

Vorlesungsskript
Integrierter Kurs III - spezielle Relativitätstheorie

Marcel Indlekofer, Thomas Lauermann, Vincent Peikert und Raphael Straub

11. Januar 2005

Inhaltsverzeichnis

2	Spezielle Relativitätstheorie	5
2.1	Einschub: Konzepte & Definitionen	5
2.1.1	(kartesische) Koordinaten	5
2.1.2	MINKOWSKI-Raum, MINKOWSKI-Metrik und EINSTEINSche Inertialsysteme	5
2.1.3	Definition der LORENTZ-Transformationen als ausgezeichnete Koordinatentransformationen	7
2.1.4	(2.1.4) Tensoren	7
2.2	Newton'sche Mechanik	9
2.2.1	GALILEI-Invarianz	9
2.2.2	Widerspruch der GALILEI-Invarianz zur Wellengleichung und zu den Maxwell-Gleichungen	10
2.3	Relativitätsprinzip & LORENTZtransformation	11
2.3.1	EINSTEIN'sches Relativitätsprinzip	11
2.3.2	Konstanz von c	11
2.3.3	Die spezielle LORENTZ-Transformation	12
2.3.4	Elementare Folgerungen	14
2.3.4.1	Addition von Geschwindigkeiten	14
2.3.4.2	Raum-Zeit-Diagramme	15
2.3.5	Weltlinien	16
2.4	Lorenz-invariante Formulierung physikal. Gesetze: 1-tes Bsp. Dopplereffekt	17
2.5	Relativistische oder EINSTEINSche Mechanik	20
2.5.1	Vierergeschwindigkeit u^μ	21
2.5.2	Viererimpuls p^μ	21
2.5.3	EINSTEIN'sche Bewegungsgleichung	22
2.6	EINSTEINSche Bewegungsgleichungen	23
2.6.1	(A) MINKOWSKI-Kraft	23
2.6.2	(B) LORENTZ-Kraft	23

Kapitel 2

Spezielle Relativitätstheorie

2.1 Einschub: Konzepte & Definitionen

2.1.1 (kartesische) Koordinaten

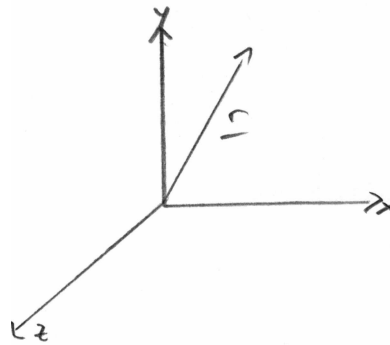


Abbildung 2.1: Raumkoordinaten

Jeder Punkt im Raum besitzt Raumkoordinaten (vgl. Abbildung 2.1):

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Jeder Punkt in Raum und Zeit besitzt **Raum-Zeit-Koordinaten**:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

2.1.2 Minkowski-Raum, Minkowski-Metrik und Einsteinsche Inertialsysteme

Alle Punkte (Ereignisse) in der Raum-Zeit \underline{x} mit $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \underline{r} \end{pmatrix}$, $x^i \in \mathbb{R}$ konstituieren einen MINKOWSKI-Raum M , wenn eine Metrik gegeben ist, so dass das Längenelement einer beliebigen Kurve lautet:

$$dl^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.2)$$

$g_{\mu\nu}$ heißt MINKOWSKI-Tensor oder MINKOWSKI-Metrik. Ein MINKOWSKI-Raum mit einem Koordinatensystem, so dass

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

lautet, heißt Inertialsystem. Denn dann gilt:

$$dl^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (2.4)$$

Bemerkung: Vergleichen wir M mit dem euklidischen Raum \mathbb{R}^3 , in dem gilt:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad \text{mit} \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

für ein kartesisches Koordinatensystem. Krummlinige Koordinaten siehe später. $g_{\mu\nu}$ definiert ein Skalarprodukt:

$$\langle a, b \rangle = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a_\nu b^\nu \quad (2.6)$$

zweier kontravarianter Vektoren a^μ und b^μ mit dem Kovektor

$$a_\nu = g_{\mu\nu} a^\mu = \sum_{\mu=0}^3 g_{\mu\nu} a^\mu = (a^0, -\underline{a}) \quad (2.7)$$

Die Inverse zu $g_{\mu\nu}$ ist $g^{\mu\nu}$, also

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\kappa} = \delta_{\mu}^{\kappa} \quad (2.8)$$

mit dem Kroneckerdelta, und lautet in Inertialkoordinaten:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

2.1.3 Definition der Lorentz-Transformationen als ausgezeichnete Koordiantentransformationen

Eine homogene Koordinatentransformation $x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ heißt ausgezeichnet, wenn sie Inertialsysteme in Inertialsysteme überführt, d.h. wenn gilt:

$$g'_{\mu\nu} = L^{\kappa}_{\mu} L^{\lambda}_{\nu} g_{\kappa\lambda} = g_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

In Matrixschreibweise sieht das so aus:

$$g = L g L^T \quad (2.11)$$

Dazu muss gelten:

$$\delta^{\sigma}_{\nu} = g^{\sigma\mu} L_{\mu\lambda} L^{\lambda}_{\nu} = L^{\sigma}_{\lambda} L^{\lambda}_{\nu} \quad (2.12)$$

Also lautet $L^{-1} = L^T$ und daraus folgt $\det L = \pm 1$. Eine andere Schreibweise ist:

$$L^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \quad (2.13)$$

und so kommen wir auf

$$\delta^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \cdot \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\nu}} = L^{\mu}_{\kappa} L^{\kappa}_{\nu} \quad (2.14)$$

Die Transformationsregel $g = L g L^T$ folgt aus der Betrachtung des Längenelementes:

$$dl^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu} (L^{-1})^{\mu}_{\sigma} (L^{-1})^{\nu}_{\tau} dx'^{\sigma} dx'^{\tau} = g'_{\sigma\tau} dx'^{\sigma} dx'^{\tau} \quad (2.15)$$

Bemerkung: Die ausgezeichneten Koordinatentransformationen heißen LORENTZtransformationen im MINKOWSKIRAUM. Im euklidischen Raum heißen sie Orthogonaltransformationen und sind durch eine Rotationsmatrix gegeben.

2.1.4 (2.1.4) Tensoren

Tensoren sind Verallgemeinerung von Vektoren (Vektorfeldern, ...)

Bsp.: Rotation (Abb.2.2): KS \rightarrow KS'

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q'_x \\ q'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$$

Ein Vektor erfüllt also bei einer KT

$$x'^i = R^i_j x^j$$

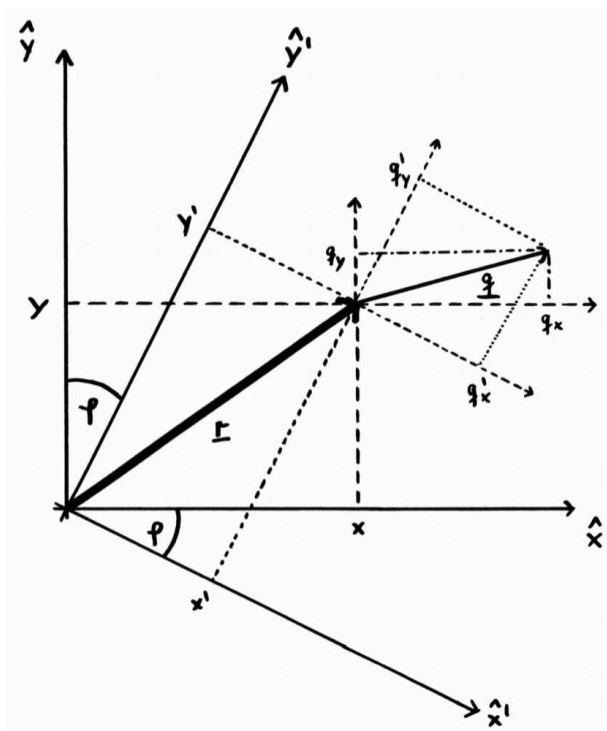


Abbildung 2.2: Koordinatentransformation

mit Rotationsmatrix R die Transformationseigenschaft

$$q^i(\underline{x}') = R^i_j q^j(\underline{x})$$

Verallgemeinert mit der Matrix D^μ_ν der KT ($D \hat{=} R$ für euklidischen \mathbb{R}^3 ; $D \hat{=} \text{LORENTZ-Transformation}$ für MINKOWSKI-Raum) nennt man das d^N -Tupel ($d = 3$ in \mathbb{R}^3 ; $d = 4$ in M) von Zahlen $t^{\mu(1)\mu(2)\dots\mu(N)}(\underline{x})$ ($\mu_i = 0,1,2,3$ in M) kontravarianten Tensor N -ter Stufe, wenn er unter der KT transformiert gemäß

$$t^{\mu(1)\dots\mu(N)}(\underline{x}') = d(D) D^{\mu(1)}_{\nu(1)} \dots D^{\mu(N)}_{\nu(N)} t^{\nu(1)\dots\nu(N)}(\underline{x})$$

genauer für

$$d(D) = \begin{cases} 1 & \text{Tensor} \\ \text{Det}(D) = \pm 1 & \text{Pseudotensor} \\ \frac{L^0_0}{|L^0_0|} = \pm 1 & \text{zeitartigen Pseudotensor} \end{cases}$$

Bsp.:

- Im \mathbb{R}^3 :
 - sind Ladungsdichten $\rho(\underline{r}, t)$ ein Skalar (-feld) (Tensor 0-ter Stufe, der von \underline{r}, t abhängt), $\underline{j}(\underline{r}, t)$, $\underline{E}(\underline{r}, t)$ und $\nabla = \frac{\partial}{\partial \underline{x}}$ Vektoren (Tensor 1-ter Stufe), \underline{B} ein Pseudovektor (d.h. unter Spiegelung $x^i = -x^i$ wird $\underline{j}'(\underline{r}', t) = -\underline{j}(-\underline{r}, t)$ und $\nabla' = \frac{\partial}{\partial \underline{x}'} = -\frac{\partial}{\partial \underline{x}} = -\nabla$ deswegen muss $\underline{B}'(\underline{r}', t) = \underline{B}(-\underline{r}, t)$ damit $\underline{j}'(-\underline{r}', t) = \nabla' \times \underline{B}'(-\underline{r}', t) = -\nabla \times \underline{B}(\underline{r}, t) = -\underline{j}(\underline{r}, t)$ gilt)
 - ist das KRONECKER-Delta δ_{ij} ein Tensor 2-ter Stufe

– ist der LEVI-CIVITA-Tensor

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } ijk = xyz, zxy, yzx \\ -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji} & \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Pseudotensor 3-ter Stufe.

Mit ihm lautet das Vektorprodukt $\underline{a} = \underline{b} \times \underline{c} \Rightarrow a_i = \epsilon_{ijk} b_j c_k$

– ist ein antisymmetrischer Tensor 2-ter Stufe $M_{ij} = -M_{ji}$ eindeutig verknüpft mit einem Pseudovektor \underline{m} :

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & m^3 & -m^2 \\ -m^3 & 0 & m^1 \\ m^2 & -m^1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M_{ij} x_j = (\underline{m} \times \underline{x})_i$$

• Im M:

– ist $g^{\mu\nu}$ ein Tensor 2-ter Stufe

– ist $t_\mu^\nu = g_{\mu\nu} t^{\mu\nu}$ ein gemischter kontra & kovarianter Tensor 2-ter Stufe und wird transformiert wie $t_\mu^\nu = g'_{\mu\nu} t'^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} L_\sigma^\mu L_\tau^\nu t^{\sigma\tau} = L_\mu^\sigma L_\tau^\nu t_\sigma^\tau = (L^{-1})_\mu^\sigma L_\tau^\nu t_\sigma^\tau$

Bsp.:

Die Verjüngung eines Tensors 2-ter Stufe heißt Spur:

• in M: $g_{\mu\nu} t^{\mu\nu} = t^\nu_\nu = t^\nu_\nu = t^{00} - t^{11} - t^{22} - t^{33}$

• in \mathbb{R}^3 : $t^{ii} = t^{11} + t^{22} + t^{33}$ (Summe der Diagonalelemente)

(Bsp.: $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = g_\mu^\mu = -2$; $\delta_\mu^\mu = 4$)

2.2 Newton'sche Mechanik

2.2.1 Galilei-Invarianz

Newton: "Mechanische Vorgänge laufen in allen Inertialsystemen gleich ab."

Galilei: "Zwei Inertialsysteme sind durch eine GALILEI-Transformation miteinander verknüpft."

$$x^i = \sum_{j=1}^3 R_j^i x'^j + r_0^i + v^i t \quad (2.16)$$

R_j^i ist eine Drehmatrix.

Bemerkung: Die Indizes für Koordinaten x^i stehen oben und werden mit den Indizes unten an R_j^i summiert. **Abkürzung:** Im folgenden verwenden wir häufig die **Einstein'sche Summenkonvention:**

$$\sum_{j=1}^{3,4} R_j^i x'^j = R_j^i x'^j \quad (2.17)$$

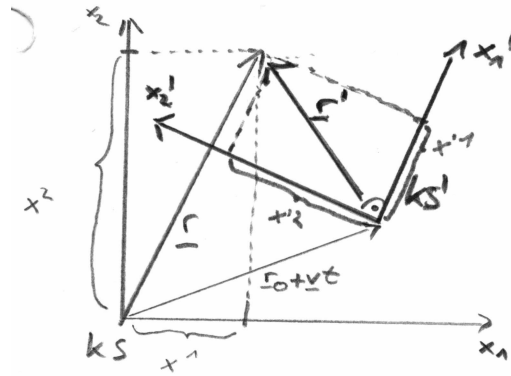


Abbildung 2.3: GALILEI-Transformation

doppelt auftauchende Indizes werden absummiert.

spezielle Galilei-Transformation:

$$\begin{aligned} x^i &= x'^i + v^i t \\ t &= t' \end{aligned} \quad (2.18)$$

Die spezielle GALILEI-Transformation (Abbildung 2.4) ist eine Transformation auf ein

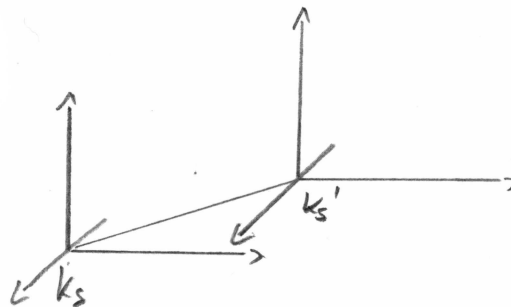


Abbildung 2.4: spezielle GALILEI-Transformation

gleichförmig, geradlinig bewegtes Bezugssystem.

2.2.2 Widerspruch der Galilei-Invarianz zur Wellengleichung und zu den Maxwell-Gleichungen

- A) Wellengleichung:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \underline{E}(\underline{r}, t) = 0$$

Die Wellengleichung ist eine Folge der Maxwell-Gleichungen im Vakuum mit der speziellen Lösung:

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 \cos(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r})$$

für $\omega = ck$. Die GALILEI-Transformation auf ein mitbewegtes Inertialsystem (mit $v = \frac{c}{k}$) ergibt eine stehende Welle:

$$\underline{E}(\underline{r}', t) = \underline{E}_0 \cos\left(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r}' - \frac{k^2}{k} ct\right) = \underline{E}_0 \cos(\underline{k} \cdot \underline{r}')$$

welche keine Lösung der Wellengleichung ist.

Daraus "folgern" wir, dass sowohl die Wellengleichung als auch die Elektrodynamik nach Maxwell nicht GALILEI-invariant sind. Dies ist der Ausgangspunkt der speziellen Relativitätstheorie.

- **B) Versuch von Michelson-Morley**

Man verwende ein MICHELSON-Interferometer und benutzt eine Rotation des

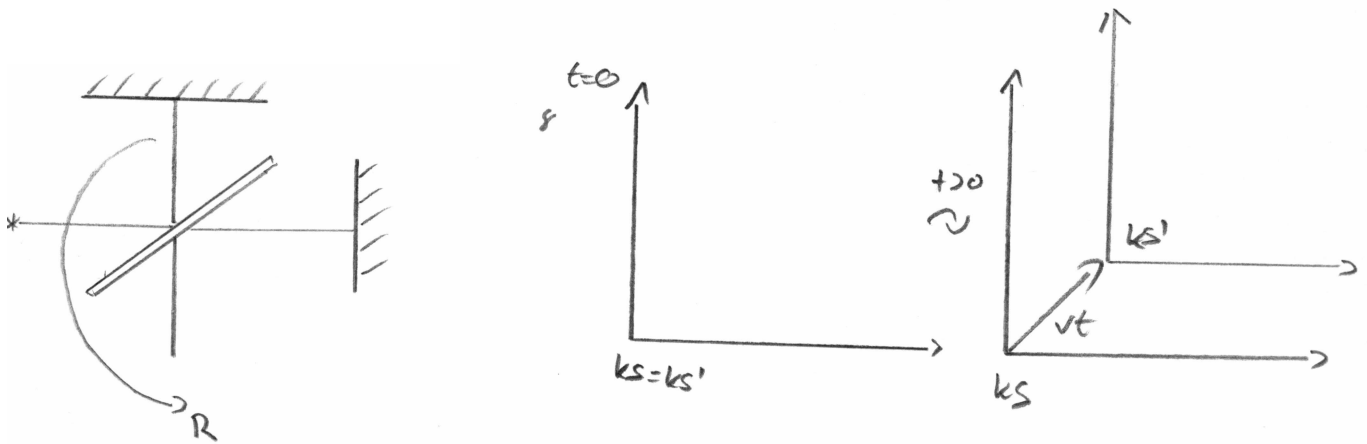


Abbildung 2.5: MICHELSON-Interferometer

Spektrometers, um Unterschiede in der Lichtgeschwindigkeit entlang der Wege 1 und 2 zu messen, welche auf Grund der Bewegung der Erde zustande kommen.

Erwarten würde man, dass die Interferenzmaxima $N \approx \frac{L_1+L_2}{\lambda} \left(\frac{v}{c}\right)^2$ mit der Erdgeschwindigkeit v auf Grund des großen Vorfaktors $\frac{L_1+L_2}{\lambda}$ messbar sind. Durch den Vorfaktor sind selbst feinste Unterschiede messbar. Im Versuch wird aber kein Unterschied beobachtet, somit existiert keine GALILEI-Transformation auf das Erdsystem. Diese Beobachtung ist durch die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit c im bewegten Koordinatensystem erklärbar.

2.3 Relativitätsprinzip & Lorentztransformation

2.3.1 Einstein'sches Relativitätsprinzip

Die gesamten physikalischen Vorgänge laufen in allen Inertialsystemen gleich ab und zwei Inertialsysteme sind durch eine **Lorentztransformation** verknüpft.

2.3.2 Konstanz von c

Die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum ist unabhängig vom Inertialsystem und ändert sich also nicht bei LORENTZ-Transformation.

2.3.3 Die spezielle Lorentz-Transformation

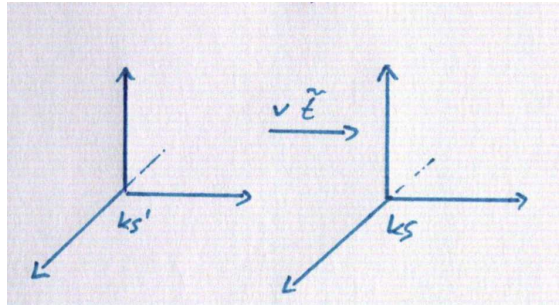


Abbildung 2.6: spezielle LORENTZ-Transformation

Die Wellenfront einer Kugel-Lichtwelle, die vom Ursprung in zwei Inertialsysteme ausgeht, muss gleich sein. (vgl. Abb 2.6):

$$r^2 - c^2t^2 = r^2 - (x^0)^2 = r'^2 - c^2t'^2 = r'^2 - (x'^0)^2 \quad (2.19)$$

Zur Vereinfachung wählt man:

$$x'^1 = x^1 \quad \text{und} \quad x'^2 = x^2$$

Licht, die Wellenfront einer elektromagnetischen Kugelwelle, breitet sich aus in einer Welle, die zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ am Ort $r = r' = 0$ war. Das zweite Koordinatensystem KS' bewege sich mit $\underline{v} = v \hat{z}$. Die Position der Wellenfront, der sogenannte Lichtkegel lässt sich mit folgender Formel beschreiben:

$$r^2 - c^2t^2 = (r')^2 - (ct')^2 \quad (2.20)$$

Zur Vereinfachung nehmen wir Bewegung in z -Richtung an: $x' = x$ und $y' = y$

$$z^2 - c^2t^2 = (z')^2 - (ct')^2 \quad \boxed{*} \quad (2.21)$$

Wenn wir nun die Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen als konstant postulieren, wie lautet dann die zugehörige Koordiantentransformation(KT)? Wir postulieren weiterhin:

- KT sei linear: $\lambda_1 \begin{pmatrix} ct_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} ct_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} ct'_1 \\ z'_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} ct'_2 \\ z'_2 \end{pmatrix}$
- KT sei homogen: $t = z = 0$ wird auf $t' = z' = 0$ abgebildet.

Damit können wir KT als Matrix Λ schreiben, die Matrix der Lorentztransformation genannt wird und gegeben ist durch:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \cdot x^\nu \quad (2.22)$$

als die Transformation von KS nach KS' mit der Relativgeschwindigkeit v .

$$\begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ f & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

also ist zum Beispiel $\Lambda_0^0 = a$ oder $\Lambda_3^0 = b$. Dann lautet die Rücktransformation von KS' nach KS:

$$\begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bf} \begin{pmatrix} d & -b \\ -f & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

und beschreibt die Transformation mit der umgekehrten Relativgeschwindigkeit $v' = -v$:

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu(-v) \cdot x'^\nu \quad (2.25)$$

Vergleich von $\Lambda(v)$ und $\Lambda(-v)$ und die Isotropieforderung ergibt:

$$\det \Lambda = ad - bf = \pm 1 \quad \text{sowie} \quad a = \pm d \quad (2.26)$$

Sei nun $b = v\bar{b}$ und $f = v\bar{f}$, ergibt sich in Gleichung $\boxed{*}$ eingesetzt:

$$z^2 - c^2t^2 = (v\bar{f}ct + az)^2 - (act + v\bar{b}z)^2 = (a^2 - v^2\bar{b}^2)z^2 - (a^2 - v^2\bar{f}^2) + 2avc(\bar{f} - \bar{b})zt \quad (2.27)$$

Daraus folgt $b = f$ und somit fällt der gemischte Term weg.

$$\Rightarrow a^2 - v^2\bar{b}^2 = 1 \quad (2.28)$$

Damit können wir nun einen Winkel φ einführen, so dass $a = d = \cosh \varphi$ und $b = f = \sinh \varphi$ mit $\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$ gilt.

$$\Rightarrow \Lambda^\mu_\nu(v) = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} = \cosh \varphi \begin{pmatrix} 1 & \tanh \varphi \\ \tanh \varphi & 1 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Ein Winkel φ parametrisiert die LORENTZtransformation. Mit $\beta = \tanh \varphi$ und $\gamma = \cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ erhalten wir:

$$\Lambda^\mu_\nu(v) = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

wobei $|\beta| < 1$ gelten muss.

Aus dem Vergleich mit den GALILEI-Transformationen für $v \rightarrow 0$ folgt: $b \rightarrow v\bar{b}(0)$ und damit ist $\bar{b}(0) = \frac{1}{c}$. Aus der Hintereinanderschaltung mehrerer LORENTZtransformationen kann man zeigen, dass gilt:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (2.31)$$

Damit ist $\varphi = \operatorname{artanh} \frac{v}{c}$ und wir haben die speziellen LORENTZtransformationen:

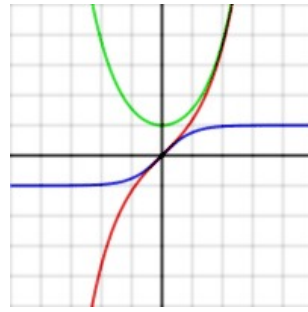


Abbildung 2.7: Plot der hyperbolischen Winkelfunktionen

$$t' = \frac{t + \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.32)$$

(2.33)

sowie

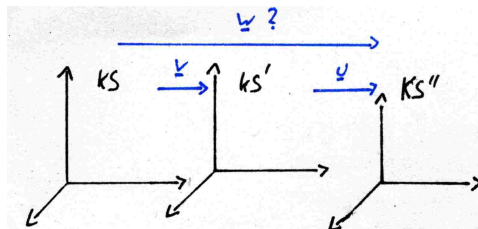
$$z' = \frac{z + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.34)$$

welche bei $v \ll c$ in die GALILEI-Transformationen $t' = t$ und $z' = z + vt$ übergehen.

2.3.4 Elementare Folgerungen

2.3.4.1 Addition von Geschwindigkeiten

Begründung: β ist linear in v , weil damit Hintereinanderschaltung zweier LT zu den Geschwindigkeiten u und v wieder eine spezielle LT mit der Geschwindigkeit w ergibt. Dies ist die Gruppeneigenschaft der LORENTZtransformationen:

Abbildung 2.8: Wie groß ist w ?

$$\Lambda_{\nu}^{\mu}(u) \cdot \Lambda_{\kappa}^{\nu}(v) = \Lambda_{\kappa}^{\mu}(w) \quad (2.35)$$

Für spezielle LORENTZtransformationen gilt also:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ \frac{u}{c} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1+\frac{uv}{c^2}}{\sqrt{(1-\frac{u^2}{c^2})(1-\frac{v^2}{c^2})}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{\frac{v+u}{c(1+\frac{uv}{c^2})}}{1+\frac{uv}{c^2}} \\ \frac{\frac{v+u}{c(1+\frac{uv}{c^2})}}{1+\frac{uv}{c^2}} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

weil gilt:

$$\left(\left(1 + \frac{uv}{c^2} \right) - \frac{u^2 + 2uv + v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v+u}{1+\frac{uv}{c^2}} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.37)$$

Nun ist

$$\Lambda(w) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{w}{c} \\ \frac{w}{c} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

mit der Geschwindigkeit

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \quad (2.39)$$

Die Transformationen $KS \rightarrow KS' \rightarrow KS''$ sind äquivalent zu einer Transformation $KS \rightarrow KS''$ mit der nach EINSTEIN additiven Geschwindigkeit w . Nur für $\frac{uv}{c^2} \ll 1$ gilt $w = u + v$ nach GALILEI. Wäre $\beta = v\bar{\beta}(v^2) \neq \frac{v}{c}$ gewesen, hätten wir nicht zeigen können, dass wir $KS \rightarrow KS''$ transformieren können, ohne KS' zu kennen.

Bemerkung: für $u = v$ haben wir $w = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = c \cdot \frac{2\beta}{1-\beta^2}$, was in folgendem Plot veranschaulicht wird. Also ist immer $w < c$ für alle $v < c$, c ist die Grenzggeschwindigkeit.

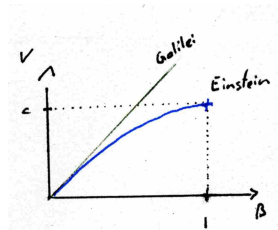


Abbildung 2.9: w-Diagramm

2.3.4.2 Raum-Zeit-Diagramme

Zwei Punkte, sogenannte Ereignisse, $\underline{x}_{(1)}$ und $\underline{x}_{(2)}$ haben den Abstand:

$$x^\mu = x_{(1)}^\mu - x_{(2)}^\mu \quad (2.40)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $x^1 = 0 = x^2$ fest, also $\Delta x = \Delta y = 0$. So ist

$$\langle x, x \rangle = (x^0)^2 - (x^3)^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta z'^2 = \langle x', x' \rangle \quad (2.41)$$

mit $\Delta t' = \gamma(\Delta t + \frac{\beta}{c} \Delta z)$ und $\Delta z = \gamma(\Delta z + \beta c \Delta t)$. Wir können also die x^μ nach ihren Skalarprodukten charakterisieren. Wir unterscheiden 3 Fälle:

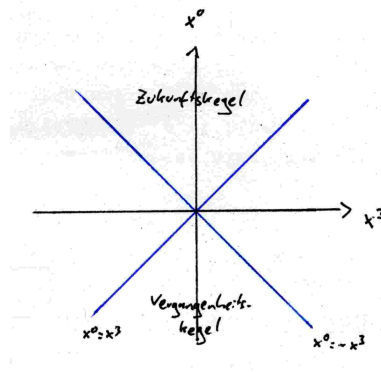


Abbildung 2.10: Lichtkegel

- 1. Fall: $\langle x, x \rangle > 0$, dann heißt \underline{x} zeitartig, liegt in dem Kegel und es gibt ein Inertialsystem, in dem beide Ereignisse am selben Ort stattfinden: $\Delta z = 0$ mit einer Zeitdifferenz Δt . In allen anderen Inertialsystemen gilt:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t > \Delta t \quad (2.42)$$

Dieses nennt man Zeitdilatation.

- 2. Fall: $\langle x, x \rangle = 0$, der Vektor liegt direkt auf dem Lichtkegel.
- 3. Fall: $\langle x, x \rangle < 0$, dann heißt \underline{x} raumartig. Der Bereich, in dem diese Ereignisse liegen, heißt Gleichzeitigkeitskegel. Es gibt kein Inertialsystem, in dem man mit einem Lichtsignal diese beiden Punkte verbinden könnte, da das Licht nicht schnell genug ist, um von $\underline{x}_{(1)}$ nach $\underline{x}_{(2)}$ zu kommen. Eine Länge $l = \Delta z|_{\Delta t=0}$ ist im bewegten Inertialsystem kürzer:

$$l' = \Delta z'|_{\Delta t'=0} = \gamma \left[\Delta z + \beta \left(\frac{c \Delta t'}{\gamma} - \beta \Delta z \right) \right]_{\Delta t'=0} = \sqrt{1 - \beta^2} \Delta z = \frac{l}{\gamma} < l \quad (2.43)$$

Dieses Verhalten wird Längenkontraktion genannt.

2.3.5 Weltlinien

Eine Kurve $\underline{x}(s)$ in der Raumzeit mit s als beliebigem Kurvenparameter (zum Beispiel der Zeit) heißt Weltlinie, wenn der infinitesimale Abstand

$$dl^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 > 0 \quad (2.44)$$

ist, die Tangente also zeitartig ist und das Teilchen somit nie mit Überlichtgeschwindigkeit fliegt. Wenn das Teilchen eine eigene Uhr hat, so misst diese nach folgender Gleichung

$$dl^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \dot{\underline{r}}^2 \right) = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = c^2 d\tau^2 \quad (2.45)$$

die Zeit

$$d\tau = \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.46)$$

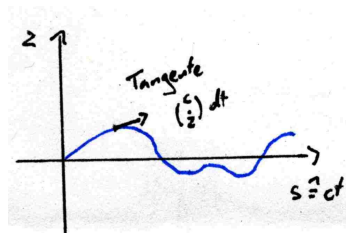


Abbildung 2.11: Beispiel einer Weltlinie

τ ist seine Eigenzeit, die somit langsamer läuft. Das $d\tau$ entspricht einem Zeitelement, das eine auf der Kurve bewegte Uhr messen würde. Diese Formel spiegelt die Zeitdilatation wider.

Wiederholung:

Im Inertialsystem lautet die Metrik

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

so dass das Längenelement:

$$dl^2 = c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\underline{v} = \frac{dr}{dt}$$

$$\langle t, t \rangle > 0 \quad dl^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad d\tau = \frac{1}{c} dl = dt \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \quad \text{Eigenzeit (Uhr des MP)}$$

die ausgezeichnete Koordinatentransformation erfüllt:

$$g_{\mu\nu} = L_\mu^\sigma L_\nu^\tau g_{\sigma\tau} \quad \Leftrightarrow \quad (L^{-1})_\mu^\sigma = L_\mu^\sigma$$

Bem.:

- Die ausgezeichneten Koordinatentransformationen heißen im MINKOWSKI-Raum *LORENTZtransformationen*

- Im euklidischen \mathbb{R}^3 $g = \underline{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ heißen sie *Orthogonaltransformationen* ($\underline{1} = R R^T$)

2.4 Lorenz-invariante Formulierung physikal. Gesetze: 1-tes Bsp. Dopplereffekt

Umsetzung der spez. Relativitätstheorie: Formulierung der physik. Gesetze mit Tensoren (vor allem 4-Vektoren).

Die Phase einer em-Welle $\varphi = \omega t - \underline{k}r$ entspricht dem Skalarprodukt $\varphi = g_{\mu\nu} k^\mu x^\nu$ mit 4-er Wellenvektor \underline{k}^i ($k^0 = \frac{\omega}{c}, \underline{k}$) der $k_\mu k^\mu = 0 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \underline{k}^2$ erfüllt wegen der Dispersionsrelation. Bei Trafo auf bewegtes IS' geht er über in

$$k'^\mu = L^\mu_\nu k^\nu \quad \xleftrightarrow{sLT} \quad \begin{aligned} \omega' &= \gamma(\omega + v k_z) & k_z &= \frac{\omega}{c} \cos \vartheta \\ k'_z &= \gamma\left(k_z + \frac{\omega v}{c^2}\right) & k_x &= \frac{\omega}{c} \sin \vartheta \\ k'_x &= k_x \end{aligned}$$

(A) Longitudinaler Dopplereffekt:

$$\vartheta = 0 \quad (k_z = \frac{\omega}{c}, k_x = 0) \quad \Rightarrow \quad \omega' = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \omega \doteq \left(1 + \frac{v}{c}\right) \omega$$

Frequenz erhöht sich wenn Abstand von Empfänger und Sender wegen der Relativbewegung abnimmt.

Wiederholung:

- Definition: Tensor N -ter Stufe:

$$t'^{\mu_1 \dots \mu_N} = d(D) \cdot D^{\mu_1}_{\nu_1} \dots D^{\mu_N}_{\nu_N} t^{\nu_1 \dots \nu_N}$$

- Die spezielle Relativitätstheorie entspricht der Formulierung physikalischer Gesetze mit *Vierertensoren*.
- erstes Beispiel: **relativistischer Dopplereffekt:**
Eingeführt wurde der Viererwellenvektor k^μ (Tensor 1. Stufe) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} k^\mu &= \left(\frac{\omega}{c}, \underline{k}\right) \\ k'^\mu &= L^\mu_\nu k^\nu \\ \text{spezielle LT: } \Rightarrow \omega' &= \gamma(\omega + v k_z) \\ k'_z &= \gamma\left(k_z + \frac{\omega v}{c^2}\right) \\ k'_x &= k_x \\ \text{Phase } \varphi &= k_\mu x^\mu \end{aligned}$$

Die Phase φ beschreibt jene Wellenfront, die bei $x^\mu = x'^\mu = 0$ emittiert wurde. Der Sender ruht im Koordinatensystem KS und bewegt sich relativ zu KS'

Der Winkel

vartheta ist der Winkel zwischen \underline{k} und \underline{v} , dann gilt:

$$\begin{aligned} k_z &= \frac{\omega}{c} \cos \vartheta \\ k_x &= \frac{\omega}{c} \sin \vartheta \end{aligned}$$

A) longitudinaler Dopplereffekt

Longitudinal bedeutet, dass der Wellenvektor \underline{k} in die Richtung von \underline{v} zeigt, d.h. $\vartheta = 0$.

Damit folgt, dass auch der Anteil des Wellenvektors in x -Richtung Null ist ($k_x = 0$).

$$\omega' = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \stackrel{v \ll c}{\approx} \left(1 + \frac{v}{c}\right) \omega \quad (2.47)$$

Dies gilt auf Grund den Taylorentwicklungen:

$$\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon}} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Die Frequenz erhöht sich, wenn der Abstand zwischen Sender und Empfänger wegen der Relativbewegung abnimmt. Es ist nur die Relativgeschwindigkeit von KS und KS' wichtig.

B) transversaler Dopplereffekt

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad k_z = 0 \quad k_x = \frac{\omega}{c}$$

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \doteq \omega \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (2.48)$$

Man spricht vom quadratischen transversalen Dopplereffekt. Dieser fehlt in der klassischen Physik komplett.

C) Aberation speziell bei Synchrotronstrahlung Ein beschleunigtes Elektron

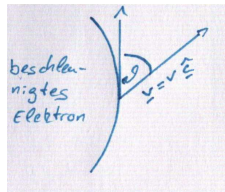


Abbildung 2.12: bechleunigtes Elektron

strahlt. Sei der Winkel, unter dem das Elektron im Inertialsystem streut $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Unter welchem Winkel ϑ' ist das Licht dann im Laborsystem KS' zu beobachten?

$$\tan \vartheta' = \frac{k'_x}{k'_z} = \frac{c}{\gamma v} \approx \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.49)$$

für $v \rightarrow c$.

Die Strahlung findet im Laborsystem unter sehr engen Winkeln statt. Beispielsweise werden in Grenoble (Frankreich) Forschungen durchgeführt, bei welchen $\gamma \approx 10^4$ ist.

Erinnerung:

Wir waren bei der Beobachtung gestartet, dass eine spezielle GALILEI-Transformation:

$$x'^i = x^i + v^i t; \quad t' = t$$

eine spezielle Lösung der Wellengleichung:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\underline{E}(\underline{r},t) = 0$$

nämlich:

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 \cos(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r})$$

in KS auf eine "Nicht-Lösung" in KS' abbildet:

$$\underline{E}'(\underline{r}',t') = \underline{E}'_0 \cos \underline{k}' \cdot \underline{r}'$$

wobei:

$$\left(\nabla'^2 - \frac{1}{c^2}\partial_{t'}^2\right)\underline{E} = \dots = -\underline{E}_0 k^2 \cos(\underline{k} \cdot \underline{r}') \neq 0$$

Dieser Widerspruch wird durch die spezielle LORENTZtransformation gelöst, in dem nun:

$$\begin{aligned} \omega t - \underline{k} \cdot \underline{r} &= k_\mu x^\mu \\ &= k'_\mu x'^\mu \\ &= \omega' t' - \underline{k}' \cdot \underline{r}' \\ k'^\mu &= L^\mu_\nu k^\nu \\ x'^\mu &= L^\mu_\nu x^\nu \end{aligned}$$

Ein LORENTZskalar (Tensor 0.ter Stufe) ist invariant in allen Intertialsystemen.

Bemerkung:

Wie sich c bzw. \underline{E}_0 transformieren lässt, sowie die elektromagnetische Wellengleichung wird in Aufgabe 31 behandelt.

2.5 Relativistische oder Einsteinsche Mechanik

Die Bewegung eines Massenpunktes mit Ruhemasse m entspricht einer Weltlinie im MIN-KOWSKI-Raum (M).

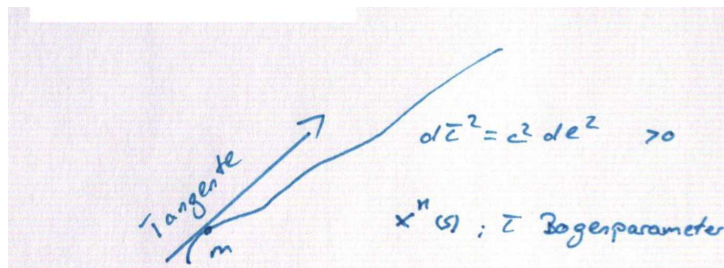


Abbildung 2.13: Bewegung eines Massenpunktes

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 > 0$$

2.5.1 Vierergeschwindigkeit u^μ

Wird die Weltlinie mit der Eigenzeit τ des Messpunktes (Uhr am Massenpunkt) parametrisiert, dann heißt der Tangentenvektor:

$$u^\mu(\tau) = \frac{d}{d\tau}x^\mu(\tau) \doteq \dot{x}^\mu(\tau) \quad (2.50)$$

Vierergeschwindigkeit.

Zwischen der Vierergeschwindigkeit u^μ und der Geschwindigkeit im Raum \underline{v} besteht folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\underline{r}(t) &= \underline{v}(t) \\ \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} &= \frac{dx^\mu(\tau(t))}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} \\ \S 2.3.5 &= \begin{pmatrix} c \\ \underline{v} \end{pmatrix} \cdot \gamma \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \begin{pmatrix} c \\ \underline{v} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Das Skalarprodukt:

$$u_\mu u^\mu = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2$$

ist *LORENTZinvariant*. Das bedeutet, dass $\frac{1}{c}u^\mu$ der "normierte Tensor 0.ter Stufe ist, der sogenannte "**Tangentenvektor**".

Bemerkung:

Daraus folgt für die Viererbeschleunigung a^μ :

$$a^\mu = \frac{d}{d\tau}u^\mu \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}c^2 = 0 &= \frac{d}{d\tau}g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \\ &= g_{\mu\nu}a^\mu u^\nu + g_{\mu\nu}u^\mu a^\nu = 2g_{\mu\nu}a^\mu u^\nu \\ \Leftrightarrow a^\mu u_\mu = 0 &= \dot{u}_\mu u^\mu \\ \Rightarrow \underline{\dot{u}} &\perp \underline{u} \end{aligned} \quad (2.53)$$

2.5.2 Viererimpuls p^μ

A) Relativistische Energie-Impuls Beziehung

Der räumliche Impuls \underline{p} wird durch die nullte Komponente $\frac{E}{c}$ mit der totalen Energie E zum Viererimpulsvektor:

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \underline{p} \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

mit *LORENTZinvarianter Länge* (EINSTEIN 1905):

$$p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \underline{p}^2 = (mc)^2 \quad (2.55)$$

mit der Ruhemasse m .

Im Ruhesystem ($\underline{p} = 0$) gilt also:

$$E = mc^2$$

Allgemein gilt:

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (c\underline{p})^2}$$

(relativistische $e - \underline{p}$ -Beziehung)

Die verallgemeinerte Newton'sche Beziehung folgt für $p \ll c$:

$$E \rightarrow mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

Die Energie-Masse-Äquivalenz kann z.B. bei der Kernspaltung oder Kernfusion (Deuterium + Tritium \rightarrow Helium + n mit $\frac{\Delta m}{m_{He}} \approx 8 \cdot 10^{-3} \rightarrow 18\text{MeV}$) beobachtet werden.

Bemerkung:

Der Ansatz $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \underline{p}\right)$ soll hier nicht bis ins Detail begründet werden. Es wird lediglich eine Motivation für diesen Ansatz gegeben:

Energie und Impuls charakterisieren die Bewegung eines Massenpunktes. Dieser hat als einzigen Parameter die Ruhemasse m . Laut EINSTEIN ist die einzige physikalisch wichtige Konstante die Lichtgeschwindigkeit c . Also müssen diese beiden Dinge miteinander in Verbindung gebracht werden, was durch obigen Ansatz geschieht.

B) Träge Masse Eine Verbindung zwischen *Kinematik* ($x^\mu(\tau), u^\mu(\tau)$) und der *Dynamik* (E, \underline{p}) ist gegeben durch:

$$\text{Ansatz wie bei Newton: } p^\mu = mu^\mu \quad (2.56)$$

$$\text{womit gilt: } p_\mu p^\mu = m^2 u_\mu u^\mu = m^2 c^2 \quad (2.57)$$

$$\text{und folgt: } p^\mu = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \begin{pmatrix} c \\ \underline{v} \end{pmatrix} = \gamma m \cdot \begin{pmatrix} c \\ \underline{v} \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Also taucht die **träge Masse**:

$$m(v) := m\gamma(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.59)$$

im Impuls $p^\mu = m(v) \cdot \underline{v}$ und in der Energie $E = m(v)c^2$ auf, wenn der Massenpunkt die Geschwindigkeit \underline{v} relativ zum Laborsystem hat.

Bemerkung:

Aus $p^\mu_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$ folgt:

$$g_{\mu\nu} p^\mu \frac{dp^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.60)$$

2.5.3 Einstein'sche Bewegungsgleichung

A) Minkowski-Kraft F^μ

Die Definition der MINKOWSKI-Kraft folgt in Analogie zur Newton'schen Mechanik (nur

dass Vierervektoren genommen werden):

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = F^\mu \quad (2.61)$$

Die "eigenzeitliche Änderung" des Impulses erfolgt auf Grund einer Krafteinwirkung.

Daraus und aus den Anfangsbedingungen folgt die Bahn des Massenpunktes.

Bemerkung:

Wegen (2.60) muss gelten:

$$\begin{aligned} p_\mu F^\mu &= m u_\mu F^\mu = g_{\mu\nu} p^\mu \frac{d}{d\tau} p^\nu = 0 \\ &\Rightarrow u_\mu F^\mu = 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} u^0 F^0 - u^1 F^1 - u^2 F^2 - u^3 F^3 &= 0 \\ &\Rightarrow F^0 = \frac{1}{c} \underline{v} \cdot \underline{F} \end{aligned} \quad (2.63)$$

2.6 Einsteinsche Bewegungsgleichungen

2.6.1 (A) Minkowski-Kraft

In Analogie zu Newton: $\frac{d}{d\tau} \underline{p}^\mu = \underline{F}^\mu$ "eigenzeitliche" Änderung des Impulses erfolgt aufgrund der Krafteinwirkung.

Daraus und aus den Anfangsbedingungen folgt die Bahn des MP. Wegen $\underline{g}_{\mu\nu} p^\mu \underline{F}^\nu = 0$ muss gelten $m \underline{v}_\mu \underline{F}^\mu = 0$ Es ergibt sich: $\underline{F}^0 = \frac{1}{c} \underline{v} \underline{F}$

2.6.2 (B) Lorentz-Kraft

Bsp. für \underline{F}^μ : LORENTZ-Kraft beschreibt die Kraft, die em-Felder auf Massenpunkt mit Ladung q ausübt.

$$\underline{F}_{Lor}^\mu = q \underline{F}^{\nu\mu} \underline{v}^\mu \quad (2.64)$$

Motivation:

- prop zur Ladung
- muss durch Feldgrößen ausgedrückt werden (Aufgabe 31: Feldtensor $\underline{F}^{\mu\nu}$)
- muss durch Teilchengrößen ausgedrückt werden ($\underline{x}^\mu \underline{v}^\mu \underline{q}^\mu$ geht nicht, da das Ergebnis von der Wahl des KS-Ursprungs abhängen würde)
- Lineare Auskopplung (einfachster Ansatz)

$$\underline{F}_{Lor}^\mu = \gamma q \begin{pmatrix} \underline{E} \cdot \underline{v} \\ \underline{E} + \underline{v} \times \underline{B} \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0 - \text{Komponente} \\ \text{Raumkomponenten} \end{array} \quad (2.65)$$

Wegen

$$\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \text{ folgt } \frac{d}{dt} m \gamma c^2 = \underbrace{q \underline{E} \underline{v}}_{\text{Leistung}} \quad (2.66)$$

genauso:

$$\frac{d}{dt} m(\underline{v}) \underline{v} = \frac{d}{dt} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \underline{v} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \quad (2.67)$$

relativistische Bewegungsgleichung für MP mit Ladung q in \underline{E} und \underline{B} Feldern
Beispiel: Exp. Nachweis der relat. Bewegungsgleichung durch Ablenkung von e^- im statischen homogenen \underline{B} -Feld bestätigt unseren Ausdruck für \underline{F}_{Lor}
Synchrotron:

Abbildung 2.14: Synchrotron

Anfangsbed: $\underline{v}(0) = v_0 \hat{x} \perp \underline{B}$

$$E = 0 \rightarrow m(\underline{v}) \frac{d}{dt} \underline{v} = q \underline{v} \times \underline{B} \quad (2.68)$$

→ Kraft in Ebene senkrecht zu \underline{B}

$$\rightarrow \underline{v}(t) = v_0(\hat{x} \cos \omega_L t - \hat{y} \sin \omega_L t) \quad (2.69)$$

mit ω_L der Lamorfrequenz. Ansatz in Bewegungsgleichung:

$$m(v_0) v_0 \omega_L \begin{pmatrix} -\sin \omega_L t \\ -\cos \omega_L t \end{pmatrix} = q v_0 B \begin{pmatrix} \sin \omega_L t \\ \cos \omega_L t \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

$$\omega_L = \frac{qB}{m(v_0)} = \frac{qB}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.71)$$

Massenpunkt macht eine Kreisbahn mit Radius $\frac{v_0}{\omega_L}$