3.1 Ideales-Gas-Gesetz

experimentell bei T = const.:

$$P \propto \frac{1}{V}$$
 bzw.  $PV = \text{const.}$ 

mit (4.4) führt zum Gesetz des idealen Gases

$$PV = k_B NT \tag{4.5}$$

BOLTZMANN-Konstante:

$$k_B = 1,3806 \cdot 10^{-23} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

 $k_BT$ : typische Energieskala für mikroskopische, fluktuierende Systeme.

#### molare Schreibweise:

$$N = N_A n$$

mit  $N_A$  Avogad<br/>Ro-Konstante $N_A=6,023\cdot 10^{23}$  und n: Anzahl der Mole.

$$PV = k_B N_A nT = RnT \tag{4.6}$$

dabei ist  $R = k_B N_A$  die ideale Gaskonstante  $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$  diese Gleichung gilt nur für ein ideales Gas!

mit molarem Volumen  $\overline{V}$ :

$$P\bar{V} = RT \tag{4.7}$$

bei P = 1013,25hPa und T = 273,16K (Normalbedinungen, also mittlerer Druck auf Mehreshöhe)

 $\Rightarrow \quad \bar{V} = 22,411$ 

Größenordnung der Dichte idealer Gase (Luft etc.) unter Normalbedingungen:  $\approx 1 \frac{\rm kg}{\rm m^3}$ mittlerer Abstand der Gasteilchen  $\approx 2-3 \rm nm$ 

- Variablen  $P,\,T,\,\bar{V}$ von Stoffmenge unabhängig $\rightarrow$ intensive Größen
- $V, n \rightarrow$  extensive Größen

# Zustandsdiagramme eines idealen Gases

Achtung: für  $T \to 0 \quad \stackrel{\text{id. Gas}}{\Longrightarrow} \quad \bar{V} \to 0, \ P \to 0$ 



Abbildung 4.1: <u>Isotherme</u> (T = const.); Hyperbeln im P - V-Diagramm



Abbildung 4.2: <u>Isobare</u> (P = const.); Geraden im V - T-Diagramm

aber:

• endliches Eigenvolumen der Gasteilchen  $\Rightarrow \ \bar{V} \neq 0$ 



Abbildung 4.3: <u>Isochore</u> (V = const.); Geraden im P - T-Diagramm

- endliche Kräfte zwischen Gasteilchen  $\Rightarrow P \neq 0$
- $\Rightarrow~(4.5)$ gilt nicht für tiefe Temperaturen, für kleine Volumen bzw. große Drücke
- Gültigkeitsbereich von speziellen Gasen, z.B.



 nicht berücksichtigt: Phasenübergänge Gas → Flüssigkeit → Festkörper (siehe Kapitel (4.4) bzw.( 4.5))

### 4.3.2 Barometrische Höhenformel

 $\underline{\text{Versuch:}}$  TORRICELLI'sches U-Rohr



Das Gewicht der Atomsphäre führt zum Luftdruck  $P_0$  und drückt die Quecksilbersäule nach unten, sodass der Höhenunterschied  $\Delta h$  zustande kommt.

153



$$\begin{split} P(h + \mathrm{d}h) &< P(h) \\ \mathrm{d}P = P(h + \mathrm{d}h) - P(h) = -\frac{mg}{A} \\ \varrho A \, \mathrm{d}h \frac{g}{A} &= -g \varrho \, \mathrm{d}h \end{split}$$

wegen PV = const. für eine konstante Temperatur (!) und  $\rho = \frac{M}{V}$ :

$$\Rightarrow \frac{P}{\varrho} = \text{const.} = \frac{P_0}{\varrho_0} \Rightarrow \varrho = \varrho_0 \frac{P}{P_0} \Rightarrow dP = -\frac{\varrho_0}{P_0} gP \,dh$$

Integration von  $\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{\varrho_0}{P_0}g\,\mathrm{d}h$  liefert:

$$\ln P = -\frac{\varrho_0}{P_0}gh + c$$

mit  $P(h=0) = P_0 \Rightarrow c = hP_o$ 

$$P = P_0 e^{-\frac{\varrho_0 g}{P_0}h} = P_0 e^{-\frac{h}{h_0}}$$

### Barometrische Höhenformel

 $h_0 = 8330.$ 



Dabei wurde die Annahme gemacht, dass die Temperatur überall konstant ist, was unrealistisch ist! In der Realität nimmt die Teperatur meist mit der Höhe ab. Eine bessere Näherung liefert die "*Standard-Atmosphäre*" mit  $T = 15^{\circ}$ C auf Meereshöhe und einem Gradienten von  $6.5 \frac{\text{K}}{\text{km}}$ .

### 4.3.3 Mikroskopisches Modell des idealen Gases

- erster vereinfachter Einblick in kinetische Gastheorie von MAXWELL und BOLTZMANN
- mikroskopisches Modell für das idelae Gasgesetz  $\rightarrow$  Akzeptanz "Atomhypothese"



Abbildung 4.4: Standardatmosphäre

## A) Mittlerer Druck $\langle P \rangle$

Modell:

- ideales Gas besteht aus sehr kleinen harten Kugeln mit dem Radius  $r_{\rm 0}$
- Wechselwirkungspotential:

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{für } r < 2r_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Annahme: mittlerer Abstand  $r \gg r_0$  Teilchengröße  $\Rightarrow$  Kugeln fliegen nahezu unbeeinflusst statistisch verteilt durcheinander (typische  $\langle r \rangle \approx 3$ nm,  $r_0 \approx 0,1$ nm)
- Kugeln stoßen nur mit Wänden des Behälters  $\rightarrow$  Reflexion



- Anzahl<br/>dichte:  $n_0 = \frac{N}{V}$
- davon fliegen  $n_x$  mit  $v_x$  Richtung dA $\Rightarrow$  Reflexion nd Impulsänderung  $2mv_x$  auf die Wand

$$\Rightarrow \quad P = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{2mv_x \cdot z}{\mathrm{d}A}$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$z = \frac{\text{Anzahl der Teilchen auf } dA}{\text{Zeit}}$$
$$z = n_x v_x \, dA \, dt$$

$$\Rightarrow P = 2mn_x v_x^2$$

 $\bullet\,$ nur normale Komponente $v_x$  führt zu Impulsübertrag



• Isotropie des Systems:

 $\Rightarrow$ 

$$\Rightarrow \quad \langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$\langle v_x \rangle := \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} N(v_x) v_x \, \mathrm{d} v_x$$

 $N(v_x)$ : (Geschwindigkeits-) Verteilungsfunktion

beachte: 
$$\langle v_x^2 \rangle \neq 0 = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} N(v_x) v_x^2 \, \mathrm{d}v_x$$

 $\Rightarrow$  mittlerer Druck :

$$\langle P \rangle = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{nur } v_x > 0} n_0 2m \langle v_x^2 \rangle = n, m \langle v^2 \rangle$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow \langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

$$\text{Isotropie:} \Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle \Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} v^2$$

$$\text{damit:} \ \langle P \rangle = P = \frac{1}{3} n_0 m \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n_0 \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle E_{kin} \rangle$$

$$\frac{2}{3} N \langle E_{kin} \rangle = PN$$

Vergleich mit der Zustandsgleichung des idealen Gases:

=

$$Nk_B = PV \qquad \langle P \rangle \equiv P$$
  
 $\Rightarrow \qquad \langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2}k_BT$ 

Damit erhalten wir das Ergebnis, dass die Temperatur proportional zur mittleren kinetischen Energie der Teilchen ist. Damit ist dies eine mikroskopische Definition der Temperatur!

Dabei hatten wir f = 3 Freiheitsgrade der Translation betrachtet. Aus der statistischen Physik bekommt man das Ergebnis, dass allgemein pro Freiheitsgrad, der quadratisch in HAMILTONfunktion (Energie) eingeht, gilt:

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{2} k_B T \tag{4.8}$$

### klassischer Gleichverteilungssatz

Beispiele für Freiheitsgrade:

• Translation  $E_i \to 0$ • Vibration  $E_i \approx 10 - 100 \text{meV}$ • elektronische Anregung  $E_i \approx 1 \text{eV}$ 

#### **Bemerkung:**

Hier hilft also das Prinzip der "kleinen Schwingungen um die Ruhelage", da oft angenommen werden darft, dass die potentielle Energie (auch) quadratisch genähert werden kann.

Komplikation durch die Quantenmechanik:

• Energie in mikroskopischen Systemen besitzt diskretes Energiespektrum  $E_i$   $\Rightarrow$  keine thermische Anregung; Freiheitsgrad für  $k_BT \ll E_i$ Vergleich dazu:  $k_BT = 26$ meV bei 300K

#### B) Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung

**Ziel:** Berechnung der Anzahl  $dN_{\mathbf{v}}$  von Teilchen im Geschwindigkeitsintervall  $(\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v})$ . Sei  $dN_x$  Anzahl der Teilchen in  $(v_x, v_x + dv_x)$ . Damit ist die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Teilchen in  $(v_x, v_x + dv_x)$  zu finden:

$$\frac{\mathrm{d}N_x}{N} =: p(v_x) \,\mathrm{d}v_x$$

Dabei ist p die Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. die Verteilungsfunktion.

Symmetrieeigenschaften von p für ein isotropes System:  $v_x$  ist äquivalent zu  $-v_x \Rightarrow$  es existiert eine Funktion f mit

$$p(v_x) dv_x = f(v_x^2) dv_x$$
$$p(v_y) dv_y = f(v_y^2) dv_y$$
$$p(v_z) dv_z = f(v_z^2) dv_z$$

wegen Isotropie gilt selbiges entlang der y- und z-Achse. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei v-Komponenten in einem bestimmten Intervall liegen, ist

$$p(v_x, v_y, v_z) \,\mathrm{d}v_x \,\mathrm{d}v_y \,\mathrm{d}v_z = \frac{\mathrm{d}N_{xyz}}{N} = \frac{\mathrm{d}N_x}{N} \frac{\mathrm{d}N_y}{N} \frac{\mathrm{d}N_z}{N} = f(v_x^2) f(v_y^2) f(v_z^2) \,\mathrm{d}v_x \,\mathrm{d}v_y \,\mathrm{d}v_z \tag{4.9}$$

mit  $dN_{xyz}$  als Anzahl der Teilchen in Element d**v** des **v**-Raumes. Jedes Teilchen hat (ungefähr) den Wert **v**, der durch den Punkt im **v**-Raum realisiert ist.

 $\Rightarrow$  Anzahl der Punkte im Element  $(v_x, v_x + dv_x, v_y + dv_y)$ :

$$\mathrm{d}N_{xy} = Nf(v_x^2)f(v_y^2)\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y$$

### Suche nach Funktion f:

Trick: Drehung des Koordinatensystems so, dass

a)  $v'_y = 0$  und



Abbildung 4.5: 2-dimensionales Beispiel des Geschwindigkeitsraums

b) keine Änderung  $dN_{xy}$ 



$$v_x'^2 = v_x^2 + v_y^2$$
  
$$f(v_x^2)f(v_y^2) = f(v_x^2 + v_y^2)f(0)$$
(4.10)

berechne Funktion:

- f(0) sei  $\alpha \Rightarrow \alpha f(x+y) = f(x)f(y)$  mit  $x := v_x^2$  und  $y := v_y^2$
- $x + y \operatorname{sei} \xi \Rightarrow \alpha f(\xi) = f(x) \cdot f(y)$
- nach x ableiten:  $\alpha \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \alpha f'(\xi) = f'(x)f(y)$
- nach y ableiten:  $\alpha \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \alpha f(\xi) = f(x)f'(y)$

daraus folgt:

$$f(x)f'(y) = f'(x)f(y)$$
  
$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(y)}{f(y)}$$

 $v_x^2$ ist unabhängig von  $v_y^2$  (linke und rechte Seite müssen konstant sein (genauso $f'(y)=-\gamma f(y))$ 

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\gamma = \text{const.}$$
$$\Rightarrow f(x) = f(0)e^{-\gamma x} = \alpha e^{-\gamma x}$$
$$f(v_x^2) = \alpha e^{-\gamma v_x^2}$$

# Normierbarkeit von $f \Rightarrow \gamma > 0$

Für die Dichte der Teilchen im Intervall  $(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \, \mathrm{d} \mathbf{v})$ folgt:

$$\frac{\mathrm{d}N_{xyz}}{\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z} = D\alpha^3 e^{-\gamma\mathbf{v}^2} \tag{4.11}$$

• Isotropie:

$$\Rightarrow \quad p(\mathbf{v}) \,\mathrm{d}\mathbf{v} = \alpha^3 e^{-\gamma \mathbf{v}^2} \,\mathrm{d}\mathbf{v} \tag{4.12}$$

(3-dimensionale GAUSSfunktion)

• Anzahl  $\frac{\mathrm{d}Nv}{N}$  der Teilchen mit Geschwindigkeitsbetrag in  $(v, v + \mathrm{d}v)$  wobei  $v = |\mathbf{v}|$ .

 $p(v) \, \mathrm{d} v {\cdot} \mathrm{Volumen}$ einer Kugelschale mit Radius vund Dicke $\, \mathrm{d} v$ 



$$\Rightarrow N_{v} = N\alpha^{3}e^{-\gamma v^{2}}4\pi v^{2} dv$$

$$p(v) dv = 4\pi\alpha^{3}v^{2}e^{-\gamma v^{2}} dv$$

$$N = \int_{v} dN = 4\pi\alpha^{3} \underbrace{\int_{0}^{\infty} dv v^{2}e^{-\gamma v^{2}}}_{\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{\gamma^{\frac{3}{2}}}}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha^{3} = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$$
(4.13)

Be rechnung von  $\gamma:$ 

$$\langle E_{kin} \rangle = \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle = \frac{1}{N} \int \frac{1}{2} m v^2 \, \mathrm{d}N_v = 2\pi \alpha^3 \int_0^\infty \mathrm{d}v v^4 e^{-\gamma v^2} = \frac{3}{2} k_B T$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{m}{2k_B T}$$

$$(4.14)$$

$$dN_v = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 dv$$
(4.15a)

$$p(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2k_BT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}$$
(4.15b)

Dies nennt man die MAXWELL'sche Geschwindigkeitsverteilung wahrscheinlichste Geschwindigkeit:  $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v}=0$ 

$$\Rightarrow \quad v_N = \sqrt{\frac{2k_BT}{N}} \tag{4.16}$$

<u>mittlere Geschwindigkeit:</u>  $\bar{v} = \int_{o}^{\infty} p(v) \, \mathrm{d}v$ 

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}} = \frac{2v_w}{\sqrt{\pi}} \tag{4.17}$$

mittleres Geschwindigkeitsquadrat:

$$\bar{v}^2 = \int_0^\infty v^2 p(v) \,\mathrm{d}v \qquad \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_N$$

Bemerkung:  $v_w < \bar{v} < \sqrt{\bar{v}^2}$  da p(v) nicht symmetrisch um  $v_w$ , hochenergetische Ausläufer

Beispiel:  $N_2$  bei T = 300K:

$$m(N_2) = 4,67 \cdot 10^{-26} \text{kg}$$

Daraus folgt:

- $v_w = 422 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- $\bar{v} = 476 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- $\sqrt{\bar{v}^2} = 517 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Vergleich: Schallgeschwindigkeit  $v_s = 330 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ Messung p(v) im Experiment:

- Generation Molekularstrahl
- mechanischer Geschwindigkeits-Selektor

# 4.4 Reale Gase

Wie kommen Gase aus beliebigen Anfangsbedingungen heraus für spätere Zeiten in das thermische Gleichgewicht mit MAXWELL'scher Geschwindigskeitsverteilung?

 $\rightarrow$  Stöße zwischen den Gasteilchen

 $\Rightarrow$  Thermalisierung



BOLTZMANN-Gleichung

### 4.4.1 StoBquerschnitt und mittlere freie Weglänge

Wie weit fliegt ein Teilchen im Mittel *ballistisch*, bis es durch Stoß mit anderen Teilchen abgelenkt wird? Streuquerschnitt  $\sigma$  beim Stoß harter Kugeln



Stoß für  $r < 2r_0 \implies \sigma = (2r_o)^2 \pi$  $\Rightarrow$  Gesamtfläche  $F_B$  der Target-Teilchen im Volumen  $F\Delta x$ 

$$F_B = \underbrace{n\Delta xF}_N \sigma \tag{4.18}$$

damit ergibt sich der Stoßquerschnitt auf dem Weg  $\Delta x$ :

$$\frac{F_B}{F} = n \sigma \Delta x$$

Anzahl der Teilchen  $\Delta N$ , die einen Stoß erfahren haben

$$\Delta N = -Nn\sigma\Delta x$$

Anzahl der Teilchen, die nicht gestreut wurden:

$$N(x) = N_0 e^{-n\sigma x} = N_0 e^{-\frac{x}{t}}$$
  
 $l = \frac{1}{n\sigma}$  mittlere freie Weglänge im Gas

Beispiel: N<sub>2</sub> bei 300K und  $P = 10^5$ Pa mit  $\sigma = 45 \cdot 10^{-16}$ cm<sup>2</sup>

$$\Rightarrow l \approx 7 \cdot 10^{-9} \mathrm{m} = 70 \mathrm{nm}$$

 $\hat{=}$  ballistische Flugzeit:

$$\tau \approx 1.5 \cdot 10^{-10} \text{s} = 150 \text{ps}$$

Streurate:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{150} \frac{1}{\mathrm{ps}}$$

### 4.4.2 Diffusion als Beispiel für einen Transportprozess



Abbildung 4.6: "random walk"der Gasteilchen

im Gleichgewicht: Isotropie  $\Rightarrow$  kein mittlerer Massenstrom **j** in ausgezeichnete Richtung.

*jetzt*: Dichte der Teilchen sei 1-dimensional ortsabhängig n(x)Daraus folgt ein effektiver Massenstrom  $j_x$  in Richtung der x-Achse durch fehlende Isotropie.



Da mehr Teilchen zur Verfügung stehen im dichteren Bereich, bewegen sich die Teilchen eher von dem Bereich der höheren Dichte in den Bereich der niedrigeren Dichte.

#### Fick'sches Gesetz:

$$j_x = -\frac{l\langle v \rangle}{3} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = -D \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} \tag{4.19}$$

mit Diffusionskonstante  $D = \frac{l\langle v \rangle}{3}$ ; mit  $l = \frac{1}{n\sigma}$  und  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$  $\Rightarrow$  Diffusionskonstante für das ideale Gas:

$$D=\frac{1}{n\sigma}\sqrt{\frac{8k_BT}{9\pi m}}$$

Erhaltung der Gesamtmasse

#### $\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung:

 $\Rightarrow$  Diffusionsgleichung:

Diffusionsgleichung

 $\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}j_x(t) = 0$  $\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ (4.20)

analog gilt für drei Dimensionen: FICK'sches Gesetz:  $\mathbf{j} = -D\mathrm{grad}\,\mathbf{n}$  $\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$  $\frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} = D\nabla^2 n(\mathbf{r},t)$ Kontinuitätsgleichung

#### 4.4.3 Van-der-Waals'sche Zustandsgleichungen

Gase bei hoher Dichte (z.B. bei hohem Druck oder tiefer Temperatur)

I) Eigenvolumen der Gasmoleküle nicht mehr klein gegenüber Gasvolumen V

 $\Rightarrow$  Korrekturgröße b in der idealen Gasgleichung

$$P(\bar{V} - b) = RT$$

- b ist abhängig vom "Volumen" der Gasteilchen bzw. physikalischer ausgedrückt von der Form und Stärke des Kraftpotentials zwischen diesen  $\Rightarrow$  spezifisch für jedes Gas
- für das Modell harter sphärischer Kugeln ist  $b = 4NV_a$  mit  $V_a = \frac{4}{3}r_0^3\pi$

II) Potentielle Energie der Teilchen durch die gegenseitige Kraftwirkung nicht mehr vernachlässigbar im Vergleich zu  $\langle E_{kin} \rangle$ 

• im Inneren des Volumens:



$$\langle \sum \mathbf{F}_i \rangle = 0$$

Die Kräfte kompensieren sich

• am Rand des Volumens, also an einer Wand

$$\langle \mathbf{F}_i \rangle \neq 0$$

keine Kompensation an der Begrenzungswand

 $\Rightarrow$  Korrekturterm in der idealen Gasgleichung durch den sog. *Binnendruck* 

$$(P+P_B)(\bar{V}-b) = RT$$

• Binnenkraft auf einzelnes Teilchen an der Grenzfläche:

$$F_{Bi} \propto n_i F_i \propto \varrho$$

• der Binnendruck ist proportional zur Kraft  $F_B$  auf das einzelne Teilchen und zur Teilchendichte  $\varrho$ 

$$P_B \propto F_{Bi} \rho \propto \rho^2 \qquad \Rightarrow P_B = \frac{a}{V^2}$$

mit Parameter a: Stoffkonstante, abhängig von Art und Stärke der Wechelwirkung der Gasteilchen  $\Rightarrow$  VAN-DER-WAALS-Zustandsgleichung:

$$\left(P + \frac{a}{\bar{V}^2}\right) \cdot \left(\bar{V} - b\right) = RT \tag{4.21}$$

Verlauf der Isothermen P(V)

für T = const. in der VAN-DER-WAALS-Gleichung am Beispiel CO<sub>2</sub> (wichtig: für jedes Gas individuell)



Abbildung 4.7: Isotherme im VAN-DER-WAALS-Gesetz am Beispiel von CO<sub>2</sub>

- hohe Temperaturen (z.B. T = 370K): Verlauf der Isotherme nahe der eines idealen Gases
- $T_c = 300$ K: Plateau in der Isotherme; bei  $P_c, V_c \rightarrow$  "kritischer Punkt"
- $T < T_c$ : Bereich in VAN-DER-WAALS-Isotherme mit

$$\left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_{T=\text{const.}} > 0 !$$

 $\rightarrow$  multistabil!?

• experimentell: Der Druck *P* steigt von hohem Volumen *V* kommend kontinuierlich bis Punkt A und bleibt dann konstant auf einem Plateau ABC.

Physik: Kondensation von Gas zu Flüssigkeit von



Koexistenz zweier Phasen.

• für noch kleinere Volumen sehr steiler Anstieg des Drucks wegen der geringen Kompressibilität A $(\bar{V} \rightarrow b)$ 

Dies war ein erstes Beispiel für den Phasenübergang von zwei Aggregatzuständen.

Möglichkeit der Phasenseparation als

- kritisches Phänomen bzw. Instabilität oder
- spontane Brechung der Symmetrie

Dies war in unserem Modell nicht vorgesehen. Daher kommt auch die Abweichung zweischen Theorie und der Realität.



Messen von P(V) mit Manometer

Abbildung 4.8: Experimentelle Bestimmung der Isotherme

### 4.5 Thermische Eigenschaften der Materie

### 4.5.1 Spezifische Wärme

aus (4.3.3) wissen wir, dass  $T \propto \langle E_{kin} \rangle$   $\Rightarrow$  zur Erhöhung der Temperatur eines Körpers (Gas, Flüssigkeit, Festkörper) muss Energie zugefügt werden.  $\Rightarrow$  Wärme(-Energie)  $\Delta Q$ experimentell: für einen Körper mit der Masse M:

$$\Delta Q = c \cdot M \Delta T = c M (T_2 - T_1)$$

Dabei ist c die spezifische Wärme. Außerdem ist  $C = cM_{Mol}$  die molare Wärmekapazität und cM die Wärmekapazität.

#### Beachte:

 $\bullet\ c$ ist eine Funktion der Temperatur, keine Materialkonstante

$$c := \frac{1}{M} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$$

- Erwärmung von Bremsen eines KFZ ist ein Beispiel für die Umwandlung von makroskopischer kinetischer Energie in mikroskopische kinetische Energie, also Wärme
- Die Energieform Wärme ist speziell, da wir keine mikroskopische Kontrolle über 10<sup>23</sup> Freiheitsgrade eines makroskopischen Körpers besitzen.

 $\Rightarrow$  Wärme kann nicht vollständig in andere Energieformen zurückgewandelt werden. Dies wird uns auf den 2. Hauptsatz der Thermodynamik (4.6.2) führen.

#### A) spezifische Wärme eines einatomigen Gases

Wir betrachten N Teilchen im Volumen V. Nach dem Gleichverteilungssatz wissen wir:

$$\langle E_{kin}\rangle = \frac{3}{2}Nk_BT$$

Die innere Energie U ist die gesamte mikroskopische Energie der Teilchen, also kinetische  $(E_{kin})$ , Rotations- $(E_{rot})$ , Vibrations- $(E_{vib})$ , elektrischer  $(E_r)$  und potentieller Energie  $(E_{pot})$ . Dabei hat ein ideales, einatomiges GAS nur drei Freiheitsgrade der kinetischen Energie:

$$\Rightarrow \quad U = \frac{3}{2}k_BT$$

es gilt in diesem Spezialfall:

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q$$

$$\Rightarrow \quad c_V = \frac{1}{M} \left( \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} \right)_{V=\mathrm{const.}} \tag{4.22}$$

 $\Rightarrow$ spezifische Wärme des idealen Gases bei konstantem Volumen:

$$c_V = \frac{3}{2} \frac{Nk_B}{M} \tag{4.23}$$

$$\Rightarrow \quad C_V = c_V M_{\text{Mol}} = \frac{3}{2} \frac{N}{N_A} N_A k_B = \frac{3}{2} R \tag{4.24}$$

Fazit: Die molare Wärmekapazität eines idealen Gases ist nicht temperaturabhängig.

Erwärmung eines ideales Gases unter konstantem Druck:

$$P = \text{const.}$$
  $c_P = \frac{1}{M} \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}\right)_{P=\text{const.}}$  (4.25)

beim idealen Gas:  $P\bar{V} = RT \Rightarrow \bar{V}$  steigt bei zunehmender Temperatur unter konstantem Druck.  $\Rightarrow$  Das Gas muss Expansionsarbeit leisten, um sein Volumen  $\bar{V}$  gegen den Druck P zu erhöhen.

 $|\Delta W| = |F \cdot \Delta x| = |AF \cdot \Delta x| = |P \cdot \Delta V|$ 

Konvention: an System geleistete Arbeit ist positiv definiert.

$$\Rightarrow \quad \Delta W = -P\Delta V \quad \text{mit } \Delta V > 0$$
$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}U = c_V \Delta T - \Delta W$$

 $\Delta W$ muss zusätzlich zu $c_V \Delta T$ als Wärme zugeführt werden

$$\Rightarrow c_P > c_V$$
  

$$\Delta Q = c_V \Delta T + P \Delta V = \Delta U$$
  

$$P \bar{v} = RT \rightarrow \Delta V = \frac{R}{P} \Delta T$$
  

$$\Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta T} = c_V + R \frac{\Delta T}{\Delta T}$$
  

$$c_P = c_V + R \qquad (4.26)$$

**Definition:** Adiabatenkoeffizient:  $\kappa = \frac{c_P}{c_V}$ 

- für das ideale Gas:  $\kappa = \frac{5}{3}$
- all gemeines System mit f Freiheitsgeraden:  $\kappa = \frac{f+2}{f}$

#### B) Gas mit mehr als 3 Freiheitsgraden

f > 3

1. Kugelteilchen mit endlichem Radius 3 Freiheitsgrade der Translation und 3 Freiheitsgrade der Rotation

$$\Rightarrow f = 6 \Rightarrow c_V = 3R$$

warum bei He:  $c_V = \frac{3}{2}R$ ? Die Translation liefert 3 Freiheitsgrade; die Rotation ist die Bahnbewegung der Elektronen.

 $\rightarrow$  quantisient!  $E_i \approx 10 \text{eV}$ 

- $\Rightarrow$  Anregung bei 300K ist vernachlässigbar
- 2. Zweiatomige Moleküle (H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>)



- $f_{trans} = 3$  ist wie gewohnt
- Rotation um die y- und z-Achse beinhaltet eine Bewegung schwerer Kerne, also sind dort die Quatisierungsenergien klein  $\approx k_B T$ Rotation um die x-Achse: Elektron (siehe Helium) also ist bei relevanten Temperaturen:  $f_{rot} = 2$
- zusätzlich: Vibration, Schwingungen der Kerne relativ zueinander entlang der Bindungsachse



Freiheitsgrade eines harmonischen Oszilators:

einen Freiheitsgrad für die mittlere kinetische Energie und ein Freiheitsgrad für die mittlere potentielle Energie.

$$\Rightarrow f_{Vib} = 2$$

Die Quantisierungsenergien sind moderat  $\gtrsim k_B T$ 

3. Mehratomige Moleküle NO<sub>2</sub>: f = 12

### C) Festkörper



geringe Kompressibilität

$$\Rightarrow c_V \approx c_P = c$$

alle Atome sind durch chemische Bindungen fixiert (Einkristall: regelmäßige Anordnung in einem "Gitter").



Abbildung 4.9: Freiheitsgrade am Beispiel des Stickstoff-Moleküls

 $\Rightarrow$ keine thermischen Freiheitsgrade durch Translation <br/>bzw. Rotation $\Rightarrow$ nur Vibrations-Freiheitsgrade

Wir haben drei Schwingungs-Richtungen für jedes Atom <br/>  $\Rightarrow \ 2\cdot 3 = 6$ 

$$\Rightarrow \quad c_V = 6\frac{R}{2} = 3R \tag{4.27}$$

### DULONG-PETIT-Gesetz

typische Quantisierungesenergien von Gitterschwingungen (Phononen):  $E_i \lesssim k_B T$ 

Der Verlauf c(T) im dielektrischen Festkörper z.B. Silizium



#### Versuch:

3 Kugeln aus Stahl (Fe), Messing (Cu+Zn) und Aluminium mit der selben Masse und identischer Temperatur



Im Aluminium-Stück sind mehr Atome bei gleicher Masse vorhanden. Daher ist die Wärme-kapazität höher und die Kugel schmilzt tiefer in das Wachs ein.

Fazit: Wärmekapazität ist mit Teilchenzahl, nicht mit Masse bzw. Dichte verknüpft.

### 4.5.2 Adiabatische Zustandsänderung im idealen Gas

im thermischen Gleichgewicht:  $P\bar{V} = RT$  $\Rightarrow$  kanonische Zustandsänderungen auf der Fläche im P - V - T-Diagramm



Abbildung 4.10: kanonische Zustandsänderungen auf der Fläche im P - V - T-Diagramm

#### adiabatische Zustandsänderung:

<u>kein</u> Wärmeaustausch mit der Umgebung:  $\Delta Q = 0$ 

- gute Isolation des Systems von Außenwelt (z.B. DEWAR-Gefäß)
- schnelle Zustandsänderung im Vergleich zu einer charakteristischen Zeit $\tau$ für die Wärmeleitung (z.B. Verbrennungsmotor)



Die gesamte Kompressionsarbeit  $dW = P d\bar{V}$  führt in diesem Fall zu einer reinen Erhöhung der inneren Energie dU, weil keine Energie abfließen kann an den Behälter oder das Umfeld. Dabei muss im Versuch darauf geachtet werden, dass das Gasvolumen eine einheitliche Temperatur hat. D.h. die Thermalisierung über Stöße zwischen den Gasteilchen muss schnell sein.

$$c_P \, \mathrm{d}T = \, \mathrm{d}Q = 0$$
$$\mathrm{d}Q = P \, \mathrm{d}V + c_V \, \mathrm{d}T$$

 $\Rightarrow$  Erwärmung für den Fall dV < 0.mit

$$P = \frac{RT}{\bar{V}} \quad \Rightarrow \quad c_V \frac{\mathrm{d}T}{T} = -R \frac{\mathrm{d}\bar{V}}{\bar{V}}$$

integrieren:  $c_V \ln T = -R \ln \bar{V} + \text{const.}$ :

$$\ln\left(T^{c_V}\bar{V}^R\right) = \text{const.}$$

mit  $R = c_P - c_V$ :

$$\ln \left( T^{c_V} V^{c_P - c_V} \right) = \text{const.}$$

$$T^{c_V} \bar{V}^{\frac{c_P - c_V}{c_V}} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad \text{mit } T = \frac{P\bar{V}}{R}$$

$$\overline{T\bar{V}^{\kappa-1} = \text{const.}} \qquad PV^{\kappa} = \text{const.}$$

$$(4.28)$$

### Adiabatengleichung



### 4.5.3 Anmerkungen zu Phasenübergängen

• verschiedene Aggregatzustände eines spezifischen Stofes: Phase

$$\left. \begin{array}{c} {\rm Festk\"orper} \\ {\rm Fl\"{u}ssigkeit} \end{array} \right\} {\rm Oberfl\"{a}che} \\ {\rm Gas} \\ {\rm Plasma} \end{array} \right\} {\rm keine \ definierte \ Oberfl\"{a}che} \\ \end{array} \\$$

- innerhalb eines Aggregatzustandes können sich eventuell mehrere Phasen ausbilden, die sich in physikalischen Eigenschaften unterscheiden
  - Kristallstruktur (kubisch-hexagonal)
  - Leitfähigkeit (Leiter-Supraleiter, Isolator-Leiter)
  - magnetische Suszebtibilität (papmagnetisch ferromagnetisch)
  - Viskosität (viskose Flüssigkeit Superfluid)



Copyright @ 2006 Pearson Education, Inc., publishing as Benjamin Cummings

Abbildung 4.11: P - V - T-Phasendiagramm von Wasser

- Ordnungsparameter: für Zustand charakteristisches Maß S(T,P,V)
- Phasenübergang: Sprung im Ordnungsparameter!

**Beispiel 1:** Isolator<br/>Metall-Übergang in  $\mathrm{VO}_2$ 



Beispiel 2: Schmelzen von Eis unter

- konstantem Druck $P=1013\mathrm{hPa}$
- konstanter Stoffmenge M
- konstanter Energiezufuhr

I 
$$T < T_c = 273,16$$
K: Eis  
inkompressibel,  $c_V \approx c_P = 2300 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ 

170



Abbildung 4.12: Phasenübergänge von Wasser

II Phasenübergang fest - flüssig mit Ko<br/>existenz bei $T={\rm const.}$ 

 $\Rightarrow$  keine Änderung  $\langle E_{kin} \rangle$ 

 $\Rightarrow$  Erhöhung  $\langle E_{pot} \rangle$ 

latente Wärme (hier: Schmelz(wärme)-Energie für das Herausbrechen aller H<sub>2</sub>O-Moleküle aus Eiskristall)

$$Q_L = N\Delta E = 3.3 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$$

III, IV Flüssigkeit mit  $c_V \approx c_V = 4190 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ 

- III zwischen 0°C und 4°C: Abnahme des Volumens mit Zunahme der Temperatur $\rightarrow$  Anomalie des Wassers
- IV normales Verhalten von Flüssigkeiten
- V Phasenübergang Flüssigkeit Gas (Wasserdampf) am Siedepunkt bei  $T_C = 373$ K mit latenter Wärme  $Q_L = 2,3 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$  (Faktor 7 höher als beim Schmelzen)

Allgemeines Phasendiagramm: komplizierte Flächen im P,V,T-Raum Phasendiagramm von H<sub>2</sub>O in P - V - T-Raum:

• Tripelpunkt  $T_T$  bei der Ko<br/>existenz von drei Phasen möglich ist, z.B.  $T_T = 273,16$ K be<br/>i $P_T \approx 10^3$ Pa für H<sub>2</sub>0

Die Variation von V hat keinen Effekt auf T, nur das Volumensverhältnis Eis-Wasser-Dampf ändert sich (Eis und Wasser sind inkompressibel)  $\rightarrow$  Tripellinie



- kritischer Punkt bei der Temperatur  $T_C = 374^{\circ}$ C in H<sub>2</sub>O, oberhalb dessen keine Unterscheidung bzw. keine Koexistenz von Flüssigkeit und Gas mehr möglich ist.  $\rightarrow$  homogene "Fluidphase" (siehe 4.4.3)
- Dampfdruck-Kurve: Gleichgewicht zwischen Flüssigkeit und Gas

Allgemein gibt es zwei Ordnungen von Phasenübergängen:

- Phasenübergänge 1. Ordnung
  - sprunghafte Änderung des Ordnungsparameters
  - Koexistenz zweier Phasen ist möglich
  - -die latente Wärme $Q_l \neq 0$
- Phasenübergänge 2. Ordnung
  - kontinuierliche Änderung des Ordnungsparameters
  - keine Koexistenz zweier Phasen
  - für die latente Wärme gilt  $Q_L=0$

### Beispiele:



Abbildung 4.13: Beispiele zu Phasenübergänge der 1. und 2. Ordnung

$Q_L \neq 0$ Koexistenz	$Q_L = 0$ keine Koexistenz
z.B. Schmelzen von Eis	z.B. • Übergang von flüssigen
	bzw. gasförmigen Wasser $\rightarrow$ Fluid
	mit $T > 374^{\circ}\mathrm{C}$
	• Aufheizen eines Ferromagneten
	ohne äußeres Magnetfeld $\rightarrow$ Paramagnet
	(Fe: $T_C = 1043$ K)

### 4.6 Die Hauptsätze der Thermodynamik

### 4.6.1 Der erste Hauptsatz der Thermodynamik

- 3 Zustandsgrößen P, V, T, die den Gleichgewichtszustand eines Systems festlegen
- Veränderung eines Systems vom Zustand 1  $(P_1, V_1, T_1)$  zum Zustand 2  $(P_2, V_2, T_2)$ : Übertrag von Wärme  $\Delta W$  und / oder mechachnischer Energie  $\Delta W$
- Volumenänderung bei konstantem Druck

$$\Delta W = -P \,\mathrm{d}V \tag{4.29}$$

• gesamte Arbeit von Zustand 1 zum Zustand 2

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} P(V) \,\mathrm{d}V \tag{4.30}$$

- verschiedene Wege von 1 nach 2 mit unterschiedlichen Funktionen P(V)
- $\Rightarrow$  allgemein:

$$W_A = -\int_{V_1}^{V_2} P_A(V) \, \mathrm{d}V \neq W_B = \int_{V_1}^{V_2} P_B(V) \, \mathrm{d}V$$

 $\Rightarrow W$  ist abhängig von Weg und keine Zustandsvariable wie P, V, oder T

jetzt: Kreisprozess entlang geschlosener Bahn



Die am System geleistete Arbeit ist  $\Delta W=W_B-W_A,$  die im Phasendiagramm eingeschlossene Fläche. Energiebilanz vom Prozess $1{\rightarrow}2$ 

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \Delta Q + \Delta W \tag{4.31}$$

#### 1. Hauptsatz der Thermodynamik

- Energieerhaltung
- Axiom, nicht tiefer begründbar

im Kreisprozess: Anfangs- und Endtemperatur sind identisch

$$\Rightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow W_B - W_a = Q$$

Wärme ist konvertierbar in makroskopische, mechanische Arbeit, aber eine Maschine, die eine Kreisprozess durchläuft kann nicht mehr Arbeit leisten, als ihr an Wärme zugeführt wird. "Es gibt kein perpetuum mobile 1. Art"

Ein Kreisprozess mit identischem Hin- und Rückweg, also  $W_A = -W_B \Rightarrow Q = 0$  ist ein reversibler Prozess, da nach Durchlaufen eines Zyklus keine Veränderung in der Umgebung zurückbleibt.

#### 4.6.2 Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik

Auch dieser Hauptsatz ist axiomatisch und basiert auf unwiderlegten Erfahrungstatsachen. Die Beobachtung ist, dass bestimmte Prozesse zeitlich nur in eine Richtung ablaufen. Beispiele:



• Ein Gas verteilt sich im Gefäß nach der Wegnahme der Trennwand und ist hinterher homogen verteilt



• bei t = 0:  $T_1 > T_2 \implies t_{\text{GGW}}$ :  $T_1 > T_3 > T_2$ 

äquivalente Formulierungen für den zweiten Hauptsatz

- Wärme fließt immer vom wärmeren zum kälteren Körper.
- Ein geschlossenes System strebt immer dem Gleichgewichtszustand zu. Dieser liegt auf einer Zustandsfläche.
- Arbeit kann vollständig in Wärme, aber Wärme nicht vollständig in Arbeit umgewandelt werden.
- Der thermische Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine  $\eta$  ist immer kleiner 1
- Die EntropieSeines geschlossenen Systems kann nur zunehmen oder konstant bleiben  $\Delta S \geq 0$

Alle diese Formulierungen sind untereinander äquivalent! Keine der Formulierungen kann aus dem 1. Hauptsatz erklärt werden.

 $\Rightarrow$  wir brauchen eine weitere Zustandsgröße : Entropie S (4.7)

### 4.6.3 Der Carnot-Prozess

Gedankenexperiment (von CARNOT, 1824) reversibler Kreisprozess in vier Schritten mit dem Arbeitsmedium des idealen Gases

- I. Isotherme Ausdehnung des Gasvolumens von  $(P_1, V_1, T_1)$  nach  $(P_2, V_2, T_1)$  unter Ankopplung an ein Wärmebad  $T_1$
- II. adiabatische Ausdehnung auf  $(P_3, V_3, T_2)$
- III. isotherme Kompression auf  $(P_4, V_4, T_2)$
- IV. adiabatische Kompression zum Ausgangspunkt

Prinzip der Realisierung:



Abbildung 4.14: P - V-Diagramm des CARNOT-Prozesses



(unrealistische) Annahme: alle vier Schritte laufen genau entlang der Zustandsfläche des Arbeitsmediums, also exakt im thermischen Gleichgewicht und damit voll reversibel.  $\Rightarrow$  Energiebilanz:

I.  $T = \text{const.} \Rightarrow U = \text{const.} \Rightarrow dQ = P dV$ 

$$\Delta Q = \int_{V_1}^{V_2} P \,\mathrm{d}V = RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = -\Delta W_{12}$$

einfließende Wärme entspricht einer Expansionsarbeit von 1 nach 2

II. dQ = 0, dU = -P dV < 0,  $\Delta U = U(t_2) - U(T_1)$ 

$$\Delta W_{23} = -\Delta U = c_V \int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}T = c_V \left(T_2 - T_1\right)$$

III. wie bei I, nur in umgekehrter Richtung

$$\Rightarrow \quad \Delta Q_{34} = RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -\Delta W_{34}$$

IV. wie bei II, nur mit umgekehrten Vorzeichen

$$\Rightarrow \Delta W_{41} = -c_V \left( T_2 - T_1 \right)$$

Gesamtarbeit für einen Umlauf mit  $\Delta W_{23} = -\Delta W_{41}$ :

$$\Delta W_{\text{total}} = \Delta W_{12} + \Delta W_{34}$$
$$= RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} + RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

über die Adiabatengleichung (4.28)

$$T_1 V_2^{\kappa - 1} = T_2 V_3^{\kappa - 1}$$

$$T_2 V_4^{\kappa - 1} = T_1 V_1^{\kappa - 1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\kappa - 1} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\kappa - 1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

 $\Rightarrow \Delta W_{\text{total}} = R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_1}{V_2} < 0$ 

 $\rightarrow$  Wärmekraftmaschine

- entnimmt Wärme  $\Delta Q_{12}$
- verrichtet Arbeit  $\Delta W_{\text{tolal}}$

$$\Rightarrow$$
 Der Wirungsgrad der CARNOT-Maschine:

$$\eta_C = \frac{\Delta W_{\text{total}}}{\Delta Q_{12}} = \frac{R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_1}{V_2}}{RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2}} \\ = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$
(4.32)

damit ist  $\eta_C < 1, T > 0$ 

Wärme  $\Delta Q_{34}$  geht ungenutzt an Bad  $T_2$  $\eta_C$  steigt mit  $T_1 - T_2 = cT$ alle vier Schritte sind reversibel, damit ist der Prozess auch umgekehrt möglich.  $\Rightarrow$  Wärme im Bad  $T_2$  (kälter) in Bad  $T_1$  (wärmer) gepumpt;  $\rightarrow$  Wärmepuknmpe bzw. Kältemaschine

Spezifizierung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik:

keine periodisch arbeitende Maschine hat einen Wirkungsgrad  $\eta > \frac{T_2 - T_1}{T_1} = T_C$ 

Begründung: CARNOT-(Kälte)-Maschine CM und hypothetische Maschine M mit  $\eta > \eta_C$  arbeiten gegeneinander.



Die CARNOT-Maschine braucht  $\Delta W$ , um  $\Delta Q_1$  an 1 abzugeben, bei Aufnahme von  $\Delta Q_2$  aus 2.

$$|\Delta Q_1| = |\Delta Q_2| + |\Delta W|$$

Falls M mit  $\eta > \eta \Rightarrow \Delta Q < \Delta Q_1$ 

Das System aus M und CM erwärmt Warmebad 1 durch Abkühlen von Kältepad 2.

Daraus folgt ein Widerspruch zum 2. Hauptsatz!  $\Rightarrow \eta_C$  ist der maaximale Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine weitere Formulierung des 2. Hauptsatzes:

"Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die ohne äußere Energiezufuhr ein Wärmereservoir abkühlt und dabei gewonnene Energie vollständig in mechanische Arbeit umwandelt."

kurz:

Es gibt kein *perpetuum mobile* zweiter Art

# 4.7 Irreversibilität und Entropie

#### 4.7.1 Reversibilität und Irrevisibilität

Stoßprozess zwischen zwei makroskopischen Körpern mit anfangs identischer Temperatur T

• elastisch



Erhaltung makroskopischer kinetischer Energie  $\Rightarrow T' = T$  Dieser Prozess ist zeitlich umkehrbar, bzw. reversibel

 $\bullet$  inelastisch



$$\frac{m_1 + m_2}{2} v'^2 < \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 \quad \Rightarrow \quad T' > T$$

Umwandlung von makroskopischer kinetischer Energie in mikroskopische kinetische Energie, also Wärme

 $\rightarrow$  Prozess irreversibel

Die Irreversibilität folgt aus der Anregung vom System mit vielen Freiheitgraden, also viele Möglichkeiten für den makroskopischen Gesamtzustand. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Prozess rückwärts abläuft, ist verschwindend gering.

**Beispiel:** Gasteilchen im Volumen V versameln sich spontan in einem Halbraum  $\frac{V}{2}$ ?



Abschätzung: Wahrscheinlichkeit  $W_N(B) \approx \left(\frac{1}{2}\right)$ 

Zeit, nach der ein einzelnes Teilchen den Halbraum wechselt:  $\Delta \tau \approx \frac{\sqrt[3]{V}}{\langle v \rangle}$  $\Rightarrow$  Zeitraum  $\Delta t$ , in dem Zustand B im Mittel einmal agenommen wird:

$$\Delta t \approx \frac{\Delta \tau}{W_N(B)} = \frac{\sqrt[3]{V}}{\langle v \rangle} 2^N$$

mit  $V = 1l, \langle v \rangle = 400 \frac{\text{m}}{\text{s}}, N = 10^{23}$ 

 $\Delta t \approx 10^{10^{22}} \mathrm{s}$ 

Vergleich mit dem Alter des Universums:  $\approx 5\cdot 10^{17} {\rm s}$  $\Rightarrow$ Wir brauchen quantitatives Maß für die Anzahl von Zuständen und damit als Kriterium für Irreversibilität.

 $\rightarrow$  Entropie S

- irreversible Prozesse: Entropie nimmt zu  $\Delta S > 0$
- reversible Prozesse: Entropie bleibt konstant  $\Delta S = 0$

### 4.7.2 Entropie

a) reversibler Prozess, z.B. CARNOT



von 1 nach 3 über verschiedene Wege:  $\left\{ \begin{array}{l} 1 \to 2 \to 3 \\ 1 \to 4 \to 3 \end{array} \right.$ 

- $\frac{\mathrm{d}Q}{T}$ : reduzierte Wärmemenge
- CARNOT:

$$\Delta Q_{12} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$
$$\Delta Q_{43} = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$
$$\cdot \quad \left| \frac{\Delta Q_{12}}{T_1} \right| = \left| \frac{\Delta Q_{43}}{T_2} \right|$$

- $\Rightarrow$ die reduzierte Wärmemenge ist unabhängig vom Weg
- $\rightarrow$  **Definition:**  $dS = \frac{dQ}{T} ds$ Änderung der Entropie. Damit ist *S* eine Zustandsgröße!
- CARNOT:  $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \pm R \ln \frac{V_2}{V_1}$   $\Rightarrow$  insgesamt ist  $\Delta S = 0$  bzw. S = const., damit ist es ein reversibler Kreisprozess
- b) Erfahrung: Bei irreversilen Prozessen in abgeschlossenen Systemen nimmt die Gesamtentropie S immer zu bzw. $\Delta S>0$ 
  - Beispiel 1: 2 identische Körper mit unterschiedlicher Temperatur  ${\cal T}_1$  und  ${\cal T}_2$

 $\Rightarrow$ 



Wärmemengen:

$$Q_1 = mcT_1$$
$$Q_2 = mcT_2$$

durch Wärmestrom nach Kontakt: mittlere Temperatur ${\cal T}_m$ 

aus 
$$\Delta Q_1 = mC(T_m - T_1)$$
 und  
 $-\Delta Q_2 = mC(T_2 - T_m)$  und  
 $\Delta Q_1 = -\Delta Q_2$   
 $T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}$ 

Entropieänderungen:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_m} \frac{\mathrm{d}Q_1}{T} = mc \int_{T_1}^{T_m} \frac{\mathrm{d}T}{T}$$
$$= mC \ln \frac{T_m}{T_1} < 0$$
$$\Delta S_2 = mC \ln \frac{T_m}{T_2} > 0$$
$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mC \ln \frac{T_m^2}{T_1 T_2}$$
$$= mC \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} > 0$$

• Beispiel 2: (siehe 4.7.1).

$$V_1 \qquad V_2$$

$$V_1 \qquad V_2$$

$$V_2 \qquad V_2$$

Entropieänderung nach Öffnen der Membran aus CARNOT:

$$\Delta S = R \ln \frac{V}{V_1} > 0$$

vergleiche die Wahrscheinlichkeit nach Öffnen, dass alle Teilchen in  $V_1$  sind:

$$W_N(V_1) = \left(\frac{V_1}{V}\right)^2 = \left(\frac{V_1}{V}\right)^{\frac{R}{k_B}} \qquad \text{für } N = N_A = \frac{R}{k_B}$$
$$\Rightarrow \quad k_B \ln W_N = R \ln \frac{V_1}{V}$$
$$= -R \ln \frac{V}{V_1} = -\Delta S$$

 $\Rightarrow$  statistische Interpretation der Entropieänderung  $\Delta S$ :

$$\Delta S = -k_B \ln \underbrace{\frac{W_N(V_1)}{W_N(V)}}_{1}$$
$$= k_B \ln \frac{W_N(V)}{W_N(V_1)}$$
$$= k_B \ln \frac{W_{\text{nachher}}}{W_{\text{machher}}}$$

 $\Delta S$  ist also ein logarithmisches Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass ein System vom Zustand 1 (hier: alle Teilchen in  $V_1$ ) in den Zustand 2 (hier: alle Teilchen im Gesamtvolumen V) übergeht.

 $\Rightarrow$  absolute Definition der Entropie:

$$S = k_B \ln W_N$$

W: ANzahl an Realisierungsmöglichkeiten des Systems

### 4.7.3 Dritter Hauptsatz der THermodynamik

Kann man die absolute Entropie als Fukntion der reduzierten Wärme definieren?

$$S(T) = \int_0^T \frac{\mathrm{d}Q}{T} + \underbrace{S(o)}_{=0}$$

Die Entropie ist Null am absoluten Nullpunkt für reine Systeme. daher: Axiom; die Begründung liegt dann in der Quantenmechanik. Äquivalente Formulierungen für den dritten Hauptsatz:

• Ein reines Stoffsystem (keine Mischungsentropie) besitzt beiT=0nur eine einzige Realisierungsmöglichkeit mitW=1

$$\Rightarrow S(0) = k_B \ln W = 0$$

- Es ist prinzipiell unmöglich, den absoluten Temperaturnullpunkt T = 0K exakt zu erreichen.
- Die Wärmekapazität jedes realen Systems verschwindet mit Annäherung an den absoluten Nullpunkt:

$$\lim_{T \to 0} C_V = 0$$

(vgl. 4.5.1)

### 4.8 Formale Aspekte der Thermodynamik

4.8.1 Gibb'sche Fundamentalform

A)



Starten wir von den Messgrößen

• Energieflüsse (Leistungen) in / aus dem System
- Änderungen makroskopischer Messgrößen, extensive Variablen z.B.
  - E innere Energie
  - V Volumen
  - $N_{(i)}$  Teilchenzahl der *i*-ten Spezies

außerdem noch Q als Ladung oder magnetisches Moment  ${\bf M}$ usw.

Beispiel: Kompression einer "Gasfeder"



$$F = -Ap$$
$$ds = \frac{dV}{A}$$

Leistung gegen Druck des Gases:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

dt interessiert nicht  $\rightarrow$  Arbeit  $\Delta W = -p\Delta V$ 

- B) Es treten in der Thermodynamik zwei neue Probleme auf.
  - I Dissipation (Reibungsverluste), die Energieerhaltung verletzen, irreversible Prozesse
  - II Selbst ohne Dissipation (Da Reibung proportional zur Geschwindigkeit ist, gibt es eine Näherung von sog. quasistatischen Prozessen, welche reversibel sind (z.B. CARNOT-Prozess)) reichen die vertrauten Mengengrößen E, N, V nicht aus, um alle Energiebeiträge zu beschreiben. (Grund: weil die wenigen Makrovariablen den  $10^{23}$  mikroskopischen Freiheitsgraden gegenüberstehen)

Neu:

Wärmeänderung 
$$\Delta Q$$
  
neue extensive Makrovariable  $S$  mit dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\mathrm{d}s \gtrless \frac{\Delta Q}{T}$$

dabei ist < bei irreversilen und > bei reversiblen Prozessen und T die Temperatur.

C) Thermodynamik (mechanische / phänomenologische Beschreibung von Materie) leistet

- (i) Energieerhaltung wiederhergestellt
- (ii) Gleichgewichtszustände zu charakterisieren
- (iii) reversible Prozesse zwischen Gleichgewichtszuständen quantitativ zu beschreiben
- (iv) Dissipation zu charakterisieren
- **D)** Wichtigste Postulate (Hauptsätze)
  - (i) isolierte Systeme verändern sich spontan, bis sie in Gleichgewichtszuständen (zeitunabhängig, unabhängig von der Vorgeschichte, ohne Massentransport) vorliegen
- (ii) Gleichgewichtszustände können mit wenigen makroskopischen Variablen beschrieben werden E, N, V, S (Entropie),  $[Q, N, \dots, X]$
- (iii) Erster Hauptsatz: Energieerhaltung

$$\mathrm{d}E = \Delta W + \Delta Q$$



(Qund Wsind keine Zustandsvariablen! mathematisch: es gibt keine Stammfunktion Qund W  $\rightarrow \int_A^B \Delta Q$ ist wegunabhängig)

(iv) Zweiter Hauptsatz: Entropie und Dissipation. Es gibt eine extensive Variable S = S(E, V, N) (Funktion der extensiven Variablen) die monoton mit E anwächst, und bei adiabatischen Prozess (d.h.  $\Delta Q = 0$ ) von Zustand A nach Zustand B erfüllt.

$$S_B - S_A = \Delta S_{\text{adiab}} \ge 0$$

wobei

$$\mathrm{d}S \geq \frac{\Delta Q}{T}$$

Wobe<br/>i $\Delta S_{\rm adiab} = 0$ nur für reversible Prozesse gilt. Irreversible Prozesse<br/>  $S_B > S_A$ können bei adiabatischer Isolierung, also nicht umgekehrt laufen.

**Bemerkung:** System mit  $10^{23}$  Freiheitsgraden durch wenigen Varriablen beschrieben. Bei irreversiblen Prozessen genügen die Makrovariablen nicht, da viele mikroskopische Freiheitsgrade die Energie erhalten; da wir diese nicht kontrollieren können, kann der Prozess umgekehrt werden.

**E)** Aus Betrachtung der Energieflüsse gewinnen wir ein Postulat, dass GIBB'sche Fundamentalform für (reversible Änderungen zwischen) Gleichgewichtszuständen gilt:

$$dE = T dS - p dV + \sum_{i=1}^{\nu} \mu_i dN_i + \ldots + \xi dX$$

 $\nu$ : Zahl der chemischen Komponenten und  $\nu = 1$  im Folgenden, also:

$$\mathrm{d}E = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N$$

GIBB'sche Fundamentalform

## **Folgerungen:**

(i) Gleichgewichtszustand erfüllt

$$E = E(S,V,N)$$

innere Energie ist eine Funktion (nur)(aller) externen Variablen

(ii) intensiven Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(S,V,N)}{\partial S} &= T(S,V,N) = T & \text{Temperatur} \\ \frac{\partial E(S,V,N)}{\partial V} &= -p(S,V,N) = -p & \text{Druck} \\ \frac{\partial E(S,V,N)}{\partial N} &= \mu(S,V,N) = \mu & \text{chemisches Potential} \end{aligned}$$

zu zeigen ist, dass T, p und  $\mu$  den vertrauten Konzepten entsprechen.

 $\begin{pmatrix} T: \text{ klassisch: über die thermische Geschwindigkeit } \frac{1}{3}m\langle \mathbf{v}^2 \rangle = k_B T \\ p: (\text{Kraft / Fläche}) \text{ in klassischen Gasen und Flüssigkeiten, Stöße an der Wand; vgl Aufgabe 56} \end{pmatrix}$ 

(iii) Zweiter Hauptsatz: weil

$$0 < \frac{\partial S(E,V,N)}{\partial E} = \frac{\partial E(S,V,N)}{\partial S} \neq 0$$

kann die GIBB'sche Fundermentalform auch geschrieben werden als:

$$dS = \frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN$$
$$S = S(E, V, N)$$

also

#### 4.8.2 Zustandsgleichungen

Die funktionalen Zusammenhänge z.B. T = T(S,V,N) auch p = p(S,V,N) heißen Zustandsgleichungen für ein spezielles System und legen die innere Energie E(S,V,N) bis auf Integrationskonstanten fest

z.B. 
$$E(S,V,N) = \int dS' \underbrace{T(S',V,N)}_{\frac{\partial E}{\partial S}} + \underbrace{G(V,N)}_{*}$$

\*: Funktion von V und N. Beispiel: Ideales monoatomes (f = 3) Gas:

$$p(T,V,N) = \frac{N}{V}k_BT$$

$$E(T,V,N) = \frac{3}{2}k_BTN \qquad T = T(E,N,V)$$

$$p(S,V,N) \propto V^{\kappa}$$

mit den ersten beiden Zustandsgleichen folgt für das ideale Gas:

$$p(E,V\!,\!N)=\frac{2}{3}\frac{E}{V}$$

**Bemerkung:** Während also E(S,V,N) die vollständigen Informationen der Thermodynamik ber das System enthält, gibt E(T,V,N) nur die Ableitung einer Funktion F(T,V,N), welche die selbe Information, wie E(S,V,N) enthält:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} F(T,V,N)/T &= -E(T,V,N)/T^2 \\ \Rightarrow F(T,V,N) &= -T \int_{T} dT' E(T',V,N)/T'^2 + \tilde{G}(N,V) \end{aligned}$$

# 4.8.3 Homogenität und Gibbsfunktion

Die Mengengrößen E, S, V, N wachsen linear mit den Systemghrößen an.



Für den Gleichgewichtszustand folgt also

$$E(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda E(S, V, N)$$

Die Energie ist also eine homogene Funktion erster Ordnung der extensiven Variablen.

Abkürzungen im Folgenden:  $\lambda S = S', \ \lambda V = V', \ \lambda N = N'.$ 

$$\frac{\partial E}{\partial S'} \frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\partial E}{\partial V'} \frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\partial E}{\partial N'} \frac{\mathrm{d}N'}{\mathrm{d}\lambda} = E(S,V,N)$$

$$\stackrel{\text{GFF}}{\Longrightarrow} \quad T(S',V',N')S - p(S',V',N')V + \mu(S',V',N')N = E(S,V,N)$$

Vergleich für  $\lambda = 1$ :

$$S' = S \quad V' = V \quad N' = N$$
$$E(S,V,N) = T(S,V,N)S - p(S,V,N)V + \mu(S,V,N)N$$

EULER'scher Beziehung gibt GIBB'sche Funktion E(S,V,N) weil diese nur von den extensiven Variablen abhängt.

#### 4.8.4 Gibbs-Duhem-Beziehung

Aus GIBBSfukntion und GIBBS'sche Fundamentalform folgt die Beziehung zwischen intensiven Größen: (betrachte totales Differential):

$$\begin{split} E &= TS - pV + \mu N \\ \mathrm{d}E &= T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N + S\,\mathrm{d}T - V\,\mathrm{d}p + N\,\mathrm{d}\mu \\ \mathrm{mit} \quad \mathrm{d}E &= T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V - \mu\,\mathrm{d}N \quad \mathrm{GiBBS'sche\ Fundamentalform} \end{split}$$

$$\Rightarrow \quad S \,\mathrm{d}T - V \,\mathrm{d}p + N \,\mathrm{d}\mu = 0$$

also  $d\mu = \frac{V}{N} dp - \frac{S}{N} dT d.h. \ \mu = \mu(T,p)$  chemisches Potential ist eine Funktion nur von T und p (genauso  $T = T(p,\mu)$  oder  $p = p(T,\mu)$ )

# 4.8.5 Maxwell-Relationen

Weil partielle Ableitungen vertauschen, gilt:

$$\begin{split} & \left[ = \frac{\partial}{\partial V} \frac{\partial E\left(S,V,N\right)}{\partial N} = \frac{\partial \mu\left(S,V,N\right)}{\partial V} \\ & \frac{\partial^2 E\left(S,V,N\right)}{\partial V \,\partial N} \right| \\ & \left[ = \frac{\partial}{\partial N} \frac{\partial E\left(S,V,N\right)}{\partial V} = \frac{\partial p\left(S,V,N\right)}{\partial N} \right] \end{split}$$

Die beiden letzten partiellen Ableitungen können nun gleichgesetzt werden. Dies liefert Beziehungen zwischen partiellen Ableitungen, die sogenannten MAXWELL-Relationen<sup>1</sup>.

# 4.8.6 Beispiel Ideales Gas

#### A) Sackur-Tetrade Gleichung der Gibbsfunktion.

Zustand des dealen Gases  $p(E,V,N) = \frac{2}{3} \frac{E}{V}$ 

$$\begin{split} \frac{\partial S(E,V,N)}{\partial V} &= \frac{\partial p(S,V,N)}{\partial T(E,V,N)} = p(E,V,N) \frac{\partial S(E,V,N)}{\partial E} \\ \Rightarrow \quad \frac{3}{2} V \frac{\partial S(E,V,N)}{\partial V} &= E \frac{\partial S(E,V,N)}{\partial E} \end{split}$$

damit  $S(E,V,N) = \Sigma(V^{\frac{2}{3}}E)$  wobei  $\Sigma(x)$  eine unbekannte Funktion darstellt. Dies ist so, weil die partiellen Ableitungen ergeben:

$$\frac{\partial S\left(E,V,N\right)}{\partial E} = \Sigma' V^{\frac{2}{3}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial S\left(E,V,N\right)}{\partial V} = \frac{2}{3} \,\Sigma' \, EV^{-\frac{1}{3}}$$

wobei  $\Sigma'$  die Ableitung  $\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}x}$  mit  $x = EV^{\frac{2}{3}}$  darstellt. Weil nun aber gilt

$$\frac{\partial S\left(E,V,N\right)}{\partial E} = \frac{1}{T\left(E,V,N\right)} = \frac{Nk_B}{\frac{2}{3}E} = \Sigma' V^{\frac{2}{3}}$$

folgt für die Stammfunktion:

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{2} \frac{Nk_B}{EV^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{2} \frac{Nk_B}{x}$$

Dies können wir integrieren und erhalten

$$\Sigma(x) = \frac{3}{2}Nk_B \cdot \ln \frac{x}{x_0}$$

wobei  $x_0$  Integrationskontante ist. Auflösen von  $S = \Sigma(EV^{\frac{2}{3}})$  ergibt für das ideale Gas

$$E(S,V,N) = \frac{C}{V^{\frac{2}{3}}} e^{\left(\frac{2}{3} \frac{S}{Nk_B}\right)}$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Dieser Teil ist nicht in der Vorlesung besprochen worden.

Dieses Ergebnis erflt noch nicht die Homogenität, also dass  $E(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda E$  sein soll, weil wir noch nicht verwendet haben, dass C eine Funktion von N ist. Aus der Homogenitätsbedingung folgt nämlich

$$C(N) = C_0 N^{\frac{5}{3}}$$

Für die Energiefunktion haben wir damit

$$E(S,V,N) = C_0 \frac{N}{\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{2}{3}}} e^{\left(\frac{2}{3}\frac{S}{Nk_B}\right)}$$

Aus der statistischen Physik erhalten wir die Werte fr $C_0$  zum Beispiel fr spinlose Fermionen:

$$C_0 = \frac{3}{4\pi} \frac{h^2}{m} e^{-\frac{5}{3}}$$

#### **B)** Chemisches Potential

$$\mu\left(S,V,N\right) = \frac{\partial E\left(S,V,N\right)}{\partial N} = \frac{5}{3} \frac{E}{N} - \frac{2}{3} \frac{SE}{k_B N^2}$$

Nach GIBBS-DUHEM soll  $\mu = \mu(p,T)$  sein, wobei gilt:

$$T(S,V,N) = \frac{\partial E(S,V,N)}{\partial S} = \frac{2}{3} \frac{E}{Nk_B}$$
$$p(S,V,N) = \frac{\partial E(S,V,N)}{\partial V} = \frac{2}{3} \frac{E}{V}$$

also:

$$\mu = k_B T \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{S}{k_B N}\right)$$

Nach Auflösen der Entropie und mit der Zustandsgleichung haben wir:

$$\frac{S}{k_B N} = \frac{3}{2} \ln \left( \frac{E}{C_0 N} \left( \frac{V}{N} \right)^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{3}{2} \ln \left( \frac{3k_B T}{2C_0} \left( \frac{k_B T}{p} \right)^{\frac{2}{3}} \right)$$

führt auf das Ergebnis

$$\mu(T,P) = k_B T \cdot \left[ \ln P - \frac{5}{2} \ln T + \tau \right]$$

Nach allgemeiner Definition ist  $\mu$  die reversible Änderung inneren Energie bei Änderung der Teilchenzahl, wenn S und V konstant bleiben. Für  $p \to 0$  werden alle Gase ideal, und dabei gilt:  $\mu \to -\infty$ . Dies beschreibt, dass ein Gas ins Vakuum expandiert, denn alle Teilchen streben von hohem  $\mu$  zu niedrigem.

### 4.8.7 Thermodynamisches Gleichgewicht und thermodynamische Extremalprinzipien

#### A) Maximumsprinzip der Entropie

Nach dem zweiten Hauptsatz nimmt die Entropie bei irreversiblen Prozessen zu. Dies fhrt zu einer Definition eines Gleichgewichtszustandes als Zustand mit maximaler Entropie.

#### **Definition:**

Innere Hemmung (iH) sind Einschränkungen der inneren Verteilung extensiver Variablen bei Konstanz der gesamten extensiven Größe. Ein Beispiel ist ein festes Volumen V mit der inneren Hemmung in Form einer Wand, die das Volumen in  $V_1$  und  $V_2$  unterteilt, so dass  $V = V_1 + V_2$  gilt.



**Gedankenexperiment:** Prozess 1 sei ein reversibler Weg, bei dem die innere Hemmung unter Zufluss von Arbeit und Abfluss von Wärme errichtet wird. Prozess 2 beschreibe die freie Relaxation des Systems bei adiabatischer Isolierung, wenn iH entfernt wird. In unserem Beispiel wäre das das Entfernen der Wand zum Zeitpunkt t = 0, so dass Teilchen von  $V_1$  nach  $V_2$  gelangen können.

Der zweite Hauptsatz besagt nun, dass beim Prozess 2 die Entropie zunimmt:

 $S\left(E,X\right) > S\left(E,X,iH\right)$ 

Der Gleichgewichtszustand hat die maximale Entropie verglichen mit allen Zuständen mit innerer Hemmung.

#### B) Thermisches Gleichgewicht und Temperatur



i.A. der Energieaustausch verhindert

Bei diesem Experiment gibt es eine Verbindung, ber die beide Subsysteme nach Abschalten der inneren Hemmung Energie austauschen können, nachdem die innere Hemmung  $E = E_1 + E_2$  in Subsysteme aufgeteilt hatte. Mit  $\delta S_i$  und  $\delta E_i$ , den Variationen von  $S_i$  und  $E_i$  relativ zum Gleichgewichtszustand, gilt:

$$\delta S = \delta S_1 + \delta S_2 \doteq \frac{\partial S_1 (E_1, X)}{\partial E_1} + \frac{\partial S_2 (E_2, X)}{\partial E_2} + \dots$$

Wegen E = const. muss  $\delta E_1 = -\delta E_2$  sein. Mit der GIBBSschen Fundamentalform gilt:

$$\frac{\partial S_{i}\left(E_{i},X\right)}{\partial E_{i}} = \frac{1}{T_{i}\left(E_{i},X\right)}$$

Und damit folgt

$$\delta S = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \delta E_1 < 0$$

da S im Gleichgewichtszustand offensichtlich maximal ist. Da sowohl  $\delta E_1 < 0$  als auch  $\delta E_1 > 0$  möglich ist, muss im Gleichgewichtszustand gelten:

$$T_1 = T_2$$

#### Fazit:

Die Analyse einer kleinen Abweichung  $\delta E$  und  $\delta S$  vom Gleichgewichtszustand zeigt mit dem zweiten

Hauptsatz, dass  $T = \frac{\partial E}{\partial S}$  im ganzen System gleich sein muss, wenn interner Energieaustausch möglich ist. Damit ist verifiziert, dass T dem Konzept der Temperatur entspricht. In welche Richtung fließt nun die Energie, wenn zu Prozessbeginn  $T_1 \neq T_2$  gilt? Betrachten wir die (immer

positive) Entropieproduktion:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 > 0$$

Für kleine  $\Delta E$  gilt also

$$0 < \frac{\partial S_1}{\partial E_1} \Delta E_1 + \frac{\partial S_2}{\partial E_2} \Delta E_2 \quad \Rightarrow \quad 0 < \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \Delta E_1$$

- Wenn  $T_1 > T_2$  ist, ist  $\Delta E_1 < 0$ ,  $E_1$  verringert sich.
- Wenn  $T_1 < T_2$  ist, ist  $\Delta E_1 > 0$ ,  $E_1$  wächst.

Die Energie fließt immer vom wärmeren zum kälteren. Mit analogen Betrachtungen zeigt man, wenn nach Wegnahme der Wand (iH) freier Volumenaustausch möglich ist, dass überall  $p_1 = p_2$  gelten muss und das System zum Druckausgleich strebt. Aus Sicht der nun frei austauschbaren Teilchen muss im Gleichgewicht ebenfalls  $\mu_1 = \mu_2$  gelten.

Fazit: Im Gleichgewicht haben die intensiven Größen überall den selben Wert.



Abbildung 4.15: Phasendiagramm, GIBBS'sche Phasenregel

#### C) Stabilität des Gleichgewichtes und thermodynamische Koeffizienten

<sup>2</sup> Durch Weiterfhrung der Rechnung in B erhalten wir:

$$\delta S = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \delta E_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial E_1} \frac{1}{T_1(E_1, X)} + \frac{\partial}{\partial E_2} \frac{1}{T_2(E_2, X)}\right) \cdot (\delta E_1)^2 + \mathcal{O}\left((\delta E_1)^3\right)$$

welches nach dem zweiten Hauptsatz < 0 sein muss. Hieraus kann nun eine Forderung an  $\frac{\partial}{\partial E} \frac{1}{T}$  im Gleichgewichtszustand gewonnen werden. In diesem muss nämlich neben  $T_1 = T_2$  auch gelten:

$$0 > \frac{\partial}{\partial E} \frac{1}{T(E,X)} = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T(E,X)}{\partial E} = -\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial E(T,X)}{\partial T}\right)^{-1} = -\frac{1}{T^2} \cdot \frac{1}{C_X}$$

wobe<br/>i $C_X$  die spezifische Wärme bei konstante<br/>mX = V, Nist. Für unseren Fall lässt sich daraus ableiten:

 $C_V > 0$ 

Die spezifische Wärme muss immer positiv sein. Ein Zustand mit negativem  $C_V$  hätte bei  $T_1 > T_2$ einen negativen Energiefluss von 1 nach 2, damit wrde ein Temperaturunterschied größer werden und das System könnte nie ins Gleichgewicht.

 $<sup>^{2}</sup>$ Dieser Teil, bis zum Ende des Skriptes, wurde in der Vorlesung nicht besprochen.

#### 4.8.8 Thermodynamische Potentiale

# A) Wärmebad

Ein isoliertes System bestehe aus zwei Subsystemen, die extensive Variablen austauschen können. Hierbei sei Subsystem 2 sehr viel kleiner als Subsystem 1. Wir haben gesehen, dass die intensiven Variablen beider Subsysteme gleich sind, und in diesem Fall im Wesentlichen durch das viel größere System 1 bestimmt sind. Zur Beschreibung von Subsystem 2 wollen wir daher intensive Variablen als unabhängige Variablen einführen anstatt wie bisher die extensiven Größen E, S,...

# [B] Legendre-Transformation

Sie erlaubt es, konjugierte Variablen in energie<br/>artigen Ausdrcken auszutauschen. Die Gibbssche Fundamentalform der inner<br/>en Energie E(S,V,N) lautet:

$$dE = T \ dS - p \ dV + \mu \ dN$$

Schreibt man dieses um in die Helmholtz-Freie-Energie F = E - TS, so erhält man:

$$dF = dE - T dS - S dT = -S dT - p dV + \mu dN$$

Damit haben wir die beiden neuen Beziehungen, die nicht mehr explizit von S abhängen:

$$F(T,V,N)$$
 und  $S(T,V,N) = \frac{\partial F(T,V,N)}{\partial T}$ 

#### C) Helmholtz-Freie-Energie F

Sie beschreibt Systeme bekannter Temperatur ber die Beziehung F = E - TS. Setzt man diese in 4.8.2 ein, so erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial T}\frac{F\left(T,V,N\right)}{T} = \frac{1}{T}\frac{\partial F\left(T,V,N\right)}{\partial T} - \frac{F\left(T,V,N\right)}{T^{2}} = \frac{-S\left(T,V,N\right)}{T} - \frac{E-TS}{T^{2}} = \frac{E\left(T,V,N\right)}{T^{2}}$$

Als Beispiel sei die Energie des Idealen Gases gegeben durch:

$$E(T,V,N) = \frac{3}{2}Nk_BT$$

# D) Enthalpie H

H = E + pV mit dem Differential

$$\mathrm{d}H = T \,\mathrm{d}S + V \,\mathrm{d}p + \mu \,\mathrm{d}N$$

Sie beschreibt Systeme bei konstantem Druck aber variabler Temperatur, wobei zusäzzlich gilt:

$$V = \frac{\partial H\left(S, p, N\right)}{\partial p}$$

# E) Freie Enthalpie (Gibbs-Free-Energy)

$$G(T,p,N) = E - TS - pV = \mu(T,p) \cdot N$$

mit dem Differential

$$\mathrm{d}G = -S \,\mathrm{d}T + V \,\mathrm{d}p + \mu \,\mathrm{d}N$$

Beschreibt Systeme bei einem bestimmten Druck und einer bestimmten Temperatur.

#### **F)** Großkanonisches Potential $\Omega$

 $\Omega = E - TS - \mu N = -p \left( T, \mu \right) \cdot V$ 

mit dem Differential

$$\mathrm{d}\Omega = -S \,\mathrm{d}T - p \,\mathrm{d}V - N \,\mathrm{d}\mu$$

Dieses Potential beschreibt Systeme bekannter Temperatur, die Teilchen frei austauschen können.

# A Literaturverzeichnis

- [Zth] Optik. Lichtstrahlen Wellen Photonen. von Wolfgang und Ursula Zinth. Oldenbourg Verlag München Wien. ©2005 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, München.
- [For] Analysis 2. Differentialrechnung im  $\mathbb{R}^n$ , gewöhnliche Differentialgleichungen. Otto Forster. 6. Auflage. Vieweg & Sohn Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2005.
- [De1] Experimentalphysik 1. Mechanik und Wärme. Wolfgang Demtröder. 3. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2005.
- [De2] Experimentalphysik 2. Elektrizität und Optik. Wolfgang Demtröder. 3. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2005.
- [No2] Grundkurs Theoretische Physik 2. Analytische Mechanik. Wolfgang Nolting. 6. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2004.

# Weitere Literaturhinweise zum Vertiefen und Weiterarbeiten:

- [Je2] Mechanik II. Theoretische Physik: Eine Einführung in die mathematische Naturbeschreibung. Rainer J. Jelitto. Band 2. 2. Auflage. AULA-Verlag GmbH, Wiesbaden 1994.
- [Je3] Elektrodynamik. Theoretische Physik: Eine Einführung in die mathematische Naturbeschreibung. Rainer J. Jelitto. Band 3. 3. Auflage. AULA-Verlag GmbH, Wiesbaden 1994.
- [No4] Grundkurs Theoretische Physik 4. Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik. Wolfgang Nolting. 6. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2005.
- [LL1] Lehrbuch der theoretischen Physik. Mechanik. Band 1. L.D. Landau, E.M. Lifschitz. 14. Auflage. Deutsch Verlag, Frankfurt am Main, 2004.
- [Arn] Mathematical methods of classical mechanics. V. S. Arnold. Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, New York 1978.
- [Sch] Theoretische Physik: Band 1. Mechanik von den Newtonschen Gesetzen zum deterministischen Chaos. Florian Scheck. 7. Auflage. Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, New York 2003.
- [Hin] Perturbation methods. E. J. Hinch. Cambridge University Press, Cambridge 2002.
- [Cha] Introduction to Statistic Mechanics. D. Chantler.

# B Abbildungsverzeichnis

1.1	H-Feld im Kondensator	9
1.2	Leitfähigkeit in Abhängigkeit der Temperatur	11
1.3	Ausbreitung der Welle nach d'Alambert	15
1.4	Lichtkegel zur Trennung der Bereiche, die zum Signal beitragen	17
1.5	zirkulare Polarisation	20
1.6	elliptische Polarisation	21
1.7	FOURIER transformation am Beispiel einer GAUSS-Glocke	24
1.8	anisotroper Kristall	30
1.9	Brewsterwinkel	32
1.10	Phasensprung für Reflexion am optisch dichterem Medium	40
1.11	Reststrahlreflexion	41
1 12	Beststrahlbande	42
1 13	Skinlänge	43
1.14	Phasensprung bei Reflexion am optisch dünneren Medium	47
1 15	Brewsterwinkel	47
1.10	Strahlenbündel	48
1.10	Fata Morgana	10
1 18	Reflevionsgesetz	40
1.10	Brochungsgesetz	50
1.19	Strahlahlanlaung durch ein Drieme	50
1.20	Abbildung an einem anbärisheen Spiegel	50
1.21	Abbildung durch eine brechende Kugelfläche	52
1.22	Riddronstruction since suggedebaten Körnere durch sine dünne Sammellinge	52
1.20	Diakonstruktion eines ausgedehnten Körpers aurch eine dunne Sammennise	00 E 4
1.24	Cohemoticable Depetallung sings Depialitionseparates	54
1.20	Schematische Darstellung eines Projektionsapperates	55
1.20	Totographische Kamera	50
1.21	Schematischer Aufbau des menschnichen Auges	57
1.28	Normal- und Falschsichtigkeit des Menschlichen Auges	57
1.29	Michelson-Interferometer	59
1.30	Beugung an einer Rechteckblende	71
1.31	Beugung an einer kreisformigen Blende	72
1.32	Fouriertransformation verschiedener Offnungen	73
1.33	Beugung am Einfachspalt; Lage der Minima und Maxima	74
1.34	Beugungsbild eines Gitters aus 5 Spalten	76
1.35	Streuprozess einer einfallenden Welle	77
1.36	Streudiagramm	79
1.37	Strahlungsdiagramm eines Hertz-Oszillators	81
1.38	Versuch zur Rayleigh-Streuung	82
9.1	Tengenen am Beigniel von Betation des Koordinatensystems	95
2.1	Tensoren am Delspiel von Kotation des Koordinatensystems	00
2.2	Michaleen Merker Versich	81
2.0	Depetellung von each einh und tenh	00
2.4		90
3.1	Schaubild einer Brachystochrone als Stück einer Zykloide	106
3.2	(starr) gekoppelte Pendel	119
3.3	Perle auf rotierendem Ring	120
3.4	zur Definition von Karten	123
3.5	Stereographische Projektion	124
3.6	Phasenraum am Reispiel eines Pendels	137
0.0		101
4.1	Isotherme	152

4.2	Isobare	52
4.3	Isochore	.53
4.4	Standardatmosphäre	.55
4.5	2-dimensionales Beispiel des Geschwindigkeitsraums	.58
4.6	"random walk"der Gasteilchen 1	.61
4.7	Isotherme im van-der-Waals-Gesetz am Beispiel von Kohlendioxid	.63
4.8	Experimentelle BEstimmung der Isotherme	.64
4.9	Freiheitsgrade	.67
4.10	kanonische Zustandsänderungen auf der Fläche im P-V-T-Diagramm	.68
4.11	P-V-T-Phasendiagramm von Wasser	70
4.12	Phasenübergänge von Wasser	71
4.13	Beispiele zu Phasenübergänge der 1. und 2. Ordnung	72
4.14	P-V-Diagramm des Carnot-Prozesses	75
4.15	Phasendiagramm, Gibbs'sche Phasenregel	.87

# Stichworte

Adiabatenexponent, 165 Adiabatengleichung, 169 Avogadro-Konstante, 152 AIR-Funktion, 61 Atlas, 125 Auge, 56 autonome Systeme, 118

Bahn, 99 BESSEL-Funktion, 74 Beugungsordnung, 76 Binnendruck, 162 BOLTZMANN-Konstante, 152 Brachystochrone, 106 Brechungsgesetz, 37 Brechungsindex auserordentlicher, 31 ordentlicher, 31 BREWSTER-Winkel, 46

CARNOT-Prozess, 174 CELVIN, 150

D'ALEMBERT, 15 Datumslinie, 125 diamagnetisch, 11 Dichtefunktion, 103 Dielektrische Funktion, 27 Dielektrizitatskonstante, 11 Diffusionsgleichung, 162 Diffusionskonstante, 162 DIRAC-Delta-Spike, 13 Dispersionsrelation, 16 Dopplereffekt longitudinaler, 93 DRUDE-Modell, 29 DULONG-PETIT-Gesetz, 167

Eichinvarianz, 131 EINSTEIN'sche Summenkonvention, 87 Entropie, 178, 180 Erzeugende, 143 EULER-LAGRANGE-Gleichungen, 107 EULERgleichung, 102 EULERgleichungen, 103 evaneszente Felder, 38 Extinktionskoeffizient, 28

Faltung, 75 Faltungstheorem, 25 FARADAY'sches Induktionsgesetz, 8 Fernrohr, 58 FICK'sches Gesetz, 161 forminvariant, 129 FOURIERtransformation, 22 Freiheitsgrad, 157 Frequenz, 18 FRESNEL'sche Formeln, 46 Funktional, 100 funktional unabhangig, 127

GALILEI-Transformation, 87 GALILEI-Invarianz, 136 Gaskonstante, 152 GAUSS-Funktion, 23 GAY-LUSSAC-Thermometer, 150 Geodäte, 102 Gewichtsfukntion, 64 GIBB'sche Fundermentalform, 182 GIBBS-DUHEM-Beziehung, 184 Gleichgewichtspunkt, 111 Gleichverteilungssatz, 157 Gruppeneigenschaft, 91 Gruppeneigenschaft, 91

HAMILTON'sche Bewegungsgleichung, 117 HAMILTON'sche Funktion, 116 HAMILTON'sches Prinzip, 107 Hauptsätze der Thermodynamik, 149, 173, 174 Hautsätze der Thermodynamik, 180 HELMHOLTZ-Gleichungen, 67 Höhenformel, 154 HUGYNS'sches Prinzip, 26

Ideales-Gas-Gesetz, 152 Impuls,kanonisch, 102 inhomogene Wellen, 38 Instabilität, 113 Interferenzen dünner Schichten, 59 gleicher Neigung, 60 Vielfachinterferenzen, 61 zweier Pukntquellen, 58 Isobare, 152 Isochore, 152 Isotherme, 152, 163 Isotropie, 135

JAKOBIIdentitat, 139

Kamera, 56 Karte, 123 in Polarkoordinaten, 125 KELVIN-Skala, 151 Kohärenz longitudinal, 66 transversal, 66 kojugierte Variablen, 116 Koordinaten, kartesische, 83 Koordinatentransformation, 126, 130 Kovarianz, 129 Kreisfrequenz, 18 Kristall anisotrop, 30 optisch einachsig, 31 kritischer Punkt, 172 Kugelwellen, 17

Längenkontraktion, 92 LAGRANGE-Dichte, 107, 110 LAMBERT-BEER-Gesetz, 28 LARMOR-Formel, 79 LARMOR-Frequenz, 97 LEGENDRE-Matrix, 128 Leitfähigkeit, 11 Linsenformel, 53 Linsenschleiferformel, 53 LIOUVILLE, Satz von, 137 LORENTZ-Modell, 27 LORENTZ-Kraft, 10 LORENZT-Kraft, 96 LORENTZtransformation, 85 Lupe, 58

Magnetisierungsdichte, 10 Mannigfaltigkeit, 128 Materialgleichungen, 10 MAXWELL'sche Geschwindigkeitsverteilung, 159 MAXWELL-Gleichungen, 7 homogen, 7 inhomogen, 8 MAXWELL'sches Verschiebungsgesetz, 9 Metallspiegel, 43 MICHELSON-Interferometer, 58 MICHELSON-MORLEY, 88 MIE-Streuung, 77 Mikroskop, 58 MINKOWSKI-Kraft, 96 MINKOWSKIraum, 83 monochromatische Wellen, 18

NOETHER-Theorem, 133, 141

OHM'scher Leiter, 42 optische Achse, 30

paramagnetisch, 11 Parseval-Beziehung, 26 Pendel, 118 Permeabilitat, 10 Phase, 15, 169 Phasen, 163 Phasengeschwindigkeit, 16, 64 Phasenraum, 136 PLANCK'sche Konstante, 21

POISSON-Klammern, 139 Polarisation, 19 elliptisch, 20 lineare, 20zirkulare, 20 Polarisationsdichte, 10, 11 Polarisierbarkeit, 10 Poynting-Satz, 14 Poynting-Vektor, 13, 34 Raum-Zeit-Koordinaten, 83 **RAYLEIGH-Streuquerschnitt**, 82 Refelxionsgesetz, 37 Reflexionskoeffizient, 39 Reststrahlbande, 42 Schwerpunktsatz, 136Skineffekt, 43 SNELLIUS'sches Brechungsgesetz, 31, 37 spezifische Wärme, 164 Spur, 86 Sreuquerschnitt totaler, 78 Standard-Atmosphäre, 154 Streuquerschnitt, 77 differentieller, 78 Streuung, 77 Temperatur, 157 träge Masse, 96 Transmission, 28 Transmissionskoeffizient, 39 Transversalwellen, 19 Tripelpunkt, 171 VAN-DER-WAALS-Zustandsgleichung, 163 Variationsrechnung, 99 Vektorfeld, 7 Vektorpotential, 8 Verjüngung, 86 Verteilungsfunktion, 157 Vierergeschwindigkeit, 94 Wärmekapazität, 164 Wahrscheinlichkeitsdichte, 157 Wellengleichung, 14 Wellenlänge, 18 Wellenvektor, 16 Wellenzug, 62 Zeitdilatation, 92 Zustandsdiagramm, 152 Zustandsgleichung, 163 Zwangsbedingung holonom, 119 rheonom, 120 skleronom, 120 zyklische Variable, 102