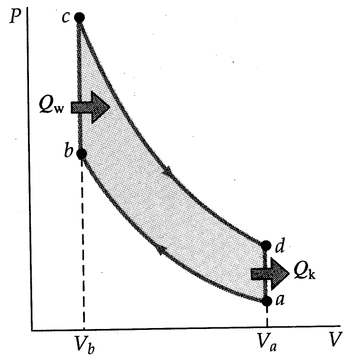
Klausur zum Integrierten Kurs III
Wintersemester 2004/2005

Bitte beachten Sie, dass sowohl Teil A (Experimentalphysik) als auch Teil B (Theoretische Physik) jeweils getrennt zu bestehen sind.
Jede Aufgabe soll auf getrennten Blättern bearbeitet werden. Schreiben Sie auf alle abgegebenen Blätter Ihren Namen und Ihre Nummer! Schreiben Sie auf das grüne Deckblatt Ihren Namen, Ihre Nummer und Ihre Matrikelnummer!

Teil A: Experimentalphysik

1. **Benzinmotor; (14 Punkte)**

Die Vorgänge in einem Benzinmotor (Ottomotor) können angenähert durch den Kreisprozess in der Abbildung wiedergegeben werden. Das Benzin/Luft-Gemisch tritt bei a ein und wird



adiabatisch komprimiert bis b. Nach der Zündung heizt sich das Gas durch die explosionsartige Verbrennung auf und bei konstantem Volumen V_b erhöht sich sein Druck von b auf c. Dabei wird die Wärme Q_w zugeführt. Beim Arbeitstakt von c nach d wird adiabatisch expandiert. Während der Abkühlung bei konstantem Volumen (von d nach a) wird die Wärme $|Q_k|$ abgegeben. Dies entspricht dem Auspufftakt und dem Ansaugen des neuen Gemisches.

a) Berechnen Sie die aufgenommene und die abgegebene Wärmemenge Q_w und Q_k und zeigen Sie, dass der Wirkungsgrad der Gleichung

$$\eta = 1 - \frac{T_d - T_a}{T_c - T_b}$$

folgt, wobei T_a, T_b, T_c, T_d die Temperaturen der Zustände a, b, c, d sind. (5 Punkte)

b) Bei der adiabatischen Expansion oder Kompression eines idealen Gases ist $TV^{\gamma-1} =$ konstant ($\gamma =$ Adiabatenkoeffizient). Zeigen Sie, dass damit

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{\gamma-1}$$

folgt. (4 Punkte)

c) Der Quotient V_a/V_b heißt Verdichtungsverhältnis. Berechnen Sie mit $\gamma = 1.4$ den Wirkungsgrad dieses Kreisprozesses für ein bei Benzinmotoren typisches Verdichtungsverhältnis von 8. (3 Punkte)

d) Erklären Sie, warum der tatsächliche Wirkungsgrad eines Ottomotors viel geringer als der in c) berechnete ist. (2 Punkte)

2. **Auflösungsvermögen und Blazewinkel eines optischen Gitters; (14 Punkte)**
Zeigen Sie, dass das Auflösungsvermögen eines optischen Strichgitters $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$ ist, wobei $\lambda =$ opt. Wellenlänge, $\Delta\lambda =$ gerade noch auflösbarer Wellenlängenunterschied, m= Ordnung der Beugung, N= Gesamtzahl der beleuchteten Striche des Gitters, a= Abstand der parallelen Striche. Lösungsweg: Bestimmen Sie zunächst die Winkelbreite der in eine Ordnung gebeugten Intensität, d.h. den Winkelabstand zwischen dem Intensitätsmaximum und dem daneben liegenden Minimum. Setzen Sie diesen dem Winkelabstand der Intensitätsmaxima für um $\Delta\lambda$ verschiedene Wellenlängen in m-ter Ordnung gleich.

a) Zeigen Sie, dass für die Phasendifferenz Φ von zwei an benachbarten Linien reflektierten Strahlen gilt

$$\Phi = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin\theta_i$$

mit $\theta_i =$ Einfallswinkel bezüglich der Gitternormalen. (2 Punkte)

b) Bilden Sie $d\Phi/d\theta_i$, die Phasenänderung pro Winkeländerung im Falle a). (2 Punkte)

c) Bei N Strichen (Vielstrahl-Interferenz) entspricht die Winkeländerung $d\theta_i$ zwischen einem Intersitätsmaximum und dem danebenliegenden Minimum einem Wert $d\Phi = \frac{2\pi}{N}$. Machen Sie dies durch eine Skizze plausibel. Zeigen Sie dann

$$d\theta_i = \frac{\lambda}{Na\cos\theta_i}$$

(4 Punkte)

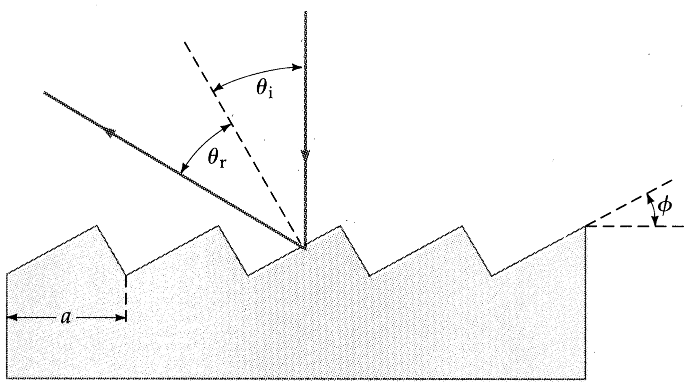
d) Zeigen Sie, dass die Bedingung für Beugung in die m-te Ordnung des Gitters $a\sin\theta_i = m\lambda$ ist. Bilden Sie $d\theta_i/d\lambda$ und zeigen Sie, dass

$$d\theta_i/d\lambda = \frac{m}{a\cos\theta_i}$$

.

Durch Vergleich von c) und d) folgt das Auflösungsverhältnis. (3 Punkte)

e) Die Abbildung zeigt ein Stufengitter (Fabrikdachstruktur), welches dazu dient, die Intensität des in eine bestimmte Ordnung m gebeugten Lichtes durch geschickte Wahl des Winkels ϕ zu maximieren (ϕ: Blaze-Winkel): Der reflektierte Strahl soll mit dem gebeugten Strahl übereinstimmen. Benutzen Sie zur Berechnung des Beugungswinkels Teil d). Berechnen Sie den Blazewinkel als Funktion von a, λ und m und geben Sie seinen Wert für $m = 2$, $\lambda = 450nm$ und ein Gitter mit 10 000 Strichen/cm an.(3 Punkte)



Teil B: Theoretische Physik

3. **Der zweidimensionale entartete harmonische Oszillator; (14 Punkte)**

Der zweidimensionale entartete harmonische Oszillator ist gegeben durch die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{k}{2} \left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

wobei m und k (positive) Konstanten sind.
Aufgabenteile a), b), c) und e) können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

a) Welche Erhaltungsgröße folgt daraus, dass dieses L ein autonomes Problem beschreibt, und wie ergibt sie sich aus L? (2 Punkte)

b) Die Lagrangefunktion ist invariant unter Koordinatendrehungen. Welche Erhaltungsgröße folgt hieraus? Geben Sie sie in kartesischen und in polaren Koordinaten an und weisen Sie für beide Ausdrücke jeweils einzeln die Zeitunabhängigkeit nach. (5 Punkte)
Hinweis: Von vier Methoden, die Sie kennengelernt haben, verwendet eine aufwändige das Noether Theorem, wo die Erhaltungsgröße lautet

$$J(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0}$$

wenn gilt $\tilde{L}(\mathbf{x}', \dot{\mathbf{x}}', \alpha) = L(\mathbf{x}', \dot{\mathbf{x}}') + \frac{d}{dt} F(\mathbf{x}', t, \alpha)$.

c) Die zugehörige Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{m}{2}\omega^2 (x_1^2 + x_2^2)$$

Wie sind die Größen p_i und ω in H verknüpft mit denen in L? (1 Punkt)

d) Zeigen Sie, dass die beiden Größen

$$A_1 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x_1^2$$

$$B = \frac{p_1 p_2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x_1 x_2$$

Konstanten der Bewegung sind. (2 Punkte)
Hinweis: Die Poissonklammer zweier Funktionen im Phasenraum lautet

$$\{X, Y\} = \sum_i \frac{\partial X}{\partial x_i}\frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i}\frac{\partial Y}{\partial x_i}$$

e) Bestimmen Sie die Bahnen explizit für die Anfangsbedingungen

i.

$$\begin{array}{ccc} x_1(t=0) = r_0 & , & x_2(t=0) = 0 \\ \dot{x}_1(t=0) = 0 & \text{und} & \dot{x}_2(t=0) = 0 \end{array}$$

ii.

$$\begin{array}{ccc} x_1(t=0) = r_0 & , & x_2(t=0) = 0 \\ \dot{x}_1(t=0) = 0 & \text{und} & \dot{x}_2(t=0) = r_0\omega \end{array}$$

und beschreiben Sie in Worten die Kurvenform. (4 Punkte)

4. **Dispersion von Wasser; (14 Punkte)**
Die Dispersion der dielektrischen Konstante $\varepsilon(\omega)$ in Wasser wird für niedere Frequenzen durch die thermischen Fluktuationen der molekularen Dipolmomente bestimmt. Die Materialgleichungen für Wasser lauten dann

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_0\,\varepsilon_\infty\,\mathbf{E} + \mathbf{P} \end{aligned}$$

und

$$\tau\,\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{P} = \varepsilon_0\,\alpha\,\mathbf{E}$$

wobei τ und α positive Konstanten sind. Daneben gelten die Maxwellgleichungen ohne externe Quellen:

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \nabla\times\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = 0, \qquad \nabla\times\mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}}$$

Aufgabenteile b), c) und d) können mit den angegebenen Zwischenergebnissen unabhängig voneinander bearbeitet werden.

a) Die gekoppelten Differentialgleichungen sollen mit Hilfe ebener monochromatischer Wellen der Form ($\mathbf{A}_0$ ein konstanter Vektor)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0\,e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}, \quad \mathbf{A} \in \{\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{P}\}$$

zu algebraischen Gleichungen vereinfacht werden. (2 Punkte)

b) Die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon(\omega)$ kann aus $\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0\varepsilon(\omega)\mathbf{E}_0$ bestimmt werden. Geben Sie diese als Funktion von ω an (getrennt in Real- und Imaginärteil). Stellen Sie diese Funktionen graphisch dar und diskutieren Sie sie. (4 Punkte)
Hinweis: Das Ergebnis lautet

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\alpha}{1 + i\omega\tau}$$

c) Nur transversale Felder, d.h. der Polarisationsvektor $\mathbf{E}_0$ steht senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung, sollen betrachtet werden. Zeigen Sie, dass ihre Dispersionsrelation $k(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ lautet. (2 Punkte)
Hinweis: Es gilt $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{AC})\mathbf{B} - (\mathbf{AB})\mathbf{C}$.

d) Eine transversale ebene monochromatische Welle fällt senkrecht auf eine ebene Wasseroberfläche und wird teilweise reflektiert und transmittiert; behandeln Sie Luft als Vakuum. Für die zeitlich gemittelte Energiestromdichte einer monochromatischen Welle in Vakuum gilt $< S >= \frac{\varepsilon_0 c}{2}|\mathbf{E}_0|^2$. Bestimmen Sie damit den Reflexionskoeffizienten $r =< S_{\text{ref.}} > / < S_{\text{einf.}} >$.

   i. Wie lauten die Ansätze für die elektromagnetischen Felder in der Luft und im Wasser? (3 Punkte)

   ii. Verknüpfen Sie Ihre Ansätze mit den beiden Bedingungen, dass die tangentialen Komponenten $\mathbf{E}_{tangential}$ und $\mathbf{B}_{tangential}$ an der Grenzfläche stetig sind. (1 Punkt)

   iii. Bestimmen Sie $r(\omega)$ und diskutieren Sie das Ergebnis für die beiden Grenzfälle $\omega\tau \gg 1$ und $\omega\tau \ll 1$. Als Zahlenwerte können Sie $\alpha \approx 80$ und $\varepsilon_\infty \approx 1,8$ verwenden. (2 Punkte)