Vorlesungsskript
Integrierter Kurs III - Optik

Marcel Indlekofer, Thomas Lauermann, Vincent Peikert und Raphael Straub

18. Februar 2005

Dies ist das Skript zur Vorlesung "Integrierter Kurs III" an der Universität Konstanz (Wintersemester 2004/2005) vorgetragen von Prof. G. Maret (Experimentalphysik) und Prof. M. Fuchs (theoretische Physik)
zuletzt aktualisiert am: 10.11.2004

Inhaltsverzeichnis

1 Optik **7**

1.0 Wiederholung der Elektrodynamik . . . 7
1.0.1 Maxwell-Gleichungen . . . 7
1.0.1.1 homogene Maxwell-Gleichungen . . . 7
1.0.1.2 inhomogene Maxwell-Gleichungen . . . 9
1.0.2 Die Lorentzkraft . . . 9
1.0.3 Materialgleichungen . . . 9
1.0.3.1 Vakuum . . . 10
1.0.3.2 unmagnetische Materialien . . . 10
1.0.3.3 Leiter . . . 10
1.0.3.4 Isolatoren / Dielektrika . . . 10
1.0.4 Superposition und Komplexifizierung . . . 11
1.0.5 Energie der elektromagnetischen Felder . . . 12
1.1 Die elektromagnetische Wellengleichung . . . 13
1.1.1 Lichtgeschwindigkeit c . . . 13
1.1.2 Exkurs: skalare Wellengleichung . . . 15
1.1.2.1 ebene Wellenlösungen nach d'Alembert . . . 15
1.1.2.2 Kugelwellen . . . 18
1.1.2.3 ebene monochromatische Wellen . . . 20
1.1.3 Transversalität elektromagnetischer Wellen . . . 21
1.1.4 Polarisation ebener, monochromatischer Wellen . . . 22
1.1.4.1 lineare Polarisation . . . 22
1.1.4.2 zirkulare Polarisation . . . 22
1.1.4.3 elliptische Polarisation . . . 23
1.1.5 Oszillierender Dipol als Quelle von EM-Strahlung . . . 23
1.1.6 Historisches . . . 24
1.1.7 Licht besteht aus Photonen . . . 24
1.1.8 Frequenzspektrum der EM-Strahlung . . . 25
1.2 Mathematischer Einschub -Parsevaltransformationen . . . 25
1.2.1 Motivation . . . 25
1.2.2 Definition . . . 25
1.2.3 Faltungstheorem . . . 28
1.2.4 Umkehrung der FT und Parseval-Gleichung . . . 29
1.2.5 Anwendung: Allgem. Lsg. der MG im idealen ungeladenen Dielektrikum . . . 30
1.3 Brechungsindex . . . 31
1.3.1 Makroskopische Definition . . . 31
1.3.2 Huygens'sches Prinzip . . . 32

1.3.3 Mikroskopisches Bild des Brechungsindex . . . 32
1.3.4 LORENTZ-Modell zur Dispersion $n(\lambda)$ . . . 33
1.3.5 Absorption und Imaginärteil von n . . . 34
1.4 Lichtausbreitung in optisch anisotropen Medien . . . 35
1.4.1 Überblick . . . 35
1.4.2 Brechungsindexellipsoid . . . 38
1.4.3 Lichtausbreitung in uniaxialen Kristallen . . . 40
1.4.4 Wichtige Anwendungen der Doppelbrechung . . . 43
1.5 Reflexion & Brechung des Lichts . . . 44
1.5.1 Wiederholung: Feldverhalten an Grenzflächen . . . 44
1.5.2 Energiefluss durch Grenzflächen . . . 44
1.5.3 Brechungs- & Reflexionsgesetze . . . 46
1.5.3.1 Kinematische Einschränkungen . . . 46
1.5.3.2 Reflexions- und Transmissionskoeffizienten . . . 47
1.5.3.3 Totalreflexion (Tunneleffekt) . . . 50
1.5.3.4 Metallreflexion . . . 51
1.5.3.5 FRESNEL'sche Formeln . . . 55
1.6 Geometrische Optik . . . 59
1.6.1 FERMAT'sches Prinzip . . . 59
1.6.2 Optische Abbildung I . . . 63
1.7 Dielektrika (Prismen, Linsen) . . . 67
1.7.1 a) Prisma (gleichschenkliges) . . . 67
1.7.2 b) Linsen . . . 69
1.8 Interferenz . . . 74
1.8.1 Interferenz von 2 Punktquellen . . . 74
1.8.2 MICHELSON-Interferometer . . . 76
1.8.3 Vielstrahlinterferenz . . . 78
1.8.4 FABRY-PEROT Interferometer . . . 81
1.8.5 Kohärenz & Wellengruppen . . . 84
1.9 Mathematischer Einschub: GREEN'sche Funktionen . . . 90
1.9.0 Motivation . . . 90
1.9.1 Die inhomogenen Wellengleichungen . . . 90
1.9.2 Die GREEN'sche Funktion der Helmholtzgleichung . . . 91
1.9.3 Randwertprobleme . . . 94
1.10 Beugung . . . 96
1.10.1 Beugung von Wellen . . . 96
1.10.2 Kirchhoffsche Ableitung des Hygenschen Prinzips . . . 96
1.10.3 FRAUNHOFER-Beugung . . . 97
1.10.3.1 Faltungen . . . 98
1.10.3.2 Einzelspalt . . . 99
1.10.3.3 Gitter aus unendlich dünnen Strichen . . . 100
1.10.4 Beugung an kreisförmiger Blende . . . 100
1.10.4.1 FRAUNHOFER-Beugung . . . 101
1.10.4.2 FRESNELbeugung und FRESNELsche Zonen . . . 101
1.11 Streuung . . . 103
1.11.1 Phänomen der Streuung von Wellen . . . 103
1.11.2 Streuquerschnitte . . . 104
1.11.3 Erinnerung Dipolstrahlung . . . 107

1.11.4 Rayleigh-Streuung 109
1.11.5 Dipolstrahlung (Zusatzblatt) 110
1.11.6 Rayleigh-Debye-Gans-Streuung 113
1.12 Optische Instrumente 117
1.12.1 Strichgitter 117

Kapitel 1

Optik

In dieser Vorlesung wird Optik im Sinne der Betrachtung von Licht als elektromagnetische Welle behandelt. Es findet keine Diskussion der Erzeugung oder Absorption von Licht statt. Dazu wären Kenntnisse der Quantenmechanik nötig. Ebenfalls werden die physiologischen Aspekte wie z.B. Auge oder Gehirn hier nicht behandelt.

1.0 Wiederholung der Elektrodynamik

Thema dieses Abschnittes sind die MAXWELL-Gleichungen, die elektromagnetische Feldenergie sowie die Wellengleichung des Lichts.
Die Elektrodynamik wurde ausführlich im Integrierten Kurs II behandelt. Zur Herleitung der MAXWELL Gleichungen sowie zum besseren Verständnis ist es sinnvoll das Skript dieser Vorlesung durchzulesen.

1.0.1 Maxwell-Gleichungen

Die MAXWELL-Gleichungen sind partielle Differentialgleichungen für Vektorfelder. Durch sie werden die elektromagnetischen Phänomene beschrieben.

1.0.1.1 homogene Maxwell-Gleichungen

1. Das *Vektorfeld* $\underline{B}(\underline{r},t)$ wird „*magnetisches Feld*“ bzw. “*magnetische Kraftflussdichte* “ genannt und ist **divergenzfrei**. In der differentiellen Schreibweise bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\underline{B}(\underline{r},t) &= \nabla \cdot \underline{B}(\underline{r},t) \\ \nabla \cdot \underline{B} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

   Dabei ist ∇ der sogenannte Nabla-Operator, für den gilt:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^t = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

$$\nabla \underline{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

In der integralen Form lautet diese MAXWELL-Gleichung für ein beliebiges, aber konstantes Volumen V mit der Oberflächennormalen $\mathrm{d}\underline{o}$:

$$0 = \int_v \mathrm{d}^3 r \nabla \underline{B}(\underline{r},t)$$

$$\oint_{\partial V} \mathrm{d}\underline{o} \cdot \underline{B}(\underline{r},t) = 0 \tag{1.1}$$

Dabei erhält man die letzte Umformung über den Gauss'schen Satz.
Der magnetische Fluss $\int \mathrm{d}\underline{o} \cdot \underline{B}$ durch die gerichtete ($\mathrm{d}\underline{o} = \underline{n}\,\mathrm{d}O$ mit dem Normalenvektor $\underline{n}$ zur Oberfläche), geschlossene Oberfläche ∂V hebt sich weg.
Die Gleichung ist homogen, da links nur das $\underline{B}$-Feld auftaucht und auf der rechten Seite Null steht.

2. **Faraday'sches Induktionsgesetz:**
Das Faraday'sche Induktionsgesetz besagt, dass ein elektrisches Feld durch ein sich zeitlich veränderliches $\underline{B}$-Feld oder durch die Bewegung einer Drahtschleife im $\underline{B}$-Feld *induziert* wird. Dazu lautet die differentielle Form:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\underline{E}(\underline{r},t) &= \nabla \times \underline{E}(\underline{r},t) = \nabla \times \underline{E} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}(\underline{r},t) = -\partial_t \underline{B} = -\dot{\underline{B}} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Bei einer beliebigen, aber konstanten Fläche A gilt folgende Relation:

$$\int_A \mathrm{d}\underline{o} \cdot \dot{\underline{B}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_A \mathrm{d}\underline{o} \cdot \underline{B}$$

Daraus erhält man die integrale Darstellung dieser MAXWELL-Gleichung:

$$\begin{aligned} \int_A \mathrm{d}\underline{o}\dot{\underline{B}} &= -\int_A \mathrm{d}\underline{o} \nabla \times \underline{E} \\ &= -\oint_{\partial A} \mathrm{d}\underline{s} \cdot \underline{E} \end{aligned} \tag{1.2}$$

bei der letzten Umformung wurde der Stoke'sche Satz verwendet.

3. Zum Lösen dieser beiden MAXWELL-Gleichungen kann man sie miteinander verbinden. Dazu führt man ein *skalares Potential* ($\phi(\underline{r},t)$) sowie ein *Vektorpotential* ($\underline{A}(\underline{r},t)$) ein.
Die beiden MAXWELL-Gleichungen (1.1) und (1.2) sind erfüllt, wenn das $\underline{E}$ und das $\underline{B}$ Feld durch die Potentiale in folgender Art und Weise bestimmt sind:

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}} \tag{1.3}$$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} \tag{1.4}$$

Den Beweis hierfür erhält man mit:

$$\nabla \cdot \underline{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}) = 0$$

$$\nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = -\nabla \times \dot{\underline{A}} + \partial_t \nabla \times \underline{A} = 0$$

1.0.1.2 inhomogene Maxwell-Gleichungen

1. Die „*elektrische Erregung*“ oder auch „*elektrische Verschiebungsdichte*“ $\underline{D}(\underline{r},t)$ wird durch eine „externe“(freie, wahre) Ladungsdichte $\varrho^{\text{ext.}}(\underline{r},t)$ erzeugt:

$$\begin{aligned} \text{div}\underline{D} &= \varrho^{\text{ext.}} \\ \int\limits_V \mathrm{d}^3\varrho^{\text{ext.}} &= Q^{\text{ext.}} \end{aligned} \tag{1.5}$$

   dabei ist $Q^{\text{ext.}}$ die externe Ladung in dem konstanten Volumen V. Über den Gauss'schen Satz erhält man:

$$\int\limits_V \mathrm{d}^3 r \text{div}\underline{D} = \oint\limits_{\partial V} \mathrm{d}\underline{o} \cdot \underline{D} = Q^{\text{ext.}}$$

   Diese Maxwell-Gleichung ist inhomogen, dabei ist ϱ die Inhomogenität.

2. **Maxwell'sches Verschiebungsgesetz:**
   Das Maxwell'sche Verschiebungsgesetz sagt aus, dass die „*magnetische Erregung* “$\underline{H}(\underline{r},t)$ durch externe Ströme $\underline{j}^{\text{ext.}}$ und durch den Maxwell*'schen Verschiebungsstrom* $\dot{\underline{D}}$ erzeugt wird. Es ergibt sich eine ebenfalls inhomogene Maxwell-Gleichung in differentieller und integraler Form:

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{H} &= \underline{j}^{\text{ext.}} + \dot{\underline{D}} \\ \int\limits_A \mathrm{d}\underline{o} \left(\underline{j}^{\text{ext.}} + \dot{\underline{D}} \right) &= \int\limits_A \mathrm{d}\underline{o} \nabla \times \underline{H} = \oint\limits_{\partial A} \mathrm{d}\underline{s} \cdot \underline{H} \end{aligned} \tag{1.6}$$

   Für die letzte Umformung der integralen Form wurde der Stoke'sche Satz benutzt. Anschaulich ist die Aussage der integralen Form, dass bei einem Leiter, der von einem Kondensator unterbrochen wird (im Kondensator ist ein $\dot{\underline{D}}$-Feld), auch in dem Bereich, in dem kein Draht (kein Leiter) ist, also im Kondensator, ein $\underline{H}$-Feld existiert sofern bei den beiden Leiterstücken ein $\underline{H}$-Feld existiert.

Es sei hier angemerkt, dass die 8 Maxwell-Gleichungen für die 12 Felder (jedes Feld ist in drei Komponenten zu betrachten) bei gegebenem $\varrho^{\text{ext.}}$ und $\underline{j}^{\text{ext.}}$ nicht geschlossen sind. Dies bedeutet, dass sie die Felder nicht eindeutig festlegen.

1.0.2 Die Lorentzkraft

Elektromagnetische Felder üben die Kraft:

$$\underline{F} = q \cdot (\underline{E}(\underline{r}(t),t) + \underline{v}(t) \times \underline{B}(\underline{r}(t),t)) \tag{1.7}$$

auf ein Punktteilchen mit Ladung q, Position $\underline{r}(t)$ und Geschwindigkeit $\underline{v}(t)$ aus.

1.0.3 Materialgleichungen

Die Beschreibung der „internen“ Ladungen, die in Materie vorliegen, ist zu schwierig. Das mikroskopische Verständnis erfolgt erst bei der genaueren Betrachtung der Festkörperphysik.
Deshalb gibt es sogenannte **Materialgleichungen**. Sie sind Annahmen um dieses mikroskopische Problem zu umgehen. Durch sie werden Zusammenhänge zwischen den Feldern $\underline{H}$ bzw. $\underline{D}$ und den Feldern $\underline{E}$ bzw. $\underline{B}$ geliefert.

1.0.3.1 Vakuum

Im Vakuum gibt es keine internen Ladungen ($\varrho = \varrho^{\text{ext.}}$; $\underline{j} = \underline{j}^{\text{ext.}}$). Unter diesen Voraussetzungen gilt (ohne Näherung):

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \cdot \underline{E} \tag{1.8}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \underline{B} \tag{1.9}$$

Dabei ist ε_0 die *Vakuumpolarisierbarkeit* und μ_0 die *Vakuumpermeabilität*.

Im Gegensatz zu diesen beiden Materialgleichungen (1.8) und (1.9) sind alle anderen Materialgleichungen Näherungen aus einfachen Modellen, die für gemittelte Felder gelten.

1.0.3.2 unmagnetische Materialien

In unmagnetischen Materialien gilt mit der *magnetischen Permeabilität* (μ):

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \cdot \underline{B} \tag{1.10}$$

Unmagnetische Materialien sind dadurch charakterisiert, dass ihre Permeabilität nahezu 1 ist. ($\mu \approx 1$)
Materialien mit $\mu < 1$ wie z.B. Wasser oder Kupfer werden **diamagnetisch** genannt.
Materialien mit $\mu > 1$ wie z.B. Sauerstoff oder Platin werden **paramagnetisch** genannt.

1.0.3.3 Leiter

In Leitern existieren freie, interne Ladungsträger. Wir betrachten verschiedene Modelle für Leiter:

- **Modell des idealen Leiters:**
  Innerhalb des idealen Leiters gibt es kein elektrisches Feld, somit gilt $\underline{E} \equiv 0$ innerhalb des Leiters.

- **Modell des ohmschen Leiters:**
  Mit der Leitfähigkeit σ gilt:

  $$\underline{j}^{\text{ext.}} = \sigma \cdot \underline{E} \& \underline{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \underline{E} \tag{1.11}$$

  Bei Leitern sinkt die Leitfähigkeit mit der Temperatur bei Halbleitern hingegen nimmt die Leitfähigkeit bei einer Temperaturzunahme stark zu.

1.0.3.4 Isolatoren / Dielektrika

In einem Dielektrikum sind alle Ladungen gebunden, es gibt keine freien Ladungen. Wieder unterscheiden wir verschiedene Modelle:

- **Modell des idealen Dielektrikums:**
  Mit der *relativen Dielektrizitätskonstante* ε gilt im idealen Dielektrikum:

  $$\underline{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot \underline{E} \tag{1.12}$$

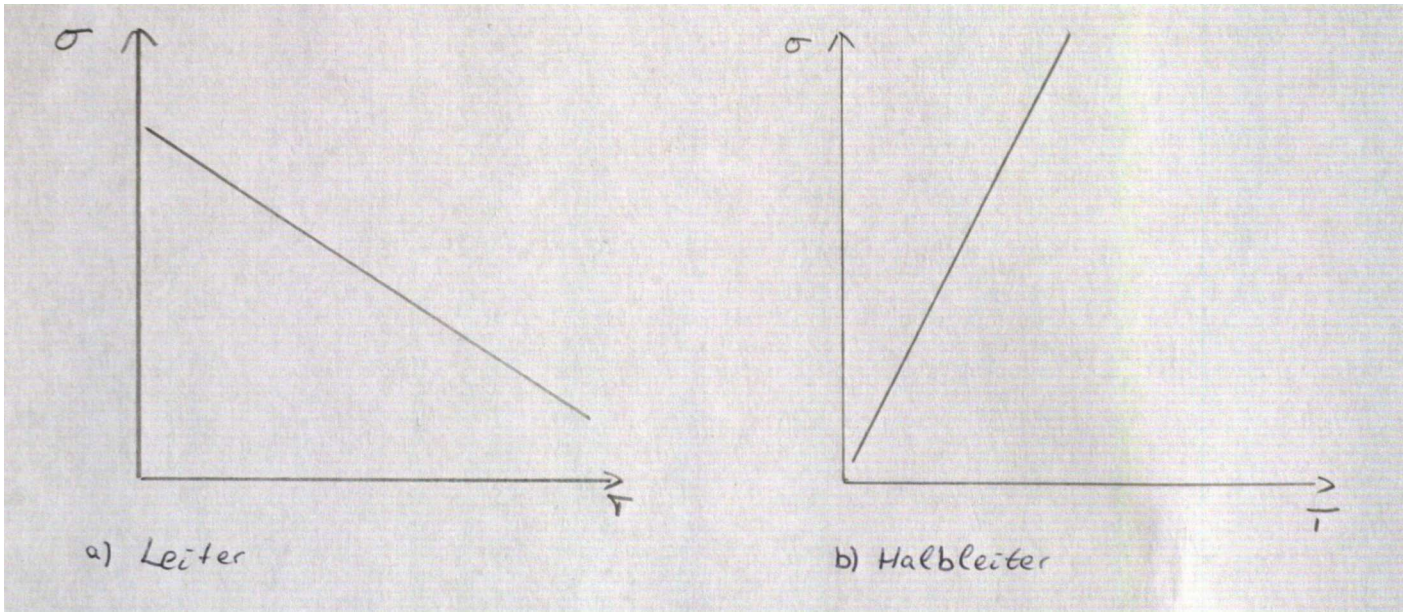


Abbildung 1.1: Leitfähigkeit in Abhängigkeit der Temperatur a)Leiter b) Halbleiter; bei **Isolatoren** gilt $\sigma \approx 0$.

- **Modell des polarisierbaren Dielektrikums:**
  Hier gilt mit der Polarisationsdichte $\underline{P}$, der Frequenz der gebundenen harmonischen Bewegung der Ladungen ω_0 und der Plasmafrequenz ω_P:

$$\ddot{\underline{P}} + \omega_0^2 \underline{P} = \varepsilon_0 \omega_P^2 \cdot \underline{E} \tag{1.13}$$

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \cdot \underline{E} + \underline{P} \tag{1.14}$$

- **Modell des anisotropen Dielektrikums:**
  Bei anisotropen Dielektrikum gilt wie analog zum idealen Dielektrikum (1.12):

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{E}$$

  Dabei ist $\underline{\underline{\varepsilon}}$ jedoch ein Tensor zweiter Stufe (Matrix):

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Bemerkung: Die linearen Zusammenhänge sind nur Annahmen, allgemein können auch nicht-lineare Effekte auftreten, dann ist z.B. $\varepsilon = \varepsilon(\underline{E})$.

1.0.4 Superposition und Komplexifizierung

Wir betrachten die MAXWELL-Gleichungen im Vakuum. Sind nun $\underline{E}_n$ und $\underline{B}_n$ für $n =$ 1,2,3,... Lösungen zu MAXWELL-Gleichungen zu ϱ_n und $\underline{j}_n$, d.h. gilt:

$$\nabla \underline{E}_n = \frac{\varrho_n}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \underline{B}_n = 0$$

$$\nabla \times \underline{B}_n = \mu_0 \cdot (\underline{j}_n + \varepsilon_0 \dot{\underline{E}}_n) \qquad \nabla \times \underline{E}_n + \dot{\underline{B}}_n = 0$$

und sind $c_n \in \mathbb{C}$, so gelten für die **Superpositionen** $\underline{E} = \sum_n c_n \underline{E}_n$ und $\underline{B} = \sum_n c_n \underline{B}_n$ wieder die MAXWELL-Gleichungen für $\varrho = \sum_n \varrho_n$ und $\underline{j} = \sum_n \underline{j}_n$.
Beweis:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \underline{B} &= \nabla \times \sum_n c_n \underline{B}_n \\
&= \sum_n c_n \nabla \times \underline{B}_n \\
&= \sum_n c_n \left[\mu_0 \cdot \left(\underline{j}_n + \varepsilon_0 \dot{\underline{E}}_n \right) \right] \\
&= \mu_0 \cdot \left(\underline{j} + \varepsilon_0 \dot{\underline{E}} \right)
\end{aligned}$$

Das Superpositionsprinzip ist äquivalent zur Linearität der MAXWELL-Gleichungen.
Anwendungsbeispiel:

$$\begin{aligned}
\underline{E}(\underline{r},t) &= \underline{E}_0 \cos(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t) \\
\underline{E}_c &= \underline{E}_0 \cdot e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \qquad \text{dient als Hilfsfeld mit } \underline{E}_0 \text{ reell.}
\end{aligned}$$

$$\underline{E} = \frac{1}{2} \left(\underline{E}_c + \underline{E}_c^* \right) = \Re\{\underline{E}_c\}$$

1.0.5 Energie der elektromagnetischen Felder

Aus der LORENTZkraft folgt die Leistung der elektromagnetischen Felder an freien (externen) Ladungen q_i mit $i = 1,2,...$ im Volumen V als Änderung der Energie der Materie, d.h. der freien Ladungen in V. Die Leistung erhält man über *Kraft mal Geschwindigkeit*:

$$\begin{aligned}
P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_{\text{Mat.}} &= \sum_i \underline{v}_i q_i \left(\underline{E}(\underline{r}_i(t)) + \underline{v}_i \times \underline{B}(\underline{r}_i(t)) \right) \\
&= \sum_i q_i \underline{v}_i \underline{E}(\underline{r}_i(t)) \\
&= \int_V \mathrm{d}^3 r \underline{E}(\underline{r},t) \qquad \underbrace{\sum_i q_i \underline{v}_i \delta\left(\underline{r} - \underline{r}_i(t)\right)}_{\text{mikroskop. Ausdruck für } \underline{j}^{\text{ext.}}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = \int_V \mathrm{d}^3 r \underline{j}^{\text{ext.}} \cdot \underline{E} \tag{1.16}$$

Damit ergibt sich die Joule'sche Wärme (Leistung pro Volumen) zu $\underline{j}^{\text{ext.}} \cdot \underline{E}$. Mit den MAXWELL-Gleichungen (MAXWELL'sches Verschiebungsgesetz (1.6) und Faraday'sches Induktionsgesetz(1.2)) folgt weiter:

$$\begin{aligned}\underline{E}\cdot\underline{j}^{\text{ext.}} &= -\underline{E}\cdot\dot{\underline{D}} + \underline{E}\cdot\nabla\times\underline{H}\\ &= -\underline{E}\cdot\dot{\underline{D}} - \nabla\cdot(\underline{E}\times\underline{H}) + \underline{H}\cdot\nabla\times\underline{E}\\ &= -\underline{E}\cdot\dot{\underline{D}} - \underline{H}\cdot\dot{\underline{B}} - \nabla\cdot(\underline{E}\times\underline{H}) \qquad (1.17)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_{\text{Mat.}} + \int\limits_V \mathrm{d}^3r\left(\underline{E}\cdot\dot{\underline{D}} + \underline{H}\cdot\dot{\underline{B}} + \nabla\cdot(\underline{E}\times\underline{H})\right) = 0 \qquad (1.18)$$

Das Prinzip der Energieerhaltung erlaubt die elektromagnetische Energie:

$$U_{\text{em}} = \int\limits_V \mathrm{d}^3r \quad u_{\text{em}}(\underline{r},t) \qquad (1.19)$$

zu bestimmen. Dabei ist u_{em} die elektromagnetische *Energiedichte*. Man betrachtet ein beliebiges Volumen V, das aber konstant gehalten wird. Außerdem ist es wichtig, dass die felderzeugenden Komponenten (Leiter, Kondensatoren etc.) weit entfernt sind, so dass die Felder außerhalb des Volumens als gegeben angenommen werden können.
Im Folgenden wird der Spezialfall untersucht, dass die Materie im Volumen V ein unmagnetisches, ideales Dielektrikum ist:

$$\begin{aligned}\underline{E}\cdot\dot{\underline{D}} &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\partial_t\underline{E}^2\\ \underline{H}\cdot\dot{\underline{B}} &= \frac{\mu\mu_0}{2}\partial_t\underline{H}^2\end{aligned}$$

Damit folgt mit Hilfe des Gauss'schen Satz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_{\text{Mat}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_{\text{em}} + \oint\limits_{\partial V}\mathrm{d}\underline{o}\cdot\underline{S} = 0 \qquad (1.20)$$

$$u_{\text{em}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{\mu\mu_0}{2}H^2 \qquad (1.21)$$

$$\underline{S} = \underline{E}\times\underline{H} \qquad (1.22)$$

Dabei ist u_{em} die elektromagnetische Energiedichte und $\underline{S}$ der **Poynting-Vektor** (die Energiestromdichte der elektromagnetischen Felder).
Die zeitliche Änderung der gesamten Energie $U = U_{\text{Mat}} + U_{\text{em}}$ der externen Ladungen und der elektromagnetischen Felder in V ist gegeben durch den Fluß von $\underline{S}$ durch die Oberfläche ∂V von V.
Die differentielle Form von Gleichung (1.20) heißt *Poynting-Satz*:

$$\underline{j}^{\text{ext.}}\cdot\underline{E} + \partial_t u_{\text{em}} + \nabla\cdot\underline{S} = 0 \qquad (1.23)$$

1.1 Die elektromagnetische Wellengleichung

1.1.1 Lichtgeschwindigkeit c

Nach Maxwell und Faraday induzieren sich elektrische und magnetische Felder gegenseitig.

Im ungeladenen (unmagnetischen) Dielektrikum ($\varrho^{\text{ext}} = \underline{j}^{\text{ext}} = 0$; $\underline{D} = \varepsilon\varepsilon_0\underline{E}$; $\underline{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\underline{B}$) gilt:
zunächst mit dem Faraday'schen Induktionsgesetz (1.2)

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla(\nabla\underline{E}) - \nabla^2\underline{E} + \mu\mu_0 \underbrace{\nabla \times \underline{\dot{H}}}_{=\underline{j}^{\text{ext}} + \varepsilon\varepsilon_0\dot{\underline{E}}} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\nabla^2\underline{E} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\ddot{\underline{E}} &= 0 \end{aligned}$$

Man definiert die *Vakuumlichtgeschwindigkeit* c sowie den *Brechungsindex* n als:

$$c := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \qquad n := \sqrt{\varepsilon\mu}$$

Daraus ergibt sich die *homogene* ***Wellengleichung*** des elektrischen Feldes:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\partial_t^2\right]\underline{E}(\underline{r},t) = 0 \tag{1.24}$$

$v = \frac{c}{n}$ ist die Lichtgeschwindigkeit im Dielektrikum.
Über das MAXWELL'sche Verschiebungsgesetz (1.6) erhält man die homogene Wellengleichung des magnetischen Feldes:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \times \left(\nabla \times \underline{H} - \underbrace{\underline{j}^{\text{ext.}}}_{=0} - \dot{\underline{D}}\right) \\ &= \nabla\left(\nabla \cdot \underline{H}\right) - \nabla^2\underline{H} - \varepsilon\varepsilon_0 \cdot \nabla \times \dot{\underline{E}} \\ \Leftrightarrow 0 &= \left[\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\partial_t^2\right]\underline{H}(\underline{r},t) \end{aligned} \tag{1.25}$$

In Luft ist beispielsweise $n \approx 1{,}000294$ und $\sqrt{\varepsilon\mu} \approx 1{,}000295$.
In Wasser hingegen ist $n \approx 1{,}33$ und $\sqrt{\varepsilon\mu} \approx 9$. Diese Diskrepanz bei Wasser kommt von der Dispersion.(s. später)

Wiederholung: Materialgleichungen

Im ***idealen Dielektrikum*** *gilt:*

$$\begin{aligned} \underline{D} &= \varepsilon\varepsilon_0\underline{E} \\ \underline{H} &= \frac{1}{\mu\mu_0}\underline{B} \end{aligned}$$

ein ***ohm'sches Metall*** *ist charakterisiert durch:*

$$\underline{j} = \sigma \cdot \underline{E}$$

Der Energiesatz im idealen Dielektrikum lautet:

$$0 = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \underbrace{(\underline{j} \cdot \underline{E})}_{\textit{joule'sche Wärme}} + \partial_t \underbrace{\left(\frac{1}{2}E^2 + \frac{c^2}{n^2}B^2\right)}_{\textit{em Feldenergie}} + \nabla \cdot \frac{c^2}{n^2}\underbrace{\underline{E} \times \underline{B}}_{=\underline{S}}$$

Die Wellengleichungen lauten mit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$ *und* $v = \frac{c}{n}$*:*

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\partial_t^2\right) \cdot \underline{E} = 0$$
$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\partial_t^2\right) \cdot \underline{H} = 0$$

1.1.2 Exkurs: skalare Wellengleichung

Die Wellengleichung für ein Skalarfeld $\Psi(\underline{r},t)$ lautet:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\partial_t^2\right) \cdot \psi(\underline{r},t) = 0 \tag{1.26}$$
$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - \frac{1}{v^2}\partial_t^2\right) \cdot \Psi = 0$$
$$\text{vergleiche mit: } \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - \frac{1}{v^2}\partial_t^2\right) \cdot \underline{H} = 0$$

1.1.2.1 ebene Wellenlösungen nach d'Alembert

d'Alembert zeigte, dass:

$$\psi(\underline{r},t) = f_+(\underline{k} \cdot \underline{r} + \omega t) + f_-(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t) \tag{1.27}$$

mit dem festen Vektor $\underline{k}$ der Länge $k = |\underline{k}| = \frac{\omega}{v}$ Lösung der skalaren Wellengleichung für beliebige (zwei Mal stetig differenzierbare) Funktionen $f_\pm$ ist.
Dabei ist $f_\pm = f_\pm(\varphi_\pm)$ wobei $\varphi_\pm = \underline{k} \cdot \underline{r} \pm \omega t$ als „**Phase**" der Funktion bezeichnet wird. Häufig wird allerdings nur φ_- als Phase bezeichnet.

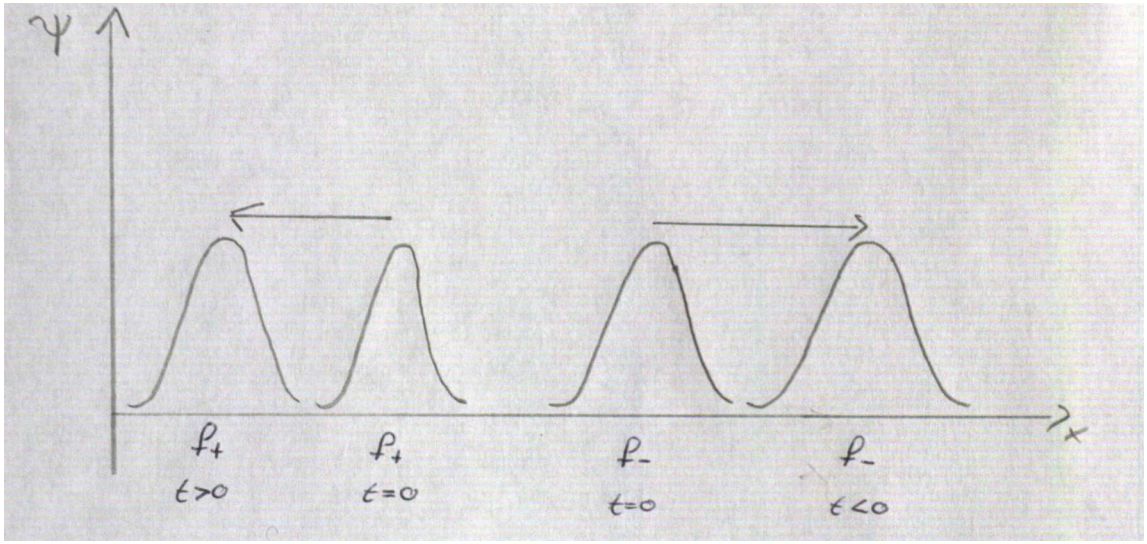


Abbildung 1.2: Ausbreitung der Welle

Wählt man $\underline{k} = k\underline{\hat{x}}$, so wird $\varphi_\pm = kx \pm \omega t$ und man erhält die in Abbildung 1.2 dargestellte Situation.

f_+ beschreibt eine nach $-\underline{k}$ (links) laufende Welle (Erregung, Signal), f_- eine nach $+\underline{k}$ (rechts) laufende, da:
$\varphi_\pm(\underline{r}+\Delta\underline{r},t+\Delta t) = \varphi_\pm(\underline{r},t)$ gilt für:

$$\underline{k}\cdot\Delta\underline{r} = \mp\omega\Delta t$$

Mit der Wahl von $\underline{k}$ in x-Richtung ergibt dies:

$$\Delta x = \mp\frac{\omega}{k}\Delta t$$

Im Folgenden soll bewiesen werden, dass (1.27) die Lösung der Wellengleichung ist:

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 f_\pm(\varphi_\pm(\underline{r},t)) &= \partial_t\left(\frac{\partial f_\pm}{\partial\varphi_\pm}\dot{\varphi}_\pm\right)\\
&= \partial_t\left(\pm\omega\cdot\frac{\partial f_\pm}{\partial\varphi_\pm}\right)\\
&= (\pm\omega)^2\cdot\frac{\partial^2 f_\pm}{\partial\varphi_\pm^2} \qquad (1.28)\\
\nabla^2 f_\pm(\varphi_\pm(\underline{r},t)) &= \nabla\cdot\left(\frac{\partial f_\pm}{\partial\varphi_\pm}\cdot\nabla\varphi_\pm(\underline{r},t)\right)\\
&= \nabla\cdot\left(\frac{\partial f_\pm}{\partial\varphi_\pm}\underline{k}\right)\\
&= k^2\cdot\frac{\partial^2 f_\pm}{\partial\varphi_\pm^2} \qquad (1.29)
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun die homogene skalare Wellengleichung (1.26), so sieht man, dass sie genau dann erfüllt ist, wenn man (1.28) mit (1.29) gleichsetzt und dabei die linke Seite noch durch v^2 dividiert:

$$\begin{aligned}
(\frac{\omega}{v})^2\cdot\frac{\partial^2 f_\pm}{\partial\varphi_\pm^2} &= k^2\cdot\frac{\partial^2 f_\pm}{\partial\varphi_\pm^2}\\
\Leftrightarrow k^2 &= \frac{\omega^2}{v^2}
\end{aligned}$$

q.e.d.
Bemerkungen:

- $\underline{k}$ heißt *Wellenvektor.*
- Die Beziehung $\omega(k) = vk$ ist ein Beispiel einer "textitDispersionsrelation". Sie muss erfüllt sein, damit die homogene skalare Wellengleichung nicht-triviale Lösungen hat.
- Ψ ist eine *ebene Welle*, weil für ein gegebenes $t = t_0$ die Flächen, auf denen $\Psi(\underline{r},t = t_0) = const.$ gilt, Ebenen sind. Diese Ebenen sind bestimmt durch die Ebenengleichung:

$$\underline{k}\cdot\underline{r} = const.$$

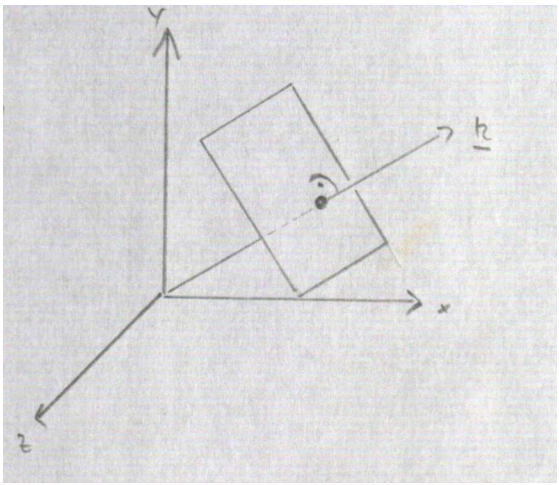


Abbildung 1.3:

- $\underline{k}$ gibt die Ausbreitungsrichtung der Welle an, weil eine Ebene mit $\varphi_\pm = const.$ sich mit der sogenannten „Phasengeschwindigkeit“ $v = \frac{\omega}{k}$ in $\mp\underline{k}$-Richtung bewegt:

$$\Delta\underline{r} = \mp\frac{\underline{k}}{k} v\Delta t = \mp\hat{\underline{k}} v\Delta t$$

- Die Ebene mit $\varphi_\pm = const.$ wird als **Wellenfront** bezeichnet, und steht senkrecht auf $\underline{k}$

Wählt man das Koordinatensystem so, dass der Vektor $\underline{k}$ in x-Richtung zeigt, so folgt daraus eine eindimensionale Welle:

$$\left(\partial_x^2 - \frac{1}{v^2}\partial_t^2\right)\Psi(x,t) = 0 \tag{1.30}$$

Untersucht werden soll nun, wie sich ein „Wellenpaket“ bewegt, welches zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben ist durch:

$$\Psi(x,t=0) = \Psi_0(x)$$
$$\dot{\Psi}(x,t=0) = \dot{\Psi}_0 = v_0(x)$$

gegeben ist.
Dazu benutzt man nach d’Alembert:

$$\Psi(x,t) = f_+(x+vt) + f_-(x-vt)$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$\Psi_0(x) = f_+(x) + f_-(x)$$

mit:

$$\partial_t f_\pm(x \pm vt) = \pm v f_\pm'(x \pm vt)$$
$$v_0(x) = v\left(f_+'(x) - f_-'(x)\right)$$

Mit diesen Anfangsbedingungen folgt durch Aufintegrieren:

$$f_+(x) - f_-(x) = \frac{1}{v} \int^{x} \mathrm{d}x' v_0(x') \tag{1.31}$$

$$\Rightarrow f_\pm = \frac{1}{2} \left(\Psi_0(x) \pm \frac{1}{v} \int \mathrm{d}x' v_0(x') \right) \tag{1.32}$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2} \left(\Psi_0(x+vt) + \Psi_0(x-vt) + \frac{1}{v} \int_{x-vt}^{x+vt} \mathrm{d}x' v_0(x') \right) \tag{1.33}$$

Gleichung (1.33) wird *Formel von d'Alembert* genannt und ist die allgemeine und eindeutige Lösung der Wellengleichung.

1.1.2.2 Kugelwellen

Im dreidimensionalen Raum werde $\Psi(\underline{r},t) = \Psi(r = |\underline{r}|,t)$ angenommen. Dabei ist $\underline{r} = 0$ der Ursprung des Koordinatensystems. Mit Übungsaufgabe 4 folgt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \right) \Psi(r,t) \\ &= \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \right) \Psi(r,t) \end{aligned}$$

Man wähle den Ansatz $\Psi(r,t) = \frac{1}{r} \cdot g(r,t)$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_r \frac{1}{r} g &= \frac{1}{r} g' - \frac{1}{r^2} g \\ \Leftrightarrow \partial_r^2 \frac{1}{r} g &= \partial_r \left(\frac{1}{r} g' - \frac{1}{r^2} g \right) \\ &= -\frac{2}{r^2} g' + \frac{1}{r} g'' + \frac{2}{r^3} g \end{aligned} \tag{1.34}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \left(\partial_r^2 - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \right) g(r,t) = 0 \tag{1.35}$$

für $r > 0$ folgt die eindimensionale Wellengleichung.
Wenn $\Psi = \Psi(r,t)$ gilt, so ergibt sich Ψ aus der d'Alembert Lösung der radialen Gleichung für $g = r \cdot \Psi$:

$$\Psi(r,t) = \frac{1}{r} \left(g_+(r+vt) + g_-(r-vt) \right) \tag{1.36}$$

Bemerkungen:

- g_+ ist die einlaufende und g_- die auslaufende Kugelwelle
- $g_\pm$ ergeben sich aus den Anfangsbedingunen mit der *Formel von Poisson*
- Ob ebene Welle oder Kugelwelle verwendet wird, hängt von der Symmetrie des Problems ab.

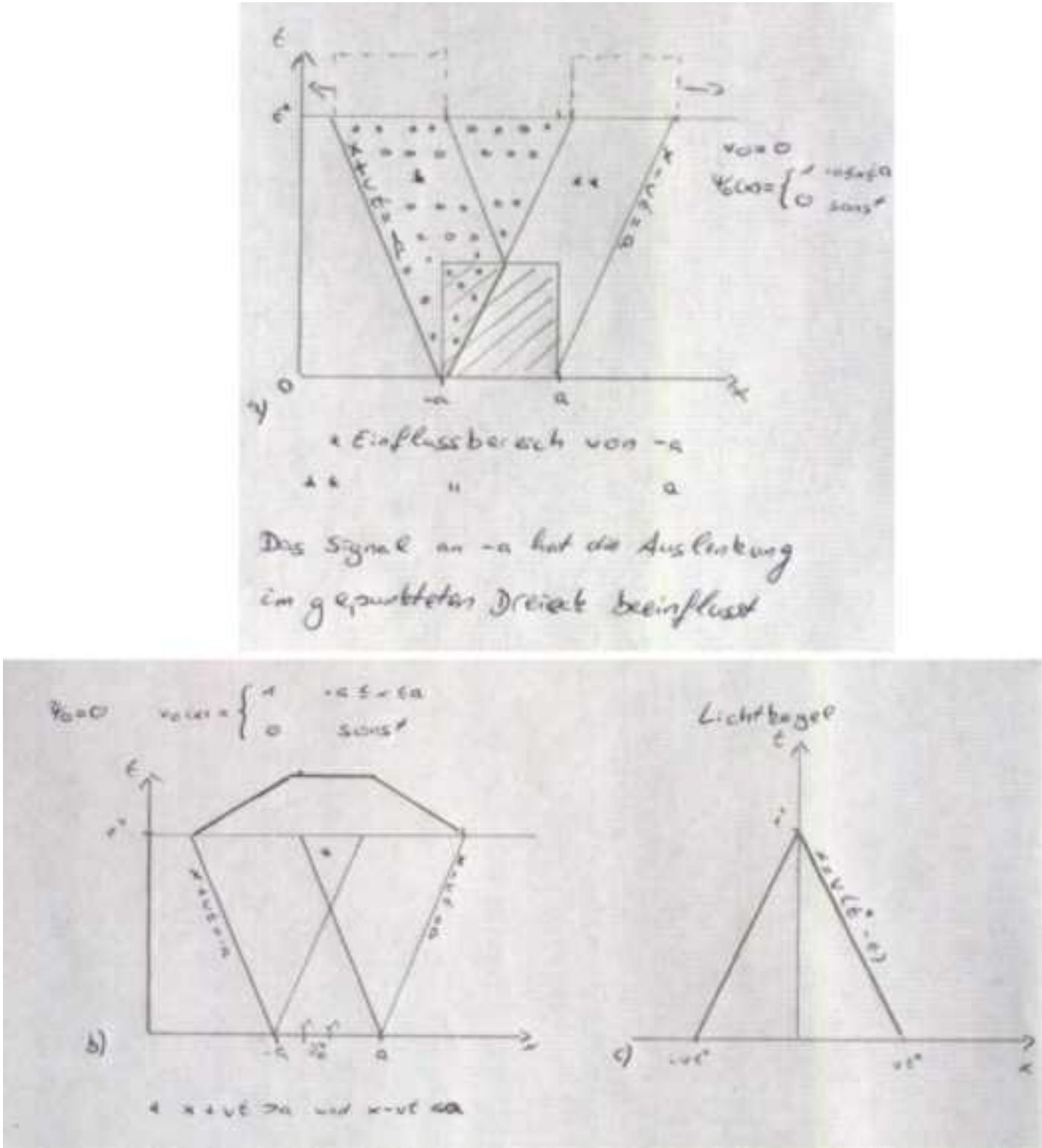


Abbildung 1.4: a,b) Bewegung eines Wellenpaketes unter verschiedenen Anfangsbedingungen c) Lichtkegel

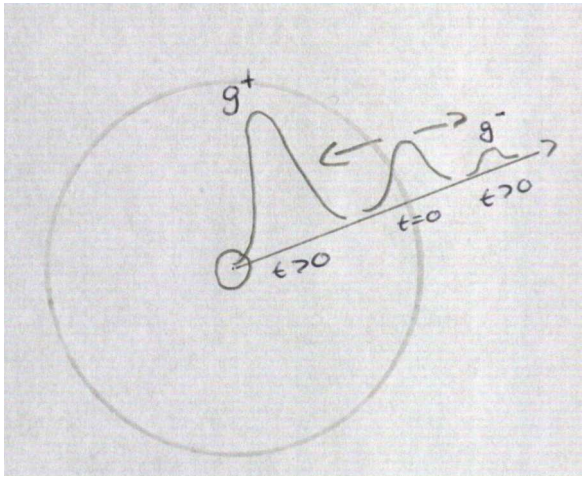


Abbildung 1.5: Kugelwelle

1.1.2.3 ebene monochromatische Wellen

Die ebenen monochromatischen Wellen sind ein sehr wichtiger Spezialfall der oben behandelten ebenen Wellen. Hier gilt:

$$\begin{aligned} f_\pm(\varphi_\pm) &= A_\pm \cos(\varphi_\pm(\underline{r},t) + \delta_\pm) \\ &= A_\pm \cos(\underline{k} \cdot \underline{r} \pm \omega t + \delta_\pm) \end{aligned} \tag{1.37}$$

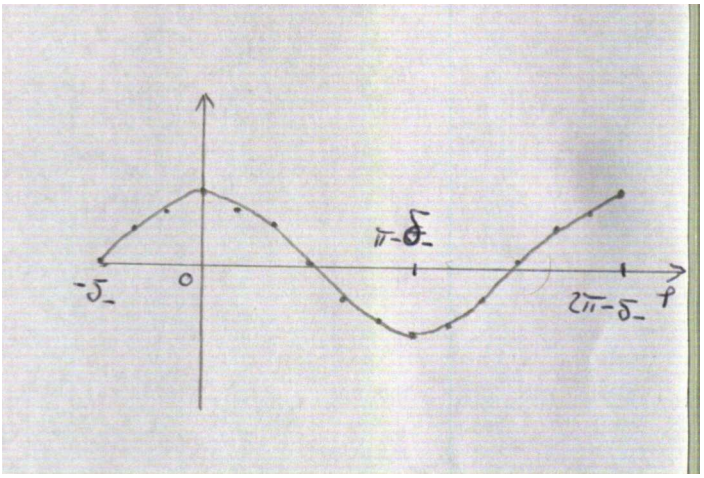


Abbildung 1.6:

für festes $\underline{r} = \underline{r}_0$ gilt, dass $f_\pm(\underline{r}_0,t+mT) = f_\pm(\underline{r},t)$ periodisch für $m = 0,1,2,...$ in t ist. Die Periode ist dabei $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$.
ν ist die Frequenz mit der Einheit *Hertz*. $\omega = 2\pi\nu$ wird mit *Kreisfrequenz* bezeichnet. Außerdem gilt:

$$f_\pm = A_\pm \cos(\underline{k} \cdot \underline{r} \pm \omega t + \delta_\pm)$$
$$f_\pm(\underline{r} + \Delta\underline{r},t_0) = f_\pm(\underline{r},t_0)$$

$f_\pm$ ist periodisch in $\underline{r}$ für $\Delta\underline{r} \cdot \underline{k} = 2\pi m$ mit $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
Wählt man $\underline{k} \parallel \hat{\underline{x}}$, so ergibt sich:

$$\Delta x = m \cdot \frac{2\pi}{k} = m \cdot \lambda$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} v = \frac{v}{\nu} \tag{1.38}$$

$$v = \lambda \cdot \nu \tag{1.39}$$

$$v \cdot T = \lambda \tag{1.40}$$

λ ist die sogenannte *Wellenlänge*

1.1.3 Transversalität elektromagnetischer Wellen

Im ungeladenen, unmagnetischen idealen Dielektrikum (ε, μ) betrachten wir eine komplexifizierte ebene monochromatische Welle:

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 \cdot e^{-i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} = \underline{E}_0 \cdot e^{i\varphi}$$

mit $\underline{E}_0 \in \mathbb{C}^3$ als konstantem Amplitudenvektor.
Physikalisch relevant ist nur der Realteil von $\underline{E}$.
Nun soll untersucht werden, ob diese Welle die Maxwell-Gleichungen erfüllt:
Betrachten wir Gleichung (1.5) für $\varrho^{\text{ext}} = 0$:

$$\nabla \cdot \underline{D} = \varepsilon\varepsilon_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow -i\underline{k} \cdot \underline{E}_0 \underbrace{e^{i\varphi}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{k} \cdot \underline{E}_0 = 0 \tag{1.41}$$

Als nächstes untersuchen wir Gleichung (1.2):

$$\dot{\underline{B}} = -\nabla \times \underline{E} = -i\underline{k} \times \underline{E}_0 e^{i\varphi}$$

$$= \frac{i}{i\omega} \underline{k} \times \underline{E}_0 \partial_t e^{i\varphi}$$

und durch Integration folgt weiter:

$$\underline{B} = \underline{B}_0 \cdot e^{i\varphi} + \underbrace{\underline{B}^{\text{stat}}(\underline{r})}_{\equiv 0 \text{ o.B.dA}} \tag{1.42}$$

mit:

$$\underline{B}_0 = \frac{1}{\omega} \cdot \underline{k} \times \underline{E}_0 \tag{1.43}$$

Die Maxwell-Gleichung (1.1) ist mit diesen Bedingungen (1.41) und (1.43) erfüllt:

$$\nabla \cdot \underline{B} = -i\underline{k} \cdot \underline{B}_0 e^{i\varphi} = \frac{-i}{\omega} \underline{k} \, (\underline{k} \times \underline{E}_0) \, e^{i\varphi} = 0$$

Es bleibt noch zu untersuchen, ob auch Gleichung (1.6) für $\underline{j}^{\text{ext}} = 0$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned} -\underline{\dot{D}} + \nabla \times \underline{H} &= -i\varepsilon\varepsilon_0\omega\underline{E}_0 e^{i\varphi} - \frac{1}{\mu\mu_0}\frac{i}{\omega}\underline{k} \times (\underline{k} \times \underline{E}_0)e^{i\varphi} \\ &= \frac{-i}{\mu\mu_0\omega}\left(\frac{n^2}{c^2}\omega^2\underline{E}_0 + \underbrace{\underline{k}(\underline{k}\cdot\underline{E}_0)}_{=0} - k^2\underline{E}_0\right) \\ &= \frac{-i}{\omega\mu\mu_0}\left[\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - k^2\right]\underbrace{\underline{E}_0 e^{i\varphi}}_{\neq 0} \end{aligned}$$

Damit wir also eine nicht-triviale Lösung ($\underline{E}_0 \neq 0$) haben, muss die sogenannte *Dispersionsrelation* erfüllt sein:

$$\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - k^2 = 0 \tag{1.44}$$

Als Fazit erhalten wir, dass ebene monochromatische Wellen:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i\varphi} \quad \text{und} \quad \underline{B} = \underline{B}_0 e^{i\varphi}$$

$$\text{mit:} \quad -\varphi = \underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t \qquad kv = \omega = k\frac{c}{n}$$

lösen die Maxwell-Gleichungen in idealen Dielektriken und sind Transversalwelen:

$$\underline{E}_0 \cdot \underline{k} = 0 = \underline{B}_0 \cdot \underline{k} = 0 = \underline{B}_0 \cdot \underline{E}_0$$

und es gilt: $|\underline{B}_0| = \frac{1}{v}|\underline{E}_0|$.

1.1.4 Polarisation ebener, monochromatischer Wellen

$\underline{k}$ bildet mit den Einheitsvektoren, die auf $\underline{k}$ senkrecht sind ($\hat{\underline{e}}_1$ und $\hat{\underline{e}}_2$) ein (rechtshändiges) Orthogonalsystem. Damit ist $\underline{E}_0$ schreibbar als:

$$\underline{E}_0 = \alpha\hat{\underline{e}}_1 + \beta\hat{\underline{e}}_2$$

mit α,$\beta \in \mathbb{C}$

1.1.4.1 lineare Polarisation

Wenn der Quotient $\frac{\alpha}{\beta}$ reell ist (bzw. $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$), dann schwingt $\underline{E}$ in fester Richtung:

$$\alpha = Ae^{i\delta} \qquad \beta = Be^{i\delta}$$

$$\Rightarrow \underline{E} = (A\hat{\underline{e}}_1 + B\hat{\underline{e}}_2)\cos(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t + \delta) \tag{1.45}$$

In allen anderen Fällen rotiert die Polarisationsrichtung mit der Phase φ

1.1.4.2 zirkulare Polarisation

Wenn der Quotient $\frac{\alpha}{\beta} = \pm i$ also rein imaginär ist, d.h. $\alpha = Ae^{i\delta}$ und $\beta = \pm iBe^{i\delta}$, dann durchläuft $\underline{E}$ einen Kreis:

$$\underline{E}_\pm = A\left(\hat{\underline{e}}_1\cos(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t + \delta) \pm \hat{\underline{e}}_2\sin(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t + \delta)\right) \tag{1.46}$$

Dies ist eine Superposition zweier senkrechter linear polarisierter Wellen.
Bei einer Umlaufrichtung im Uhrzeigersinn spricht man von links zirkular polarisiert und im Gegenuhrzeigersinn von rechts zirkular polarisiert.

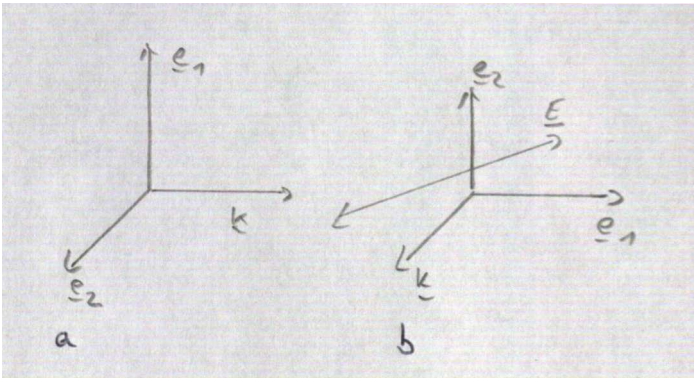


Abbildung 1.7: b) lineare Polarisation

Abbildung 1.8: zirkulare Polarisation

1.1.4.3 elliptische Polarisation

In allen anderen Fällen durchläuft $\underline{E}$ eine Ellipse und ist immer noch eine Superposition zweier linear polarisierter Wellen.

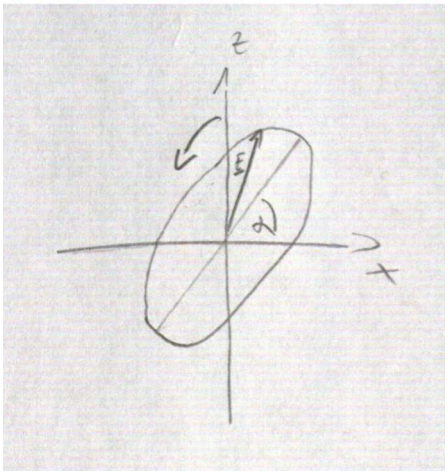


Abbildung 1.9:

1.1.5 Oszillierender Dipol als Quelle von EM-Strahlung

(Folie: Schwingkreis-Federn)
(Folie: Schwingkreise)

(Computerprog: Albert - Oszillierender Dipol)
(Folie: E-B Felder Welle)
⇒ Lichtquellen im Wesentlichen als schwingende Dipole.

1.1.6 Historisches

- **1200 v.Chr.** Cu- und Bronze - Spiegel
- **1000 n.Chr.** Parabolspiegel
- **1400 n.Chr.** Glasspiegel
- **1500 n.Chr.** Camera Obscura (DA VINCI)
- **1611 n.Chr.** KEPLER'sche Fernrohr
- **1621 n.Chr.** SNELLIUS
- **1657 n.Chr.** FERMAT
- **1665 n.Chr.**
  - Dispersion des Prismas (NEWTON)
  - HUYGENS' Prinzip Doppelbrechung
- **1700 n.Chr.** C.RÖMER ⇒ $c = 2{,}4 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$
- **1801 n.Chr.** YOUNG Interferenz
- **1849 n.Chr.** FRISEAU ($c = 315300 \frac{km}{s}$)
- **1845 n.Chr.** FARADAY
- **1860 n.Chr.** MAXWELL ($c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$)
- **1888 n.Chr.** HERTZ exp. Nachweis der EM-Strahlung
- **1900 n.Chr.** PLANCK ⇒ Hohlraumstrahlung
- **1905 n.Chr.** EINSTEIN ⇒ Photonen
- **1960 n.Chr.** LASER = Quantenoptik

1.1.7 Licht besteht aus Photonen

(Schaubild: Planck - schwarzer Hohlraum)

⇒ Quantisierung der EM-Energie

Energiequant: $\varepsilon = hf = h\frac{c}{\lambda} = \hbar\omega \qquad h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Joule Sek

Photonen haben:

- Energie $\varepsilon = h\nu$

- Impuls $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}k$ k: Wellensektor
- keine Masse $m = 0$
- Geschwindigkeit c
- Drehimpuls $L = \pm\frac{h}{2\pi} = \pm\hbar$

Photonenflüsse	**Photonen/(Sek m^2)**
Laser 10W (fokussiert auf $20 \cdot 20\mu m^2$)	10^{29}
Laser 1mW	10^{21}
Sonnenlicht	10^{18}
Hörsaal	10^{16}
Mondlicht	10^{12}
Sternenlicht	10^{10}
Höhle (Augenempfindlichkeit)	$10^{2-10^8}\frac{Photonen}{Sek}$

1.1.8 Frequenzspektrum der EM-Strahlung

(Folie: Photonen-Gesichter)
(Tabelle auf Folie - Strahlung / Frequenz)
(Folie: Kosmische Synchrotronstrahlung)
(Folie Kosmischer Nebel-Sterne) (Bilder von www.xray.mpe.mpg.de / www.iram.fr (Radioastronomie))

1.2 Mathematischer Einschub -Parsevaltransformationen

1.2.1 Motivation

Ebene, monochromatische Wellen

$$\underline{E}(\underline{r},t) = R_e\{\underline{E_0}e^{-i(\underline{k}\,\underline{r}-\omega t)}\}$$

sind nützliche spezielle Lösungen der MAXWELL-Gleichungen

In wieweit reicht die Diskussion der ebenen, monochromatischen Wellen aus, um allgemeine Felder zu beschreiben?

1.2.2 Definition

Fouriertransformation (FT)

Mit $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$, einem Vektor im d-dimensionalen Raum und sei $f(\underline{x}) \in \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrabel (abs.int.), d.h.

$$\int \mathrm{d}^d x|\ f(\underline{x})| < \infty$$

Mit $\underline{k} \in \mathbb{R}^d$ ist die (d-dim) FT definiert durch:

$$\boxed{\tilde{f}(\underline{k}) := \int \mathrm{d}^d x \; e^{i\,\underline{k}\,\underline{x}} f(\underline{x})}$$

Bemerkung: Elementare Eigenschaften

- FT ist Abbildung $f \to \tilde{f}$

$$f \to \tilde{f} = \mathrm{FT}\left[f(\underline{x})\right](\underline{k})$$

- FT ist lineare Abb. mit $\lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ konstant.

$$\mathrm{FT}[\lambda_1 f_1(\underline{x}) + \lambda_2 f_2(\underline{x})](\underline{k}) = \lambda_1 \tilde{f}_1 + \lambda_2 \tilde{f}_2$$

-

$$(\tilde{f}(\underline{k}))^* = \tilde{f}(\underline{k})^* = \int \mathrm{d}^d x \; e^{-i\underline{k}\,\underline{x}} \; f^*(\underline{x}) = \tilde{f}^*(-\underline{k})$$

- falls f reell, d.h. $f(\underline{x})^* = f(\underline{x})$

$$(\tilde{f}(\underline{k}))^* = \tilde{f}^*(\underline{k}) = \tilde{f}(-\underline{k})$$

- Verschiebungssätze:

$$\mathrm{FT}[f(\underline{x} + \underline{a})](\underline{k}) \overset{\underline{x}' = \underline{x} + \underline{a}}{=} e^{-i\,\underline{k}\,\underline{a}} \tilde{f}(\underline{k})$$

$$\mathrm{FT}[e^{i\,\underline{p}\,\underline{x}} f(\underline{x})](\underline{k}) = \tilde{f}(\underline{k} + \underline{p})$$

- Multiplikation mit $\underline{x}$ falls $\underline{x} \cdot f(\underline{x})$ absolut integrabel ist. Betrachte allgemein:

$$\mathrm{FT}[e^{i\underline{p}\underline{x}} f(\underline{x})](\underline{k}) \overset{Taylor}{=} \sum_{n=0} \frac{i^n}{n!} \int \mathrm{d}^d x (\underline{p} \cdot \underline{x})^n \; e^{i\,\underline{k}\,\underline{x}} \; f(\underline{x})$$

  Rechte Seite:

$$\tilde{f}(\underline{k}) + \underline{p} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{k}} \tilde{f}(\underline{k}) + \frac{1}{2} \left(\underline{p} \frac{\partial}{\partial \underline{k}} \right)^2 \tilde{f}(\underline{k}) + \cdots$$

  durch Vergleich:

$$\mathrm{FT}[\underline{x} \; f(\underline{x})](\underline{k}) = -i \frac{\partial \tilde{f}(\underline{k})}{\partial \underline{k}}$$

  usw. $x^n f(x)$.

Bsp.: Gauß-Funktion $f_G(\underline{x}) = e^{-\gamma x^2}$ mit Re $\gamma > 0$

$$\begin{aligned}\tilde{f}_G(\underline{k}) &= \int \mathrm{d}^d x e^{i\,\underline{k}\,\underline{x}} e^{-\gamma\,x^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 e^{ik_1x_1-\gamma x_1^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 e^{ik_2x_2-\gamma x_2^2} \cdots \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_d e^{ik_dx_d-\gamma x_d^2}\end{aligned}$$

Nebenrechnung: (Eindimensional)

$$f_{G1}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{ikx-\gamma x^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial k}\tilde{f}_{G1}(k) &\overset{abs.int.}{=} \int \mathrm{d}x\ \partial_k\ e^{ikx}\ f_{G1}(x) \\ &= \int \mathrm{d}x\, i\, x\, e^{ikx-\gamma x^2} \\ &= \int dx\ i \left(\underbrace{\frac{1}{-2\gamma}\partial_x\ e^{ikx-\gamma x^2}}_{=*} - \frac{-1}{2\gamma}\, i\, k\, e^{ikx-\gamma x^2} \right)\end{aligned}$$

* gibt integriert 0,da $\lim_{|x|\to\infty} e^{ikx-\gamma x^2} \to 0$.

$$= \frac{-k}{2\gamma}\tilde{f}_{G1}(k)$$

$$\Leftrightarrow \partial_k\tilde{f}_{G1}(k) + \frac{k}{2\gamma}\tilde{f}_{G1}(k) = 0$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung:

$$\tilde{f}_{G1}(k) = Ae^{\frac{-k^2}{4\gamma}}$$

$$\text{wobei} \quad A = \tilde{f}_{G1}(k=0) = \int_{-a}^{a} dx e^{-\gamma x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$$

Multidimensional:

$$\Rightarrow \tilde{f}_G(\underline{k}) = \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{k^2}{4\gamma}}$$

Dies ist wiederum eine Gauß-Glocke (speziell!)
(Bild Gauß-Glocken)

Sei $f(\underline{x})$ nach x_i (partiell) differenzierbar, und sei $\frac{\partial f(x)}{x_i} = \partial_{x_i} f(\underline{x}) = \partial_i f(\underline{x})$ abs.int., dann

$$\mathrm{FT}[\partial_i f(\underline{x})](\underline{k}) = -i\, k_i \tilde{f}(\underline{k})$$

Bew.:

$$\int \mathrm{d}^d x\, e^{i\,\underline{k}\,\underline{x}}\, \frac{\partial f(\underline{x})}{x_i} \overset{part.int.}{=} -\int \mathrm{d}^d x\, f(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\, e^{i\underline{k}\underline{x}}$$

+Randterme im "unendlichen" $= 0$, da $f(|x| \to \infty) \to 0$ weil f abs.int.

$$= -i\, k_i \int \mathrm{d}^d x\, e^{i\,\underline{k}\,\underline{x}} f(\underline{x}) \qquad q.e.d.$$

Bem.: Analog gilt:

$$\mathrm{FT}[\partial_i \partial_j\, f(\underline{x})](\underline{k}) = (-ik_i)(-ik_j)\tilde{f}(k) \qquad \text{usw.}$$

- **Nutzen der FT:**
  Differentiation (nach $\underline{x}$) im Urbildraum wird Multiplikation (mit $\underline{k}$) im FOURIERraum.

-

$$\begin{aligned}
\mathrm{FT}\left[\mathrm{grad} f = \nabla f\right] &= -i\,\underline{k}\,\tilde{f} \\
\mathrm{FT}\left[\mathrm{div}\underline{E} = \nabla \cdot \underline{E}\right] &= -i\,\underline{k} \cdot \underline{\tilde{E}} \\
\mathrm{FT}\left[\mathrm{rot}\underline{E} = \nabla \times \underline{E}\right] &= -i\underline{k} \times \underline{\tilde{E}} \\
\mathrm{FT}\left[\Delta f = \nabla^2 f\right] &= -k^2 \tilde{f}
\end{aligned}$$

1.2.3 Faltungstheorem

Sei

$$h(\underline{x}) = \int \mathrm{d}^d y\, g(\underline{x} - \underline{y})\, f(\underline{y})$$

h heisst Faltung von g mit f (im Ortsraum)

$$h(\underline{x}) \overset{\underline{y}' = \underline{x} - \underline{y}}{=} \int \mathrm{d}^d \underline{y}'\, g(\underline{y}')\, f(\underline{x} - \underline{y}')$$

$$\text{dann gilt :} \qquad \tilde{h}(\underline{k}) = \tilde{g}(\underline{k})\, \tilde{f}(\underline{k})$$

Eine Faltung wird Produkt im FT-Raum.

Bew.:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(\underline{k}) &= \int \mathrm{d}^d y\, e^{i\,(\underline{k}\,\underline{x} - \underline{k}\,\underline{y})}\, g(\underline{x} - \underline{y})\, e^{i\,\underline{k}\,\underline{y}}\, f(\underline{x}) \\
&= \int \mathrm{d}^d \zeta\, e^{i\,\underline{k}\underline{\zeta}} g(\zeta) \int \mathrm{d}^d\, \underline{y}\, e^{i\,\underline{k}\,\underline{y}}\, f(\underline{y})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{wobei: } \underline{\zeta} &= \underline{x} - \underline{y} \qquad \text{da Integrationsgrenzen "}\infty\text{" sind} \\
&= \tilde{g}(\underline{k})\, \tilde{f}(\underline{k})
\end{aligned}$$

Bem.: Zweiter Nutzen der FT, siehe Dispersion später

1.2.4 Umkehrung der FT und Parseval-Gleichung

Idee: $\tilde{f}_G\,(\underline{u}-\underline{w},\gamma\to 0)$ als "δ-Funktion" mit Faltung verwenden.

Hilfs-Satz:

$$\int \mathrm{d}^d u\,\tilde{f}_1(\underline{u})\,f_2(\underline{u}) = \int \mathrm{d}^d u\,f_1(\underline{u})\,\tilde{f}_2(\underline{u})$$

Bew: LS (linke Seite)

$$\int \mathrm{d}^d u \int \mathrm{d}^d v\; e^{i\underline{u}\,\underline{v}}\,f_1(\underline{v})\,f_2(\underline{u}) = \int \mathrm{d}^d v\; f_1(\underline{v}) \underbrace{\int \mathrm{d}^d v\; e^{i\underline{u}\,\underline{v}}\,f_2(\underline{u})}_{\tilde{f}_2(\underline{v})}$$

Damit

$$\tilde{f}_G(\underline{u}-\underline{w}) = FT[e^{-i\underline{v}\,\underline{w}}\,f_G(\underline{v})]\,(\underline{u})$$

folgt für

$$I := \int \mathrm{d}^d u \tilde{f}_G(\underline{u}-\underline{w})\,g(\underline{u})$$

$$I = \int \mathrm{d}^d V\;\tilde{g}(\underline{v})\,e^{-i\underline{v}\,\underline{w}}\,f_G(\underline{v}) \xrightarrow{\gamma\to 0} \int \mathrm{d}^d v\;e^{-i\underline{v}\,\underline{w}}\,\tilde{g}(\underline{v})$$

$$I = \int \mathrm{d}^d u\;\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{d}{2}}\;e^{-(\underline{u}-\underline{w})^2\frac{1}{4\gamma}}\;g(\underline{u})$$

Nach der Taylor-Entwicklung von $g(\underline{u}) = g(\underline{w}) + (\underline{u}-\underline{w})\,\frac{\partial g}{\partial \underline{u}}\big|_{\underline{w}} + \cdots$ ergibt sich

$$I = g(\underline{w}) \underbrace{\int \mathrm{d}^d\;\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{d}{2}}\;e^{-(\underline{u}-\underline{w})\frac{2}{4\gamma}}}_{(*)} + \sqrt{\gamma}\underbrace{\int \mathrm{d}^d z\,\pi^{\frac{d}{2}}\,e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\underline{z}\frac{\partial y}{\underline{u}}\Big|_{\underline{w}}}_{\sigma} + \cdots$$

$$\text{Skaliere}\quad \underline{z} = \frac{(\underline{u}-\underline{w})}{\sqrt{\gamma}}$$

$$(*) = (2\pi)^{\frac{d}{2}}\,(4\pi\gamma)^{\frac{d}{2}} = (2\pi)^d$$

für $\gamma\to 0$ gilt also:

$$I = (2\pi)^d\;g(\underline{w}) + \underbrace{\sigma\cdot\sqrt{\gamma}}_{\to 0} + \cdots$$

damit folgt das Umkehrtheorem:

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{f}(\underline{k}) &= \int \mathrm{d}^d x \; e^{i\,\underline{k}\,\underline{x}} \; f(\underline{x}) \\ f(\underline{x}) &= \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \; e^{-i\,\underline{k}\,\underline{x}} \; \tilde{f}(k) \end{aligned}} \tag{1.47}$$

Bemerkung: $f \to \tilde{f}$ ist eineindeutige Abbildung mit

$$\begin{aligned} \tilde{f} &\overset{FT}{\to} f \\ FT^{-1}: \quad f &= \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \; e^{-i\,\underline{k}\,\underline{x}} \; \tilde{f}(k) \end{aligned}$$

1.2.5 Anwendung: Allgem. Lsg. der MG im idealen ungeladenen Dielektrikum

MG:

$$\left.\begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{E} = 0 \\ \nabla \cdot \underline{B} = 0 \\ \nabla \times \underline{B} = \frac{n^2}{c^2}\,\dot{\underline{E}} \\ \nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}} \end{array}\right\} \; \begin{array}{c} FT \\ \underline{r} \to \underline{k} \end{array} \; \left\{\begin{array}{l} -i\underline{k} \cdot \tilde{\underline{E}}(\underline{k},t) = 0 \\ -i\underline{k} \cdot \tilde{\underline{B}}(\underline{k},t) = 0 \\ -i\underline{k} \times \tilde{\underline{B}}(\underline{k},t) = \left(\frac{n}{c}\right)^2 \dot{\tilde{\underline{E}}}(\underline{k},t) \\ -i\underline{k} \times \tilde{\underline{E}}(\underline{k},t) = -\dot{\tilde{\underline{B}}}(\underline{k},t) \end{array}\right. \tag{1.48}$$

Fazit: Im unbegrenzten, idealen Dielektrikum sind die Felder festgelegt durch $\underline{E}(\underline{r},t=0)$ und $\underline{B}(\underline{r},t=0)$.
Die allgemeine Lösung ist eine Superposition ebener, monochromatischer Wellen.

Bew:

$$\tilde{\underline{E}}(\underline{k},t=0) = \int \mathrm{d}^3 r \; e^{i\,\underline{k}\,\underline{r}} \; \underline{E}(\underline{r},t=0)$$

sind bekannt nach Vorgabe. Die Gleichungen (1.48) sind gewöhnliche DGL in der Zeit. $\overset{AnalysisIII}{\Longrightarrow}$ $\tilde{\underline{E}}(\underline{k},t)$ und $\tilde{\underline{B}}(\underline{k},t)$ (für $t \geq 0$) sind eindeutig aus den Anfangswerten bestimmt. Danach FT^{-1} ergibt

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r},t \geq 0) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \; e^{-i\,\underline{k}\,\underline{r}} \; \tilde{\underline{E}}(\underline{k},t) \\ \text{analog} \quad \underline{B}(\underline{r},t \geq 0) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \; e^{-i\,\underline{k}\,\underline{r}} \; \tilde{\underline{B}}(\underline{k},t) \end{aligned}$$

Bem: Wie in §1.1.3 zuvor gezeigt, gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{E}}(\underline{k},t) &= e^{i\,\omega\,t} \; \tilde{\underline{E}}(\underline{k},t=0) \\ \tilde{\underline{B}}(\underline{k},t) &= e^{i\,\omega\,t} \; \tilde{\underline{B}}(\underline{k},t=0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \underline{k} \cdot \tilde{\underline{E}}(\underline{k},t=0) = 0 = \underline{k} \cdot \tilde{\underline{B}}(\underline{k},t=0) \\ \tilde{\underline{B}}(\underline{k},t=0) \cdot \tilde{\underline{E}}(\underline{k},t=0) = 0 \end{aligned}$$

und

$$\left|\underline{\tilde{B}}(\underline{k},0)\right| = \frac{n}{c}\left|\underline{\tilde{E}}(\underline{k},0)\right|$$

Rechenregeln für FT gelten auch für weitere Funktionenklassen (z.B. auch die DIRAC-δ-Fkt.).

1.3 Brechungsindex

1.3.1 Makroskopische Definition

Aus WG im Vakuum

$$\Rightarrow \text{Lichtgeschwindigkeit} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

Aus WG im Dielektrikum

$$\Rightarrow \text{Lichtgeschwindigkeit} \qquad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

oder

$$\boxed{v = \frac{c}{n}}$$

Dabei gilt für den Brechungsindex: $n = \sqrt{\epsilon\mu} \approx \sqrt{\epsilon}$ für "nichtmagnetische" d.h. diamagnetische Materie.

Das bedeutet, die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium ist um n kleiner (für $n > 1$) als im Vakuum.

(Bild Welle durch Dielektrikum)

Wegen $\omega = v\,k_{med}$ (Dispersionsrelation der em-Welle) bzw. ??????? ist die Wellenlänge im Medium um n kleiner, bei gleichem v!

$$\boxed{\lambda_{med} = \frac{\lambda_{vak}}{n}\ ; \quad k_{med} = n \cdot k_{vak}}$$

Wie kann man das mikroskopisch/physikalisch verstehen?
Dazu erinnern wir uns zunächst daran, dass obige "Lichtgeschwindigkeit" die Geschwindigkeit eines bestimmten Punktes der Welle, z.B. des Nulldurchgangs ist.
$\Rightarrow$ Es ist die "Phasengeschwindigkeit"

$$v = \frac{\omega}{k_{med}}\ ; \quad c = \frac{\omega}{k_{vak}}$$

(Bild Phasenverschiebung)

Bem.: Notation der Optiker: $v = c\ ; \quad c = c_0$

Was passiert mit der Phase der Welle im Medium?
(Bild Welle trifft auf Wand)

(Abb?????) zeigt den einfachsten Fall der senkrecht auf eine ebene Oberfläche des Mediums einfallende Welle, die normal zur Zeichenebene linear polarisiert ist.

Das E-Feld bewirkt eine Polarisation der Atome in der ersten Reihe

$$P(t) = \alpha\, E_e t$$

(α: *Polarisierbarkeit*) d.h. jedes Atom wird ein schwingender elektrischer Dipol. Alle diese Dipole schwingen bei der Frequenz ω in Phase!

1.3.2 Huygens'sches Prinzip

(Bild HUYGENS)

Eine (beliebig vorgegebene) Wellenfläche pflanzt sich so fort, als ginge von jedem Punkt der Wellenfläche eine Kugelwelle aus. Die Umhüllende aller dieser Kugelwellen (Superposition) ergibt die neue Wellenfläche.

1.3.3 Mikroskopisches Bild des Brechungsindex

Die Schwingenden Dipole der ersten Reihe $P(t)$ (Siehe Abb.) strahlen ein E_1-Feld ab, das für obige Geometrie wie eine Kugelwelle aussieht. ⇒ Dies ergibt nach dem HUYGENS'schen Prinzip eine *sekundäre ebene Welle*, die in die gleiche Richtung wie die einfallende Welle weiterläuft.

Aus der Diskussion des vom Dipol abgestrahlten E-Feldes wissen wir, dass die sekundäre Welle (im Fernfeld) um 90° den treibenden Oszillatoren nacheilt. Es laufen also ab der ersten Reihe Atome zwei Wellen parallel zueinander weiter, bei gleicher Wellenlänge und gleicher Geschwindigkeit, nämlich c (!!und nicht $\frac{c}{n}$!!) aber unterschiedlicher Phase und sehr unterschiedlicher Amplitude (Sekundärwelle E_1 ist viel schwächer). (Siehe Abb.) Die durchlaufende Primärwelle erzeugt in allen weiter hinten liegenden Schichten erneute Sekundärwellen E_k (2.Schicht, 3.Schicht,...,k.Schicht) die natürlich alle mit der 1. Sekundärwelle ($k = 1$) in Phase sind. Die Überlagerung der Primärwelle mit der Sekundärwelle ergibt eine *leicht Phasenverschobene Gesamtwelle*, die im Beispiel (Abb.) der 90° nachlaufenden Welle nachläuft. Die zunehmende Amplitude der Sekundärwelle erzeugt also eine zunehmende Phasenverschiebung der Resultierenden insgesamt.

$$E = E_e + \sum_k E_k$$

$$\begin{aligned}
\text{Primärwelle:} \qquad E_e &= E_{e0}\, e^{i(\omega t - k z_{vak})} = E_{e0}\, e^{i\omega(t-\frac{z}{c})} \\
\text{Resultierende Welle:} \qquad E &= E_0\, e^{i\omega\left[t-(n-1)\frac{\Delta z}{c}-\frac{z}{c}\right]} \\
&= \underbrace{E_0\, e^{i\omega(t-\frac{z}{c})}}_{(*)}\ \underbrace{e^{-i\omega(n-1)\frac{\Delta z}{c}}}_{(**)}
\end{aligned}$$

(*): Ungestörte Welle

(**): Einfluss des Mediums $e^{-i\varphi}$

Der Ausdruck $(n-1)\frac{\Delta z}{c}$ stellt die *kumulierte Laufzeit-Verzögerung* der resultierenden WG dar. $v = \frac{c}{n}$ im Medium.

Falls $n - 1 \ll 1$ Gase haben wir $e^{-i\varphi} \approx 1 - i\varphi \ldots$

$$\Rightarrow \qquad E = E_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)} \underbrace{- i\omega\,(n-1)\,\frac{\Delta z}{c}\, e^{i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}}$$

$$= \qquad E_e \qquad + \qquad \sum_k E_k$$

1.3.4 Lorentz-Modell zur Dispersion $n(\lambda)$

Jedes Atom reagiert auf ein anregendes E-Feld wie ein gedämpfter harmonischer Oszillator mit äußerer treibender Kraft.

(Bild: Atom-Harm.Oszillator)

$$\boxed{m\,\ddot{x} + b\,\dot{x} + D\,x = -e\,E_0\,e^{i(\omega t - kz)}}$$

$\gamma = \frac{b}{m} \longrightarrow$ Dämpfungskonstante; $\qquad \frac{D}{m} = \omega_0^2 \longrightarrow$ Resonanzfrequenz

Mit dem Lösungsansatz $x(t) = x_0\, e^{i\omega t}$ am Ort $z = 0$

$$\Rightarrow \qquad x_0 = -\frac{e\,\frac{E}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

$$x(t) = \frac{e\,\frac{E_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2\omega^2}}\, e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$\tan\varphi = -\frac{\gamma\,\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Das Feld des abstrahlenden Dipols $p = -e\,x(t)$ im Abstand r (siehe IK II) lautet:

$$E_D = -\frac{e\,\omega^2\,x_0}{4\pi\,\epsilon_0\,c^2\,r}\, e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}$$

Beiträge aller $(\Delta z \int N\,\mathrm{d}A)$ Dipole in einer Schicht der Dicke Δz bei z_0 in P:
(Bild: Dipol-Abstand)

$$E(z) = -\frac{e\,\omega^2\,x_0}{4\pi\,\epsilon_0\,c^2}\,e^{i\omega t}\,\Delta z\int N\frac{e^{-i\omega\frac{r}{c}}}{r}\,2\pi\,\rho\,\mathrm{d}\rho$$
$$r^2 = z^2+\rho^2\,;\qquad r\,\mathrm{d}r = \rho\,\mathrm{d}\rho$$
$$\Rightarrow \int_{r=z}^{\infty} N\,e^{-i\omega\frac{r}{c}}\,\mathrm{d}r = -\frac{c}{i\omega}\,\left[N\,e^{-i\omega\frac{r}{c}}\right]_z^{\infty}$$

$N(\rho)\to 0$ für $\rho\to\infty$:

$$\Rightarrow \qquad E(z) = \frac{i\,\omega\,e\,x_0\,N}{2\,\epsilon_0\,c}\,e^{i\omega(t-\frac{z}{c})}$$
$$\overset{x_0}{\Rightarrow} \qquad E(z) = -i\omega\,\frac{\Delta z}{c}\,\frac{N\,e^2}{2\,\epsilon_0\,m\,[(\omega_0^2-\omega^2)+i\omega\gamma]}\,E_0\,e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}$$
$$\equiv -i\omega\,(n-1)\,\frac{\Delta z}{c}\,E_0\,e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{n = 1+\frac{N\,e^2}{2\,\epsilon_0\,m\,[(\omega_0^2-\omega^2)+i\omega\gamma]}} \qquad \text{n=n}(\omega)\text{: "Dispersion"} \qquad (1.49)$$

Bem:

- n ist komplex!
- n nimmt mit der Atomdichte (N) zu
- $n = n(\lambda)$ Dispersion durch Resonanz bei ω_0

(Bild Resonanz)
Das Verhalten der Phase und Amplitude des Oszillators ist in Abb.??????? dargestellt.

Einige Zahlenbeispiele:
(Tabellen)

1.3.5 Absorption und Imaginärteil von n

Die Dispersionsformel für $n(\omega)$ (1.49) kann umgeschrieben werden:

$$n = 1+\frac{N e^2\,(\omega_0^2-\omega^2)-i\omega\gamma}{2\,\epsilon_0\,m\,(\omega_0^2-\omega^2)+\omega^2\gamma^2}$$
$$= n' - i\kappa$$

($k_0 = \frac{\omega}{c}$)

$$\Rightarrow \qquad E(z) = E_0\,\underbrace{e^{-\omega\kappa\frac{\Delta z}{c}}}_{(*)}\cdot e^{i\omega(n'-1)\frac{\Delta z}{c}}\cdot e^{i(\omega t-k_0 z)}$$

(*): reell, Abnahme der Amplitude; Absorptionslänge $\frac{c}{\omega\kappa}$

Da die Intensität $I = c\,\epsilon_0\,E^2$ ist, folgt $I(z) = I_0\,e^{-\alpha\Delta z}$

$$\boxed{\alpha = \frac{4\,\pi\,\kappa}{\lambda_0} = 2\,k_0\,\kappa} \qquad \alpha\text{: "Absorptionskoeffizient"}$$

Der Imaginärteil von n bestimmt die Absorption!

Dispersionsrelationen:

$$\boxed{n' = 1 + \frac{N\,e^2}{2\,\epsilon_0\,m}\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

$$\boxed{\kappa = \frac{N\,e^2}{2\,\epsilon\,m}\,\frac{\gamma\,\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \gamma^2\omega^2}}$$

1.4 Lichtausbreitung in optisch anisotropen Medien

1.4.1 Überblick

Bisher haben wir in unseren Betrachtungen den vektoriellen Charakter der elektromagnetischen Wellen vernachlässigt, da wir den Brechungsindex n als isotrop angesehen haben. Im allgemeinen Fall hängt n allerdings von der Richtung des elektrischen Feldvektors ab. Das bedeutet n ist eine Funktion des Polarisationszustandes.
Der allgemeine Polarisationszustand (wie in Abbildung 1.10) gezeigt, ist elliptisch. Beim

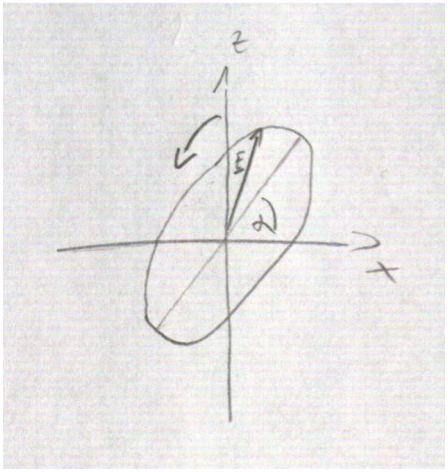


Abbildung 1.10: Polarisatioinszustand

von uns betrachteten Fall ist die Orientierung der Ellipse in der (x,z)-Ebene und die Welle breitet sich in y-Richtung aus.
Im Vakuum gilt:

$$E_x = E_{x_0} \cdot e^{i(ky-\omega t)}$$
$$E_z = E_{z_0} \cdot e^{i(ky-\omega t+\Delta\varphi)}$$

dabei stellt $\Delta\varphi$ die Phasenverschiebung zwischen der x und der y Komponente dar. Für die Orientierung der Ellipse, sprich für den Winkel der großen Hauptachse zur x-Achse gilt:

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2E_{z_0} \cdot E_{x_0} \cos\Delta\varphi}{E_{x_o}^2 - E_{z_0}^2}} \tag{1.50}$$

Der Phasenunterschied $\Delta\varphi$ bestimmt also die ***Bauchigkeit der Ellipse***.
Dabei gibt es folgende Spezialfälle der Polarisation:

- $\Delta\varphi = 0$: linear polarisiertes Licht
- $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$: rechts zirkular polarisiertes Licht
- $\Delta\varphi = \pi$: linear polarisiertes Licht, senkrecht zum Fall $Delta\varphi = 0$
- $\Delta\varphi = \frac{3}{2}\pi$: links zirkular polarisiertes Licht

Die vier Parameter $\begin{pmatrix} \alpha \\ E_{x_0} \\ E_{z_0} \\ \Delta\varphi \end{pmatrix}$ beschreiben den Polarisationszustand vollständig.
Betrachten wir zunächst ein isotropes Medium, so wird k zu $n \cdot k$, da aber n isotrop ist, ändert sich nichts am Polarisationszustand der Welle beim Durchgang durch das Medium.
Im allgemeinen Fall kann, wie in Abbildung (1.11) dargestellt, z.B. der Realteil des

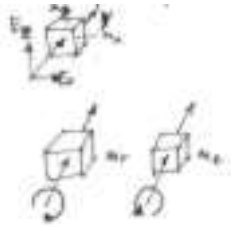


Abbildung 1.11: anisotroper Brechungsindex

Brechungsindex anisotrop sein. Für einen anisotropen Brechungsindex ergeben sich unterschiedliche Werte für die Komponenten in x,y und z Richtung (n_x,n_y,n_z). Im hier veranschaulichten Fall interessieren uns nur n_x und n_z, da sich bei dem vorher beschriebenen elliptischen Polarisationszustand die Welle gerade in y-Richtung ausbreitet.
Es gelten folgende Bezeichnungen:

- **uniaxiale Doppelbrechung:**

$$n_x = n_y \neq n_z$$

- **biaxialer Fall:**[1]

$$n_x \neq n_y \neq n_z$$

- **zirkuläre Doppelbrechung:**

$$n_r \neq n_l$$

Auch der Imaginärteil des Brechungsindexes kann anisotrop sein, dann spricht man von ***anisotroper Absorption***:

- **linearer Dichroismus:**

$$\kappa_x = \kappa_y \neq \kappa_z$$

- **biaxialer linearer Dichroismus:**

$$\kappa_x \neq \kappa_y \neq \kappa_z$$

- **zirkularer Dichroismus:**

$$\kappa_l \neq \kappa_r$$

In all diesen Fällen (bis auf einige Spezialfälle) ändern sich beim Durchgang einer elektromagnetischen Welle durch das Medium alle vier Komponenten des Polarisationszustands.

Weiter unten diskutieren wir genauer den Fall der Doppelbrechung ohne Absorption.

Zunächst betrachten wir die Phasenverschiebung zwischen E_x und E_z, für den Fall, dass $\Delta\varphi$ nur auf Grund des anisotropen Brechungsindex zustande kommt:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x_o} \cdot e^{i(n_x k y - \omega t)} \\ E_z &= E_{z_0} \cdot e^{i(n_z k y - \omega t)} \\ \Rightarrow \Delta\varphi &= n_x k y - \omega t - n_z k y + \omega t \\ \Leftrightarrow &= \underbrace{(n_z - n_x)}_{:=\Delta n} \cdot k y \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \Delta\varphi = \Delta n \cdot \frac{2\pi}{\lambda} y} \tag{1.51}$$

Der Phasenunterschied $\Delta\varphi$ zwischen E_x und E_y ist also **linear vom Ort y abhängig.** Die Bauchigkeit der Welle und damit ihr Polarisationszustand ändert sich mit y. Dies gilt bis auf die Spezialfälle, in denen die Welle linear entlang speziellen Richtungen polarisiert ist ($E_{x_0} = 0$ oder $E_{z_0} = 0$)

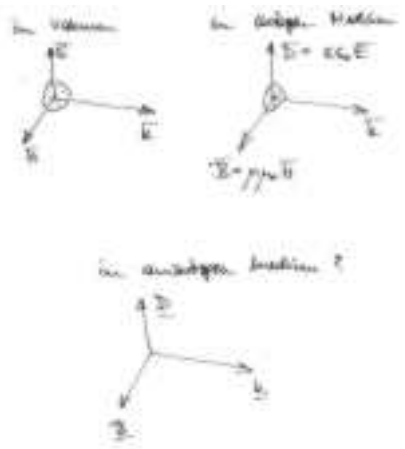


Abbildung 1.12: Lage der Welle

1.4.2 Brechungsindexellipsoid

In anisotropen Median kann man mit den MAXWELL-Gleichungen eine Aussage über die Lage von $\underline{E}$ und $\underline{H}$ im Vergleich zu $\underline{D}$ und $\underline{B}$ machen. Dazu erinnern wir uns an die MAXWELL-Gleichungen im FOURIERraum:

$$i\underline{k} \cdot \underline{B} = 0 \qquad \rightarrow \underline{B} \perp \underline{k} \tag{1.52}$$

$$i\underline{k} \cdot \underline{D} = 0 \qquad \rightarrow \underline{D} \perp \underline{k} \tag{1.53}$$

$$i\underline{k} \times \underline{H} = -i\omega \underline{D} \tag{1.54}$$

$$i\underline{k} \times \underline{E} = i\omega \underline{B} \tag{1.55}$$

Außerdem ist für $\mu = 1$ $\mu_0 \underline{H} = \underline{B}$, also ist $\underline{H}$ parallel zu $\underline{B}$.
Aus den MAXWELL-Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} &\overset{1.55}{\Rightarrow} \underline{k} \times (\underline{k} \times \underline{E}) = \mu_0 \omega \underline{k} \times \underline{H} \\ &\overset{1.54}{=} -\mu_0 \omega^2 \underline{D} \end{aligned}$$

Damit erkennt man, dass $\underline{D}$ ein Vektor in der ($\underline{k}$,$\underline{E}$)-Ebene ist und senkrecht auf $\underline{k}$ steht. Um auf die Phasengeschwindigkeit zu kommen, betrachten wir:

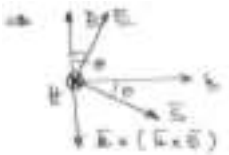


Abbildung 1.13: Lage der Welle in anisotropen Medien

$$\begin{aligned} |\underline{k} \times (\underline{k} \times \underline{E})| &= k^2 E \cos\theta \\ &= \mu_0 \omega^2 D \end{aligned}$$

[1]Im biaxialen Fall findet genau genommen keine Doppelbrechung mehr statt, trotzdem findet man in der Literatur auch die Bezeichnung "biaxiale Doppelbrechung".

Damit folgt die **Phasengeschwindigkeit:**

$$\boxed{v^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{E\cos\theta}{\mu_0 D}} \tag{1.56}$$

Mit $\underline{B} \perp \underline{k}$ und $\underline{B} \parallel \underline{H}$ folgt die in Abbildung eingezeichnete Lage von $\underline{H}$. Somit ist der Poyntingvektor $\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$ nicht parallel zu $\underline{k}$. Dies bedeutet aber, dass **die Energie der Welle in eine andere Richtung, als die Ausbreitungsrichtung der Welle $\underline{k}$ fließt.**
Die Beziehung $\underline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \underline{E}$ bleibt erhalten, sofern man $\varepsilon = \hat{\varepsilon}$ als Tensor ansieht, weil ja $\underline{D}$ nicht mehr parallel zu $\underline{E}$ ist.
Der **dielektrische Tensor** lautet:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{1.57}$$

Dieser kann durch geschickte Wahl des Koordinatensystems diagonalisiert werden (vgl. Algebra Skripte oder Bücher):

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \tag{1.58}$$

Es gelten folgende Bezeichnungen:

- **biaxial:**

$$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$$

- **uniaxial:**

$$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3$$

  bzw:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$$

Invertiert man $\underline{D} = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \cdot \underline{E}$, so erhält man mit:

$$\hat{\varepsilon}^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3^{-1} \end{pmatrix} \tag{1.59}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \underline{E} = \hat{\varepsilon}^{-1} \tag{1.60}$$

Aus der Forderung, dass die Energiedichte der Welle im Medium konstant sein soll, d.h. $\underline{E} \cdot \underline{D} = const \equiv 1$ folgt durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \underline{E} \cdot \underline{D} &= \varepsilon_0 \\ \underline{D} \cdot \hat{\varepsilon}^{-1} \underline{D} &= \varepsilon_0 \\ \underline{D} \varepsilon_0^{-\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3^{-1} \end{pmatrix} \underline{D} \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{2}} &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{D_x^2\varepsilon_0^{-1}}{\varepsilon_1}+\frac{D_y^2\varepsilon_0^{-1}}{\varepsilon_2}+\frac{D_z^2\varepsilon_0^{-1}}{\varepsilon_3}} \tag{1.61}$$

Dies ist die *Ellipsengleichung* für $\underline{D}$. Die Achsenlängen des Ellipsoiden aus Abbildung

(1.4.2) sind $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0}$,$\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_0}$,$\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_0}$.
Der Brechungsindex eines biaxial optisch anisotropen Mediums hat die Form eines Ellipsoiden mit den Hauptachsen n_1,n_2 und n_3.

$$\boxed{\frac{n_x^2}{n_1^2}+\frac{n_y^2}{n_2^2}+\frac{n_z^2}{n_3^2}=1} \tag{1.62}$$

1.4.3 Lichtausbreitung in uniaxialen Kristallen

Wir behandeln hier den einfachsten nicht-trivialen Fall, das bedeutet:

$$n_1 = n_2 \neq n_3$$

Der Brechungsindex ist also rotationssymmetrisch um die "3" Achse, die auch "optische Achse" genannt wird. Ein Beispiel hierfür ist "*Kalkspalt*" $CaCO_3$.

Die Kristallstruktur sowie die Lage der optischen Achse beim Kalkspalt ist in Abbildung (1.15) gezeigt.

Offenbar wegen der 3-zähligen Symmetrie ist der Brechungsindex in der Ebene senkrecht zur optischen Achse isotrop. Dies spiegelt sich wider in der Form der Kristalle. Allerdings folgt ein tieferes Verständnis darüber erst in der Festkörperphysik.
O.B.d.A. kann das Brechungsindexellipsoid mit der "3"-Achse parallel zur z-Achse gelegt werden. Außerdem legen wir den $\underline{k}$-Fektor der Welle in die (z,y)-Ebene, mit dem Winkel θ zur z-Achse. Da $\underline{D} \perp \underline{k}$, liegen alle möglichen Polarisationszustände in der zu $\underline{k}$ senkrechten Ebene, der Polarisationsvektor $\underline{D}$ liegt auf einer Ellipse.
Im Folgenden wollen wir einige Spezialfälle behandeln:

1. $\underline{k} \parallel \underline{z}$ Hier liegt $\underline{D}$ in der (x,y)-Ebene: *Kreis*

2. $\underline{k} \parallel \underline{y}$ In diesem Fall liegt $\underline{D}$ in der (x,z)-Ebene: *maximal gestreckte Ellipse*, die sich aus dem Schnitt dieser Ebene mit dem Ellipsoid ergibt

3. $\underline{D} = (D_x,0,0)$ Der Brechungsindex ist unabhängig vom Winkel θ

4. $\underline{D} = (0,D_y,D_z)$ beliebig

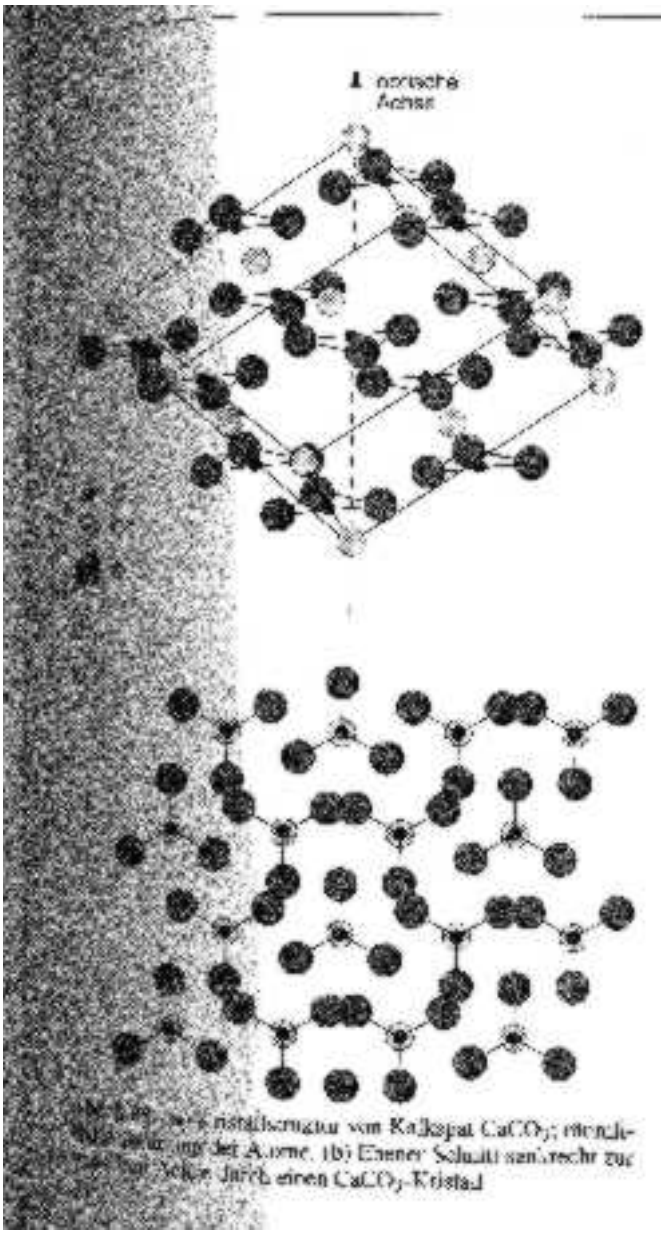


Abbildung 1.14: Kristallstruktur und Lage der opt. Achse beim Kalkspalt

Für den ersten Fall ($\underline{k} \parallel \underline{z}$) ist der Brechungsindex $n_o^2 = n_x^2 + n_y^2 = n_1^2 + n_2^2$ konstant. Dabei steht o für den **ordentlichen Strahl**. n_0 ist unabhängig von der Richtung von $\underline{D}$ eine Konstante. Ferner ist $\underline{D} \parallel \underline{E}$. Der Polarisationszustand ändert sich also nicht beim Durchgang durch das Medium. Diese Richtung definiert die Richtung der optischen Achse. Es gilt:
Ein Strahl der sich entlang der optischen Achse bewegt, ändert seine Polarisation nicht.

Im zweiten Fall ($\underline{k} \parallel \underline{y}$) hängt n von der Richtung von $\underline{D}$ ab:

- Für $\underline{D} = (0,0,D_z)$ gilt $n = n_3$. Die Polarisation bleibt erhalten und es gilt $\underline{E} \parallel \underline{D}$.

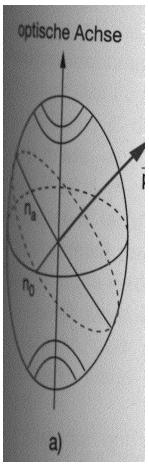


Abbildung 1.15: Brechungsindexellipsoid beim Kalkspalt

- Für $\underline{D} = (D_x,0,0)$ ist $n = n_1$. Die Polarisation bleibt ebenfalls erhalten und wieder ist $\underline{E}$ parallel zu $\underline{D}$.

- Für $\underline{D} = (D_x,0,D_z)$ ist $\underline{E}$ nicht mehr parallel zu $\underline{D}$, die Polarisation ändert sich!

Abbildung 1.16:

Dieser Fall ist in Abbildung (1.16) veranschaulicht.

Im dritten Fall, ist gerade:

$$\underline{D} = (D_X,0,0)$$
$$\underline{E} = (E_x,0,0)$$

Der Brechungsindex ist $n = n_1 = n_o$ für alle θ Werte.
Dies ist der **ordentliche Strahl**. Genau genommen gibt es beliebig viele Richtungen des ordentlichen Strahls $\underline{k}$. Als solchen festgelegt, wird ein Strahl durch seine **Polarisation senkrecht zur optischen Achse, die sich nicht ändert!**
Seine Ausbreitungsgeschwindigkeit $\frac{c}{n_1}$ hängt also nicht von der Richtung θ ab.

Im 4.Fall gilt:
$\underline{D} = (0,D_y,D_z)$. Die Auslenkgeschwindigkeit hängt nun von θ ab. Sie beträgt $\frac{c}{n_3}$ für $\theta = 90°$($n_a > n_1 = n_2$) und $\frac{c}{n} = \frac{c}{n_0}$ und für $\theta = 0$ und $\frac{c}{n_a}$ liegt nach Ellipsengleichungen dazwischen. Auch für diesen Strahl ändert sich der Polarisationszustand nicht. Er heißt "außerdordentlicher Strahl" (a-Strahl).

Für gegebene Richtungen von $\underline{k}$ in (z,y) außer $\underline{k} \| \underline{z}$ laufen der ordentliche Strahl (o-Strahl) und der a-Strahl mit unterschiedlicher Geschwindigkeit. Laut Snellius'schen

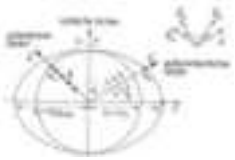


Abbildung 1.17:

Brechungsgesetz (s. nächstes Kapitel) $\frac{sin\theta_1}{sin_{\theta_2}} = \frac{n_1}{n_2}$ wird also der a-Strahl ($n_3 > n_1$) stärker gebrochen, als der o-Strahl.

$\Rightarrow$ Begriff der **"Doppelbrechung"**

- **Versuch:** Schickt man unpolarisiertes Licht durch einen Kalkspat, so entstehen zwei senkrecht zueinander polarisierte Strahlen, die wegen des SNELLIUS'schen Gesetzes in etwas unterschiedliche Richtungen laufen.

- **Erklärung:** Der Kristall ist so geschnitten, dass die optische Achse wie in Abb windschief unter einem Winkel $\varphi(= \theta)$ zur normalen der Eintrittsfläche steht. Für die ordentliche Polarisation ($\perp$zur Zeichnenebene) läuft der Strahl ungebrochen ins Medium. Seine Geschwindighkeitskomponenten $c_{\parallel} o.A. = \frac{c_0 cos\phi}{n_0}$ und $c_{\perp} o.A. = \frac{c_0}{n_0} sin\phi$ addieren sich zu $c_{0\parallel}\underline{k_{i\omega}}$. Für die außerordentliche Polarisation laufen die Komponenten $c_{\parallel}$ o.A. $= \frac{c_0}{n_0} sin\phi$ mit unterschiedlichen Werten, sodass die resultierende c_l nach größerem ϕ abgelenkt wird.

Die Tabelle aus der Abbildung gibt einige typische Werte für n_0 bzw. n_a verschiedener Substanzen.

1.4.4 Wichtige Anwendungen der Doppelbrechung

- **a) Nicolsches Prisma** (Abb. ref) a-Strahl und o-Strahl laufen in verschiedene Richtungen. Die Richtung des 0-Strahls wird stärker gebrochen, da man negative optische Doppelbrechung des Materials verwendet ($n_o > n_a$). Die Schnittwinkel des Prismas werden so gewählt, dass der o-Strahl an der inneren Oberfläche totalreflektiert wird. (siehe nächstes Kapitel)

- **b) Glan -Tompson Polarisator** (Abb ref) Hier steht die optische Achse $\perp$ zum einfallenden Strahl und in der Schnittebene der Einfallsebene. Daher laufen o-Strahl und a-Strahl parallel weiter, allerdings mit unterschiedlicher Geschwindigkeit. An der Schnittfläche am Ausgang wird die o-Welle wegen ($n - o > n_a$) noch gerade totalreflektiert, die a-Welle aber nicht.

- **c) Wollastone Prisma** (Abb. ref) o-Strahlen und a-Strahlen werden durch das zweite (doppelbrechende) Prisma räumlich getrennt.

1.5 Reflexion & Brechung des Lichts

Bisher: Wellen in unendlichen Medien.
Nun: Verhalten von em-Wellen beim Übergang zwischen Medien mit unterschiedlichen makroskopischen Materialparametern.

1.5.1 Wiederholung: Feldverhalten an Grenzflächen

MG gelten für Bereiche, wo Materialparameter ε, μ, σ etc. stetig sind. Material 1 und 2 seien beschrieben durch unterschiedliche Materialgleichungen. Eine Grenzfläche wird durch Grenzschicht mit Dicke δh, wo μ, σ ... stetig sind, genähert.

Annahme: Für $\delta \to 0$ bleiben Felder und ihre zeitliche Ableitung endlich.

- **MG 1:**

$$\nabla \cdot \underline{B} = \underline{0} \to \underline{n} \cdot (\underline{B_2} - \underline{B_1}) = \underline{0} \tag{1.63}$$

  Die Normalkomponente von $\underline{B}$ ist immer stetig

- **MG 2:**

$$\nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = \underline{0} \to \underline{n} \times (\underline{E_2} - \underline{E_1}) = \underline{0} \tag{1.64}$$

  die Tangentialkomponenten von $\underline{E}$ sind immer stetig.

- **MG 3:**

$$\nabla \cdot \underline{D} = \rho_{ext} \to \underline{n} \cdot (\underline{D_2} - \underline{D_1}) = \rho_F \tag{1.65}$$

  die Normalkomponente $\underline{\mathrm{D}}$ ist stetig, oder falls dies keine Lösung der Materialgleichungen erlaubt, springt um eine Oberflächenladung $\int_{\delta V} \mathrm{d}^3 r \rho_{ext} \to \int_A \mathrm{d}o \rho_F$

- **MG 4:**

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{j_{ext}} + \dot{\underline{D}} \to \underline{n} \times (\underline{H_2} - \underline{H_1}) = \underline{j_F} \tag{1.66}$$

  die Tangentialkomponenten von $\underline{H}$ ist stetig, oder falls dies keine Lösung der MG und Materialgleichungen erlaubt, springt um Oberflächenstrom $\int_{\partial A} \mathrm{d}o \to \int_L \mathrm{d}s j_F$

1.5.2 Energiefluss durch Grenzflächen

Wichtig für die Optik ist das Verhalten von Poyntingvektor $\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$ an Grenzflächen. Betrachte Energie in Zylinder Höhe:$= \delta h, Volumen := \delta V = \underline{A}\delta h$

$$\begin{aligned}\int_{\delta V} \mathrm{d}^3 \underline{r}(\partial_t u + \underline{j_{ext}} \cdot \underline{E}) &= -\int_{\partial \delta V} \mathrm{d}o\underline{S} \to_{\delta h \to 0} -\int_{A_1} \mathrm{d}0\underline{S_1} - \int_{A_1} \mathrm{d}0\underline{S_2} - \int_{Mantel} \mathrm{d}0\underline{S} \\ &= -\int_A \mathrm{d}o\underline{n}(\underline{S}_{inMaterie2} - \underline{S}_{inMaterie1} - \int_{Mantel} \dots \end{aligned} \tag{1.67}$$

Wiederholung

Der Energiefluss durch die Grenzfläche ist $\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$. Damit haben wir:

$$\int\limits_V \mathrm{d}^3 r(\underline{j}_{ext} \cdot \underline{E} + \dot{u}_{em}) = -\int\limits_{A_1} \mathrm{d}\underline{o} \cdot \underline{S} - \int\limits_{A_2} \mathrm{d}\underline{o} \cdot \underline{S} - \int\limits_{A_{Mantel}} \mathrm{d}\underline{o} \cdot \underline{S}$$

wobei wir für den Zylinder die Orientierung $\hat{\underline{n}} = \hat{\underline{n}}_2 = -\hat{\underline{n}}_1$ annehmen wollen. So entspricht das Volumenintegral über die Divergenz dem Fluss in den Zylinder.

Postulate für den Grenzübergang $\delta h \to 0$:

- Die Felder und ihre zeitlichen Ableitungen seien endlich
- $\int\limits_{\delta V} \mathrm{d}^3 r\, \dot{u}_{em} \to 0$ und $\int\limits_{Mantel} \mathrm{d}\underline{o} \cdot \underline{S} \to 0$ für $\delta h \to 0$
- Die Tangentialkomponente von $\underline{E}$ ist stetig.
- Oberflächenstrom entlang der Oberfläche ist möglich für spezielle Materialien, d.h

$$\int_{\delta V} \mathrm{d}^3 r\, \underline{j}_{ext} \cdot \underline{E} \to \underline{E}_{tan} \cdot \int_A \mathrm{d}o\, \underline{j}^F$$

  wobei $A = \lim A_1, A_2$ für $\delta h \to 0$ ist, typischerweise ist $\underline{j}^F$ aber 0.

Es folgt für $\delta h \to 0$:

$$-\int_A \mathrm{d}o\, \hat{\underline{n}} \cdot (\underline{S}^{(2)} - \underline{S}^{(1)}) = \underline{E}_{tan} \cdot \int_A \mathrm{d}o\, \underline{j}^F$$

Da die kleine Fläche A beliebig ist, folgt:

$$\hat{\underline{n}} \cdot (\underline{S}^{(2)} - \underline{S}^{(1)}) = -\underline{E} \cdot \underline{j}^F \tag{1.68}$$

d.h. die Normalkomponente von $\underline{S}$ ist stetig. Falls $\underline{j}^F$ zur Lösung der Maxwell- und der Materialgleichungen nötig ist, macht sie einen Sprung um die joulesche Wärme des Oberflächenstromes.

Beweis aus § 1.5.1:

$$\hat{\underline{n}} \cdot (\underline{E}^{(2)} \times \underline{H}^{(2)} - \underline{E}^{(1)} \times \underline{H}^{(1)}) = \underline{E}^{(2)} \cdot (\underline{H}^{(2)} \times \hat{\underline{n}}) - \underline{E}^{(1)} \cdot (\underline{H}^{(1)} \times \hat{\underline{n}})$$

Da die Tangentialkomponenete von E stetig ist und die Klammer jeweils tangential zur Oberfläche ist, so gilt:

$$\underline{E}_{tan} \cdot (\underline{H}^{(2)} - \underline{H}^{(1)}) \times \hat{\underline{n}} = -\underline{E}_{tan} \cdot \underline{j}^F \tag{1.69}$$

Bemerkung: Zeitlich gemittelter Energiefluss monochromatischer Wellen, d.h $\underline{E}, \underline{B} \sim e^{i\omega t}$:

$$< \underline{S} >= \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t\, \Re\{\underline{E}\} \times \Re\{\underline{H}\} \tag{1.70}$$

mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ als Periode der monochromatischen Welle.

$$< \underline{S} >= \frac{1}{4T\mu_0} \int_0^T \mathrm{d}t\, (\underline{E} + \underline{E}^*) \times (\underline{B} + \underline{B}^*) \tag{1.71}$$

Da jeweils die reinen und die komplex-konjuierten Teile beim Integrieren 0 ergeben:

$$\int_0^T \mathrm{d}t\, e^{2i\omega t} = (e^{2i\omega t} - 1) = 0 \tag{1.72}$$

ergibt sich für den Energiefluss:

$$< \underline{S} >= \frac{1}{2\mu_0} \cdot \Re\{\underline{E}^* \times \underline{B}\} \tag{1.73}$$

Für transversale ebene monochromatische Wellen mit $B = \frac{1}{\omega}\underline{k} \times \underline{E}$ und $\underline{E} \cdot \underline{k} = 0$ folgt weiterhin:

$$< \underline{S} >= \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \Re\{|\underline{E}|^2 k\} \tag{1.74}$$

1.5.3 Brechungs- & Reflexionsgesetze

Betrachten wir die Grenzfläche als eben:

Die einfallende Welle sei $\underline{E}_I$, sie habe die Phase φ_I und trete unter dem Winkel α zum Lot ein. Die reflektierte Welle sei $\underline{E}_R$, und die transmittierte Welle sei $\underline{E}_T$ mit der Phase φ_T und dem Winkel β zum Lot. Material 1 sei ein ideales Dielekrikum (z.B. Vakuum). Verwende ebene monochromatische Wellen mit den Phasen

$$\varphi_i = \omega_i t - \underline{k}_i \cdot \underline{r} \quad \text{mit} \quad i = I,R,T \tag{1.75}$$

zu den Frequenzen ω_i und dem Wellenvektor $\underline{k}_i$
Die Felder sollen in den Materialien 1 und 2 jeweils die MAXWELLgleichungen und die Materialgleichungen erfüllen und bei $z = 0$ den Stetigkeitsbedingungen von §1.5.1 genügen.

1.5.3.1 Kinematische Einschränkungen

Wegen der Stetigkeitsbedingungen, die für alle t und alle x,y an der Grenzfläche gelten, müssen die Phasen bei $z = 0$ bis auf eine additive Konstante übereinstimmen, welche in die Feldamplituden inkorporiert wird:

$$\boxed{\omega_I t - \underline{k}_I \cdot \underline{r}|_{z=0} = \omega_R t - \underline{k}_R \cdot \underline{r}|_{z=0} = \omega_T t - \underline{k}_T \cdot \underline{r}|_{z=0}} \quad (*) \tag{1.76}$$

Diese Gleichung ist nur dann für alle t erfüllt, wenn gilt:

$$\omega_I = \omega_R = \omega_T = \omega \tag{1.77}$$

d.h. die Wellen haben alle die selbe Farbe. Brechungsindizes können definiert werden über

$$k_i(\omega) = \frac{\omega}{c} n_i(\omega) \tag{1.78}$$

- **(A) Reflexion:**
  Gleichung (*) gilt nur für $\forall \underline{r} \mid_{z=0} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ falls $\underline{k}_I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{k}_R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, also die Parallelkomponentenmüssen gleich sein:

$$k_I^{\parallel} = \begin{pmatrix} k_{I,x}^{\parallel x} \\ k_{I,y}^{\parallel} \\ 0 \end{pmatrix} = k_R^{\parallel} = \begin{pmatrix} k_{R,x}^{\parallel} \\ k_{R,y}^{\parallel} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.79}$$

  Mit den Winkeln $k_I^{\parallel} = \sin\alpha k_I = \frac{\omega}{c} n_1 \sin\alpha = k_R^{\parallel} = \sin\alpha' k_R = \frac{\omega}{c} n_1 \sin\alpha'$ gilt:

$$\boxed{\sin\alpha = \sin\alpha'} \tag{1.80}$$

  Der Einfallswinkel ist also immer gleich dem Ausfallswinkel.

- **(B) Brechung:**
  Analog gilt Gleichung (*) nur für $\forall \underline{r}$, falls $\underline{k}_I^{\parallel} = \underline{k}_T^{\parallel} = \begin{pmatrix} k_{T,x}^{\parallel} \\ k_{T,y}^{\parallel} \\ 0 \end{pmatrix}$, also die Parallelkomponenten gleich sind. Falls Material 2 ein ideales isotropes Dielektrikum mit $k_T = \frac{\omega}{c} n_2$ ist, so folgt das Brechungsgesetz von Snellius

$$n_1 \frac{\omega}{c} \sin\alpha = n_2 \frac{\omega}{c} \sin\beta \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta} \tag{1.81}$$

  Mit dem relativen Brechungsindex $n = \frac{n_2}{n_1}$ gilt also:

$$\sin\alpha = n \sin\beta \tag{1.82}$$

  Für $n > 1$ ergibt sich damit $\beta < \alpha$, die Brechung erfolgt zum Lot hin, für $n < 1$ ist das Ganze umgekehrt.

- **(C) Geometrie**
  Wegen der Gleichung (*) liegen $\underline{k}_I$, $\underline{k}_R$, und $\underline{k}_T$ in einer Ebene aufgespannt durch $\underline{k}_I$ und $\underline{n} = \hat{\underline{z}}$; wählen wir das als x,z-Ebene.

1.5.3.2 Reflexions- und Transmissionskoeffizienten

Beschränkung auf den senkrechten Fall, $\alpha = 0$, alle $k_i^{\parallel} = 0$
Dispersionsrelation in beiden:

$$k_I = \frac{\omega}{c} n_1 = k_1 \tag{1.83}$$

$$k_R = \frac{\omega}{c} n_1 = -k_1 \tag{1.84}$$

$$k_T = \frac{\omega}{c} n_2 = k_2 \tag{1.85}$$

Der Ansatz transversaler ebener monochromatischer Wellen sieht folgendermaßen aus:

$$z < 0 \qquad \underline{E} = e^{i\omega t} \cdot \left[\begin{pmatrix} E_{I,x} \\ E_{I,y} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{\omega}{c}n_1 z} + \begin{pmatrix} E_{R,x} \\ E_{R,y} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{\omega}{c}n_1 z} \right] \tag{1.86}$$

Diese Superposition aus nach rechts einfallender und nach links reflektierer Welle erfüllt die MAXWELLgleichungen im Dielektrikum 1, wenn $\underline{B} = \frac{1}{\omega}\underline{k} \times \underline{E}$ und $\underline{k} \cdot \underline{E}$ gilt:

$$z < 0 \qquad \underline{B} = \frac{n_1}{c} e^{i\omega t} \cdot \left[\begin{pmatrix} -E_{I,y} \\ E_{I,x} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{\omega}{c}n_1 z} + \begin{pmatrix} E_{R,y} \\ E_{R,x} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{\omega}{c}n_1 z} \right] \tag{1.87}$$

Analog dazu soll in Material 2 gelten: Nach $+z$ laufende transversale ebene monochromatische Welle existiert mit

$$\boxed{\underline{k}(\omega) \cdot \underline{E} = 0 \quad \text{und} \quad \underline{B} = \frac{1}{\omega}(\underline{k}(\omega) \times \underline{E})} \tag{1.88}$$

Der Ansatz hierfür lautet:

$$z < 0 \qquad \underline{E} = e^{i\omega t} \cdot \left[\begin{pmatrix} E_{T,x} \\ E_{T,y} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{\omega}{c}n_2 z} \right] \quad \text{sowie} \quad \underline{B} = \frac{n_2(\omega)}{c} e^{i\omega t} \cdot \left[\begin{pmatrix} -E_{T,y} \\ E_{T,x} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{\omega}{c}n_2 z} \right] \tag{1.89}$$

Die Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche $z = 0$ lauten:

- $\underline{D}_{normal}$ stetig $\Rightarrow$ ist immer 0
- $\underline{B}_{normal}$ stetig $\Rightarrow$ ist auch immer 0
- $\underline{E}_{tan}$ stetig $\Rightarrow$ $\boxed{\underline{E}_I + \underline{E}_R = \underline{E}_T}$
- $\underline{H}_{tan} \sim \underline{B}_{tan}$ stetig $\Rightarrow$ $\boxed{n_1(\underline{E}_I - \underline{E}_R) = n_2 \underline{E}_T}$

Daraus folgen die Amplitudenfunktionen:

- Reflexionskoeffizient:

$$\boxed{R = \frac{E_R}{E_I} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - n}{1 + n}} \tag{1.90}$$

- Transmissionskoeffizient:

$$\boxed{T = \frac{E_T}{E_I} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2}{1 + n}} \tag{1.91}$$

Für die Energieflüsse gelten folgende Beziehungen:

$$< \underline{S}_I > = \frac{\varepsilon_0 \omega c}{2} \hat{\underline{z}} \cdot \Re\{|\underline{E}_I|^2 n_1\} \tag{1.92}$$

$$< \underline{S}_R > = -\frac{\varepsilon_0 \omega c}{2} \hat{\underline{z}} \cdot \Re\{|\underline{E}_R|^2 n_1\} \tag{1.93}$$

$$< \underline{S}_T > = \frac{\varepsilon_0 \omega c}{2} \hat{\underline{z}} \cdot \Re\{|\underline{E}_T|^2 n_2\} \tag{1.94}$$

Damit ergibt sich für deren Koeffizienten:

- Reflexionskoeffizient:

$$\boxed{r = \frac{< \underline{S}_R \cdot \hat{\underline{z}} >}{< \underline{S}_I \cdot \hat{\underline{z}} >} = |R|^2} \tag{1.95}$$

- Transmissionskoeffizient:

$$\boxed{t = \frac{< \underline{S}_T \cdot \hat{\underline{z}} >}{< \underline{S}_I \cdot \hat{\underline{z}} >} = |T|^2 \cdot \frac{\Re\{n_2\}}{n_1} = |T|^2 n} \tag{1.96}$$

Sie gelten für $\alpha = 0$ und da für $j^F = 0$ S stetig ist, gilt immer $\boxed{r + t = 1}$.
Ist das Material 2 ideales Dielektrikum (d.h. $n \in \mathbb{R}$), haben das in Abbildung (1.18)

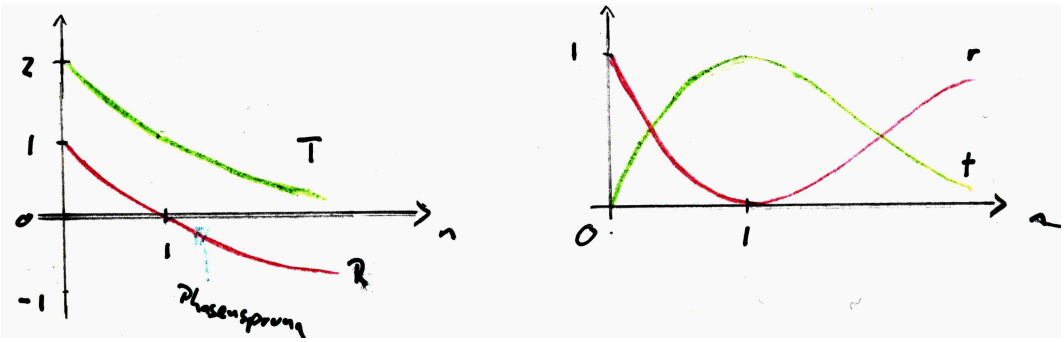
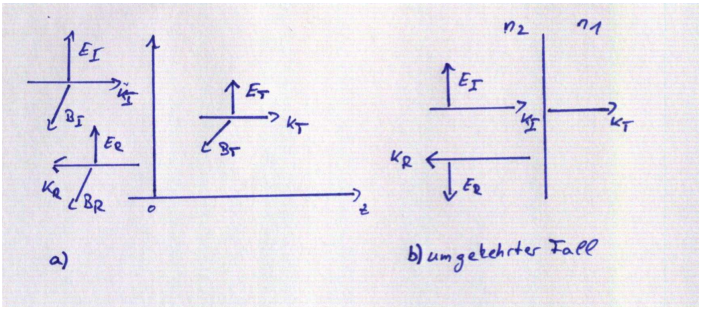


Abbildung 1.18: Transmissions- und Reflexionskoeffizienten in idealem Dielektrikum

dargestellte Verhalten. **Bemerkung:**



Die Überlegungen galten bisher für den Fall aus Abbildung (1.5.3.2a) für den umgekehrten Fall (1.5.3.2b) gilt:

$$
\begin{aligned}
R' &= \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} - R \\
T' &= \frac{2n_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_2}{n_1} T \\
&\Rightarrow \\
r' &= \left|R'\right|^2 = |R|^2 = r \\
t' &= \frac{n_1}{n_2} \left|T'\right|^2 = \frac{n_2}{n_1} |T|^2 = t
\end{aligned}
$$

1.5.3.3 Totalreflexion (Tunneleffekt)

Hier gehen wir wie im vorherigen Paragraphen vor, nur sei hierbei Material 2 ein polarisierbares Dielektrikum, also $n_2 \to n_2(\omega) = \sqrt{\varepsilon_2(\omega)}$ (vergleiche LORENTZsches Atommodell, §1.0.3.4 und §1.3.5 sowie Aufgabe 11)

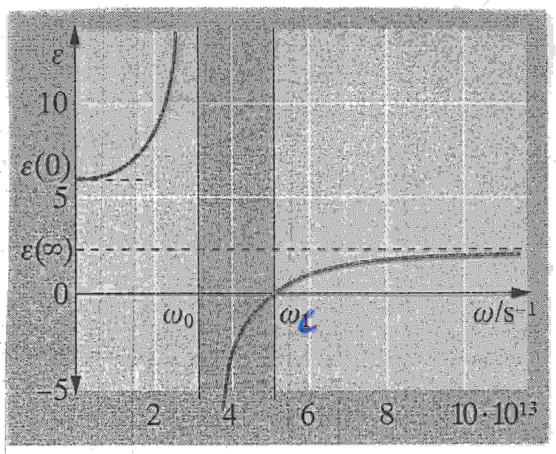


Abb. 14.38. Dispersionskurve der Dielektrizitätskonstante eines Ionenkristalls. Der Bereich mit negativem ε zwischen ω_0 und ω_1 ist der Absorptionsbereich

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Abbildung 1.19: Totalreflektion

Ohne Dämpfung ist $\omega_L = \omega_P + \omega_0$. Formal erhalten wir das selbe Ergebnis $R = \frac{1-n(\omega)}{1+n(\omega)}$, da sich nur die Dispersionsrelation $k_2(\omega) = \frac{\omega}{c} n_2(\omega)$ geändert hat. Für $\omega < \omega_0$ und $\omega > \omega_L$ gilt das bekannte R:

Für den Bereich dazwischen gilt $\varepsilon < 0$, der Brechungsindex ist damit rein imaginär: $n(\omega) = -i\kappa(\omega)$ mit $\kappa(\omega) = \sqrt{\frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}} \in \mathbb{R}$ womit wir das folgende E-Feld haben:

$$\underline{E}(z > 0) = e^{i\omega t} \left[T \begin{pmatrix} E_{I,x} \\ E_{I,y} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\kappa \frac{\omega}{c} z} \right] \tag{1.97}$$

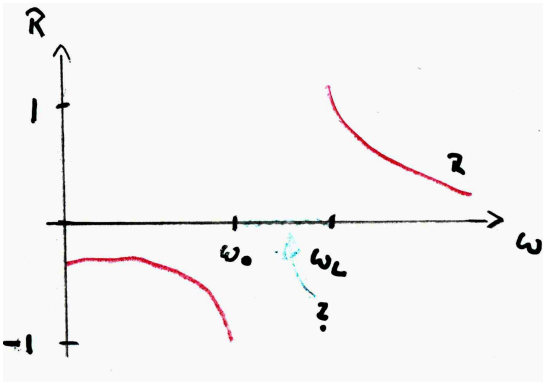


Abbildung 1.20:

und für das B-Feld gilt analoges. Beide Felder sind exponentiell gedämpft ($n = +i\kappa$ ergibt unphysikalische Lösungen), sie stellen sogenannte inhomogene Wellen oder ein evaneszentes Feld dar. Dieses hat die Eindringtiefe $l = \frac{c}{\omega\kappa}$.
Der zeitlich gemittelte Energiestrom in Material 2 entspricht für $\omega_0 < \omega < \omega_L$:

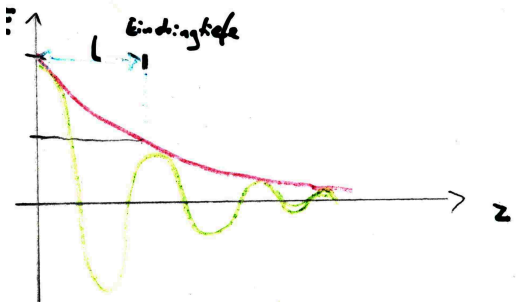


Abbildung 1.21: Eindringtiefe

$$< \underline{S} > \propto \Re\{k_2\} = 0 \quad \text{damit ist} \quad t = 0 \tag{1.98}$$

Für R erhält man Totalreflexion:

$$R = \frac{1 + i\kappa}{1 - i\kappa} = e^{i\gamma(\omega)} \quad \text{also} \quad |R| = 1 \tag{1.99}$$

mit $\tan\frac{\gamma}{2} = \kappa(\omega) = \sqrt{\frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}$ und $r = 1$, die gesamte Energie wird reflektiert, es gibt somit keine propagierenden Wellen im Material 2. Hier sind einige Grafiken aus der Vorlesung angefügt, die die Polarisierbarkeit und die Reflexion in Abhängigkeit von der Frequenz darstellen:

1.5.3.4 Metallreflexion

Zur Beschreibung der Reflexion elektromagnetischer Wellen an Metallen wird benötigt, wie die elektromagnetischen Felder in Metallen lauten:
Elektromagnetische Felder in ohmschen Metallen:

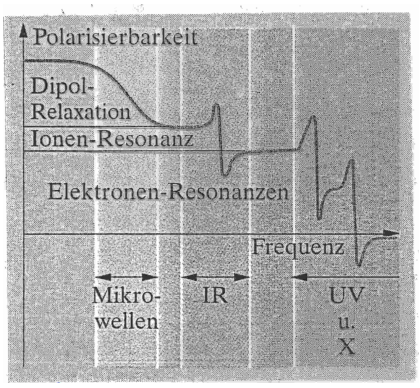


Abbildung 1.22:

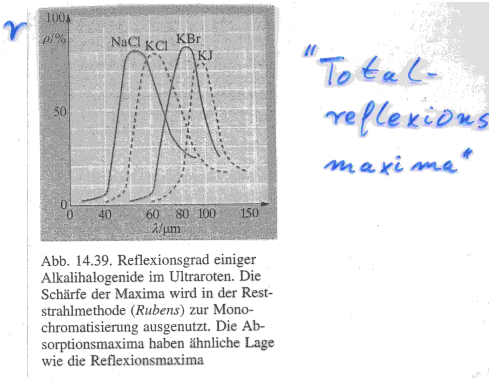


Abb. 14.39. Reflexionsgrad einiger Alkalihalogenide im Ultraroten. Die Schärfe der Maxima wird in der Restrahlmethode (*Rubens*) zur Monochromatisierung ausgenutzt. Die Absorptionsmaxima haben ähnliche Lage wie die Reflexionsmaxima

Abbildung 1.23:

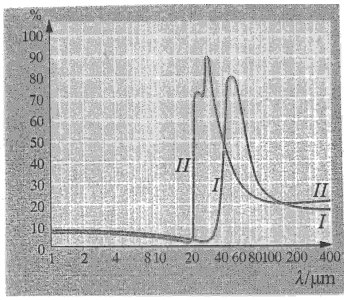


Abb. 11.20. Der Reflexionsgrad von Steinsalz (*I*) und Flußspat (*II*) als Funktion der Wellenlänge

Abbildung 1.24:

Es gelten die Materialgleichungen für den internen Leitungsstrom $\underline{j} = \sigma \underline{E}$ und $\underline{D} = \varepsilon\varepsilon_0$, welche aus den gebundenen Ladungen resultiert. Betrachten wir die monochromatischen

Felder E,B $\sim e^{i\omega t}$:

$$\text{Aus MAXWELLgl. 2 folgt} \qquad \underline{B} = \frac{i}{\omega}\nabla \times \underline{E} \quad \text{für} \quad \nabla \cdot \underline{B} = 0 \tag{1.100}$$

$$\text{Aus MAXWELLgl. 3 folgt} \qquad \frac{1}{\mu\mu_0}\nabla \times \underline{B} = \sigma\underline{E} + \varepsilon\varepsilon_0 i\omega\underline{E} \tag{1.101}$$

$$= i\omega\varepsilon_0(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0})\underline{E} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon(\omega)\underline{E} \tag{1.102}$$

Satz: Im ohmschen Metall genügen die Felder für $\omega \neq 0$ denselben Gleichungen wie im Dielektrikum, jedoch mit:

$$\boxed{\varepsilon(\omega) = \varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}} \tag{1.103}$$

Wiederholung:
Bisher haben wir folgende Relationen gesehen:

Abbildung 1.25:

$$\underline{k}_I^{\parallel} = \underline{k}_R^{\parallel} = \underline{k}_T^{\parallel}$$
$$\omega = \omega_I = \omega_R = \omega_T$$

Bei senkrechtem Einfall, d.h. Einfallswinkel $\alpha = 0°$ und $\underline{k}_I^{\parallel} = 0$ galt für den *Reflexions-* und den *Transmissionskoeffizienten*:

$$R = \frac{E_R}{E_I} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$
$$T = \frac{E_T}{E_I} = \frac{2 \cdot n_1}{n_2 + n_1}$$

Der *Energiefluß* ist durch die Koeffizienten:

$$r = |R|^2$$
$$t = |T|^2 \cdot \frac{\Re\{n_2\}}{n_1}$$

Das Verhalten an der Grenzfläche zu einem ohmschen Metall ($\omega \neq 0$) ist analog zu dem bei einem Dielektrikum mit $\varepsilon(\omega) = \varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}$.

Transeversale, ebene monochromatische Wellen haben die Dispersionsrelation:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)}$$

und sind räumlich gedämpft. Einen expliziten Beweis davon erhält man über die sogenannte ***Telegraphengleichung***, welche in Aufgabe 16 behandelt wird.

B) Wellendämpfung
Zur Vereinfachung betrachten wir einen guten ohmschen Leiter, d.h. $|\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}| \gg \varepsilon_0$. Für diesen Fall gilt:

$$k(\omega) \doteq \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}} \cdot \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\delta(\omega)} \tag{1.104}$$
$$\left(\sqrt{-i}\right)^2 = -i = \frac{1+i^2-2i}{2} = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2$$

mit der Skinlänge:

$$\delta(\omega) = c\sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{\sigma\omega}} = \lambda \cdot \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}} \ll \lambda \tag{1.105}$$
$$\text{mit: } \lambda = 2\pi\lambda\!\!\!^{-} = 2\pi\frac{c}{\omega} \text{ der Wellenlänge im Vakuum}$$

Wie in Abbildung (1.26) dargestellt, oszilliert die Welle und ist zusätzlich exponentiell

Abbildung 1.26: zur Skinlänge

gedämpft, weil $E \propto e^{ikz} \propto e^{-\frac{iz}{\delta}} \cdot e^{-\frac{z}{\delta}}$.
Dabei ist die Eindringtiefe $\delta(\omega) \propto \frac{1}{\sqrt{\sigma\omega}}$:

Stoff	$\delta(\omega)$	bei Frequenz ν
Salzwasser	1m	$3 \cdot 10^4$ Hz
Ag	10^{-6}m	10^8 Hz (Mikrowelle)

In einem guten ohmschen Leiter fallen die Felder schnell in der Nähe der Oberfläche ab; im Metall (für $z \gg \delta$) gilt $E \equiv 0$ bis auf eine "Haut" (Skin) der Dicke δ an der Oberfläche des Leiters (*Skineffekt*).
Bemerkung: In der Realität transmittieren Metalle elektromagnetische Wellen für $\omega > \omega_P$. Wobei ω_P die **Plasmafrequenz** bzw. Langmir-Frequenz ist. Dies benötigt ein $\sigma = \sigma(\omega)$. (vgl. LORENTZ'sches Atommodell aus Aufgabe 25)

C) Reflexion am Metallspiegel
Wegen den Betrachtungen zu elektromagnetischen Wellen in guten ohmschen Leitern (A) gilt für ebensolche gute Leiter:

$$R \doteq \frac{n_1 - \dfrac{1-i}{\delta/\lambda\!\!\!^{-}}}{n_1 + \dfrac{1-i}{\delta/\lambda\!\!\!^{-}}} \overset{\delta \ll \lambda\!\!\!^{-}}{\to} -1 + \frac{\delta}{\lambda\!\!\!^{-}/n_1} \cdot (1+i) + \cdots$$

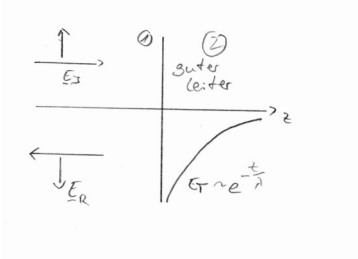


Abbildung 1.27: Reflexion am Metallspiegel

Bei $z = 0$ heben sich die einfallende und die reflektierte Welle also (fast) auf, und (fast) alle Energie wird reflektiert:

$$r = 1 - 2\frac{\delta}{\lambda} + \cdots = 1 - 2n_1 \cdot \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}} + \cdots$$

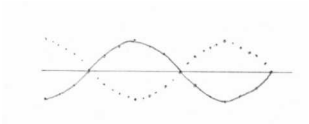


Abbildung 1.28: stehende Welle bei der Reflexion am Metall

Wie in Abbildung (1.28) skizziert, entsteht vor dem Spiegel eine *"stehende" Welle* mit räumlich festen Orten der Knoten und Bäuche (für $R = -1$):

$$\begin{aligned}
\underline{E}_I &= E_I^x \cdot e^{i(\omega t - k_1 z)} \underline{e}_x \\
\underline{E}_R &= R\, E_I^x \cdot e^{i(\omega t + k_1 z)} \underline{e}_x \\
\Rightarrow \underline{E}(z<0) &= \Re\{\underline{E}_I + \underline{E}_R\} = \underbrace{E_I^x}_{\in\mathbb{R}} \Re\{e^{i\omega t}\left(e^{-ik_1 z} - e^{ik_1 z}\right)\}\underline{e}_x \\
&= -2E_I^x \underline{e}_x \sin(k_1 z)\cos(\omega t)
\end{aligned}$$

1.5.3.5 Fresnel'sche Formeln

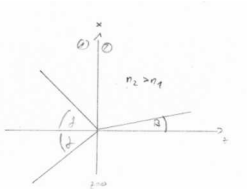


Abbildung 1.29: (x-z)-Ebene ist Einfallsebene

Im Folgenden wollen wir den Fall allgemeiner Einfallsrichtung mit $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ speziell für ein ideales Dielektrikum als Material 2 betrachten. Die Betrachtungen sind allerdings verallgemeinerbar auf $n(\omega)$. Wir definieren $n := \frac{n_2}{n_1}$.

Man definiert für $n_2 > n_1$ Material 2 als **optisch dichter** für $n_2 < n_1$ als **optisch dünner** als Material 1.
Da die einfallende (transversale monochromatische) Welle als Superposition zweier linear polarisierter Wellen gesehen werden kann (vgl. Aufgabe 11) gilt:

$$\underline{E}_I = \Re\{\begin{pmatrix} E_I^x \\ E_I^y \\ E_I^z \end{pmatrix}\} \cdot e^{i\omega t - ik_1^{\parallel} x - ik_1^{\perp} z}$$

mit $k_1 = \frac{\omega}{c} n_1 = \sqrt{\left(k_1^{\parallel}\right)^2 + \left(k_1^{\perp}\right)^2}; k_1^{\perp} = k_1 \cos\alpha$ etc.
Die Bedingung der Transversalität $\underline{k}_1 \cdot \underline{E}_I = 0$ ergibt zwei Forderungen/Fälle:

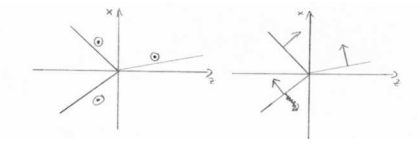


Abbildung 1.30:

- A) $\underline{E}_I$ ist senkrecht zur Einfallsebene:

$$E^y \neq 0 \quad E^z = E^x = 0$$

- $\underline{E}_I$ ist in der Einfallsebene polarisiert:

$$E^y = 0 \quad k_1^{\parallel} E^x + k_1^{\perp} E^z = 0$$

Behauptung: Die beiden Fälle sind entkoppelt.
Ein Beweis für diese Behauptung im ersten Fall ist in der Aufgabe 15. Hier soll mit dem zweiten Fall fortgefahren werden. Dazu verwenden wir die Symbole $R_{\parallel}$ und $T_{\parallel}$ weil $\underline{E}$ parallel zur Einfallsebene ist.
Der folgende Ansatz verwendet einen Polarisationsvektor der Länge E_I. Um sicher zu gehen, dass die Welle transversal ist, wird ein Vektor der Form $\begin{pmatrix} k_1^{\perp} \\ 0 \\ -k_1^{\parallel} \end{pmatrix}$ dazu multipliziert, damit sich die Länge aber nicht ändert muss durch den Betrag des Vektors $\left(\frac{\omega n_1}{c}\right)$ geteilt werden:

$$z < 0 \quad \underline{E} = E_I \begin{pmatrix} k_1^{\perp} \\ 0 \\ -k_1^{\parallel} \end{pmatrix} \frac{c}{\omega n_1} \cdot e^{i(\omega t - k_1^{\parallel} x - k_1^{\perp} z)} + E_R \begin{pmatrix} k_1^{\perp} \\ 0 \\ k_1^{\parallel} \end{pmatrix} \frac{c}{\omega n_1} \cdot e^{i(\omega t - k_1^{\parallel} x + k_1^{\perp} z)}$$

$$z > 0 \quad \underline{E} = E_T \begin{pmatrix} k_2^{\perp} \\ 0 \\ -k_2^{\parallel} \end{pmatrix} \frac{c}{\omega n_2} \cdot e^{i(\omega t - k_2^{\parallel} x - k_2^{\perp} z)} \tag{1.106}$$

Bei der Wahl der richtigen Vorzeichen vor k_1 muss man auf die Ausbreitungsrichtung der jeweiligen Welle achten, die bei einfallender und reflektierter Welle genau entgegengesetzt

ist.
Über $\underline{B} = \frac{1}{\omega}\underline{k} \times \underline{E}$ erhält man das B-Feld:

$$z < 0 \quad \underline{B} = \frac{E_I n_1}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{\parallel} x - k_1^{\perp} z)} + \frac{E_R n_1}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{\parallel} x + k_1^{\perp} z)}$$

$$z > 0 \quad \underline{B} = \frac{E_T n_2}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_2^{\parallel} x - k_2^{\perp} z)} \tag{1.107}$$

Dieser Ansatz löst die MAXWELLgleichungen in Material 1 und 2.
Als nächstes müssen wir uns die Stetigkeitsbedingungen anschauen:
Die Normalkomponente des Magnetfeldes (B^z) soll stetig sein, und ist es auch, da sie sowohl für $z < 0$ als auch für $z > 0$ 0 ist. Die Bedingung, dass die Tangentialkomponente des Magnetfeldes stetig ist, ist äquivalent zu der Bedingung, dass die Normalkomponente von $\underline{D}$, d.h. ($n_i^2 E^z$) stetig ist. Außerdem soll die Tangentialkomponente des E-Feldes (E^z) stetig sein. Damit erhält man die beiden Bedingungen:

$$n_1(E_I - E_R) = n_2 E_T$$
$$\frac{k_1^{\perp}}{n_1}(E_I + E_R) = \frac{k_2^{\perp}}{n_2} E_T$$

Verwendet man weiter das SNELLIUS'sche Brechungsgesetz $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$ sowie Additionstheoreme für Sinus und Kosinus (siehe mathematische Formelsammlung), so erhält man die **Fresnel'schen Formeln:**

$$R_{\parallel} = \frac{E_R}{E_I} = \frac{k_2^{\perp}/n_2^2 - k_1^{\perp}/n_1^2}{k_2^{\perp}/n_2^2 + k_1^{\perp}/n_1^2} = \frac{\tan(\beta - \alpha)}{\tan(\beta + \alpha)} \tag{1.108}$$

$$T_{\parallel} = \frac{E_T}{E_I} = \frac{2k_1^{\perp}/(n_1 n_2)}{k_2^{\perp}/n_2^2 + k_1^{\perp}/n_1^2} = \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)} \tag{1.109}$$

[2]

Bemerkungen:

- Für $\alpha \to 0$ und damit auch $\beta \to 0$ folgt der in §1.6.3.2 behandelte Fall.
- Für $\frac{n_2}{n_1} = n > 1$ folgt für $\alpha \to 90°$:

$$k_1^{\perp} \to 0 \quad \text{aber: } \sin\beta = \frac{1}{n} < 1 \quad \Rightarrow k_2^{\perp} \neq 0$$

  Bei streifendem Einfall liegt also vollständige Reflexion mit $R_{\parallel} \to 1$ und $T_{\parallel} \to 0$ vor. In der Natur kann man dies z.B. beim Spiegelbild im See etc. beobachten.

- Der Energiestrom normal zur Grenzfläche ist stetig:

$$< S_I^z > + < S_R^z > = < S_T^z > \quad \Leftrightarrow \quad 1 = r + t = n|T|^2 + |R|^2$$

[2] In der Literatur findet man noch andere Darstellungen, die man durch trigonometrische Umformungen erhält, siehe etwa Demtröder 2

- Für $\frac{n_2}{n_1} = n < 1$ gibt es einen Grenzwinkel $\alpha_G < 90°$ der **totalen Reflexion** am optisch dünneren Medium. Aus der kinematischen Bedingung:

$$\underline{k}_I^{\parallel} = \underline{k}_T^{\parallel} \quad \text{und} \quad \omega_I = \omega_t$$

folgt:

$$\begin{aligned}\left(\underline{k}_T^{\perp}\right)^2 &= (\underline{k}_T)^2 - \left(\underline{k}_T^{\parallel}\right)^2 \\ &= \left(\frac{n_2}{n_1}\right)(\underline{k}_I)^2 - \left(\underline{k}_I^{\parallel}\right)^2 \\ &= (\underline{k}_I)^2 \cdot \left(n^2 - \sin^2\alpha\right)\end{aligned}$$

Also:

$$\boxed{\sin\alpha_G = n < 1} \tag{1.110}$$

Für $\alpha \geq \alpha_G$ erfolgt **Totalreflektion**, weil dort $k_T^{\perp} = -i\kappa\left(\frac{\omega}{c}\right)$ imaginär ist. Die Welle ist exponentiell gedämpft im Material 2.

- Veranschaulichung: (Falls $R < 0$ ist, macht die Welle einen Phasensprung um π bei Reflexion am optisch dichteren Medium)

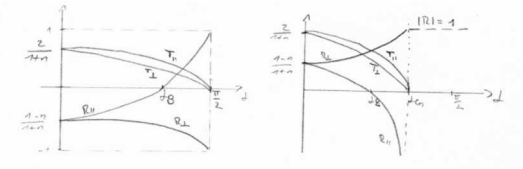


Abbildung 1.31: Veranschaulichung Brechung und Reflexion

- **Brewster-Winkel:** Ist die Richtung der reflektierten Welle gleich der Richtung von

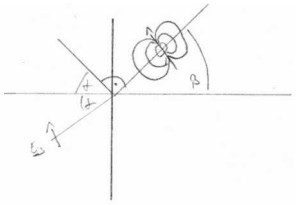


Abbildung 1.32: Brewsterwinkel

$\underline{E}_T \propto \underline{d}$ (mit $\underline{d}$ der Dipolachse der schwingenden und strahlenden Atome in Material 2), dann ist $R_{\parallel} = 0$, weil die Dipole nicht entlang ihrer Achse strahlen.
Für den Brewsterwinkel $\alpha = \alpha_B$ gilt $\boxed{\alpha_B + \beta = \frac{\pi}{2}}$. Dann steht $\underline{k}_R \perp \underline{k}_T$ und die von $\underline{E}_T \parallel \underline{k}_R$ angeregten Atome machen im Material 2 eine Dipolstrahlung, die parallel zu $\underline{E}$, d.h. in die nach SNELLIUS reflektierte Richtung verschwindet.

Wenn $\alpha_B + \beta = \frac{\pi}{2}$ ist, dann gilt $R_\parallel = \frac{\tan(\beta-\alpha)}{\tan(\frac{\pi}{2})} = 0$.

Aus SNELLIUS folgt:

$$\frac{1}{n}\sin\alpha_B = \sin\beta = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_B) = \cos\alpha_B$$
$$\Rightarrow \tan\alpha_B = n \tag{1.111}$$

Bemerkung:

- Für die Grenzfläche Wasser/Luft ($N = \frac{4}{3}$) ist der Brewsterwinkel $\alpha_B \approx 53°$.
- Bei Reflexion unter dem Brewsterwinkel ist das Licht vollständig linear polarisiert.

Wiederholung:

$$\boxed{I_R = I_0 \frac{F \sin^2\frac{\Delta\phi}{2}}{I + F\sin^2\frac{\Delta\phi}{2}}}$$

$$\boxed{I_T = I_0 \frac{1}{I + F\sin^2\frac{\Delta\phi}{2}}}$$

1.6 Geometrische Optik

1.6.1 Fermat'sches Prinzip

Wir hatten gesehen: -Reflektion und Brechung aus MAXWELL-Gleichungen
Wir zeigen jetzt: -Reflektion und Brechung aus HUYGENS'schem Prinzip

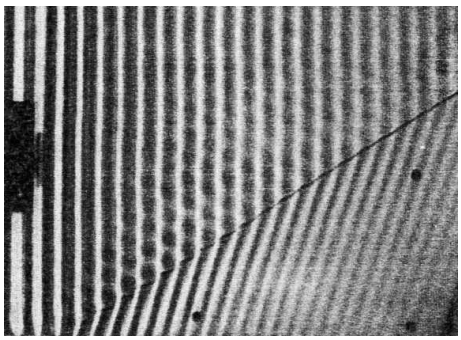


Abbildung 1.33: Wellenfronten bei der Brechung von Wasserwellen

Eine nützliche -äquivalente- Weise, den gleichen Sachverhalt zu beschreiben, ist das Prinzip von FERMAT: (nach dem franz. Mathematiker PIERRE DE FERMAT, 17.Jh.):

> *"Der vom Licht zurückgelegte Weg ist so, dass die benötigte Zeit extremal (minimal bzw. maximal) wird."*

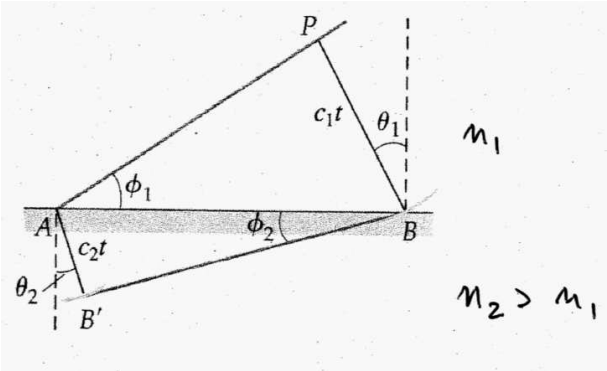


Abbildung 1.34: HUYGENS'sche Konstruktion: Wegen $n_2 > n_1$ ist $\overline{AB}' < \overline{PB}$

Aus FERMAT lassen sich Reflektion und Brechung leicht herleiten:

Reflektionsgesetz: (siehe Übungsaufgabe)

Brechungsgesetz: (etwas komplizierter)

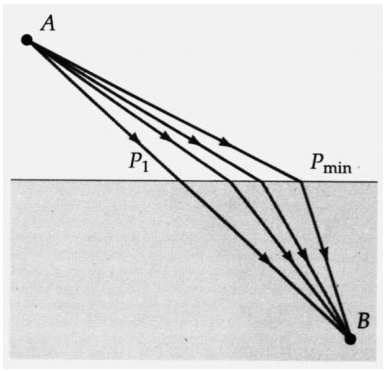


Abbildung 1.35: Brechung an Mediumsgrenze

Laufzeit des Lichts:

$$t = \frac{l_1}{c_1} + \frac{l_2}{c_2} = \frac{n_1\, l_1(x)}{c_0} + \frac{n_2\, l_2(x)}{c_0} = t(x)$$

Minimalisieren:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{c_0}\left(n_1 \frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}x} + n_2 \frac{\mathrm{d}l_2}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{n_1 \frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}_x} = -n_2 \frac{\mathrm{d}l_2}{\mathrm{d}x}}$$

$l_1(x)$ und $l_2(x)$:

$$l_1^2 = a^2 + x^2$$
$$l_2^2 = b^2 + (d-x)^2$$

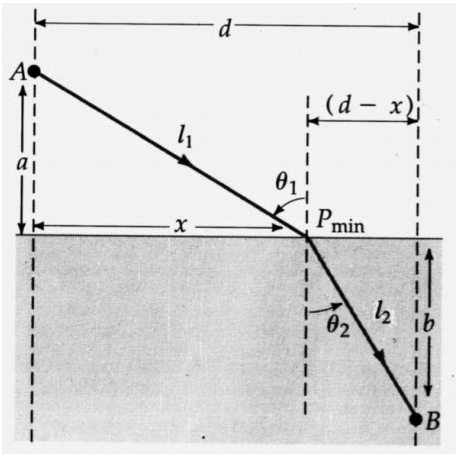


Abbildung 1.36: Weglängen bei der Brechung

$$\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{l_1} = \sin\theta_1$$
$$\frac{\mathrm{d}l_2}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}-x}{l_2} = -\sin\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n_1 \sin\theta_1 = n_2\,\theta_2} \qquad \text{(Snellius)}$$

Nach Fermat breitet sich Licht also im homogenen Medium geradlinig aus: Man könnte denken, dass das Licht nach der Lochblende folgendermaßen weiterläuft:

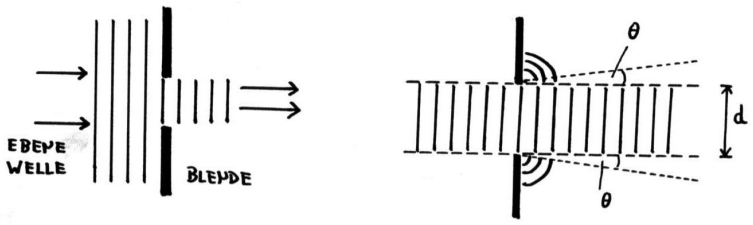


Abbildung 1.37: Ebene Wellen treffen auf eine Lochblende

Dies ist offensichtlich in der Mitte, weit weg vom Rand, richtig. Aber am Rand müssten E und H abrupt verschwinden. Das geht nicht, denn $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ und $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ erzeugen Wellen. $\Rightarrow$ Huygens
Das Wellenfeld nach der Blende werden wir später behandeln.

Wir sehen nun in Abb.1.37 das Phänomen der *Beugung*. Wegen Huygens gilt:

$$\theta \approx \frac{\lambda}{d} \to 0 \quad \text{für } \lambda \ll d$$

Praktisch bedeutet dies: Falls $d \geq 100\mu$m redet man von *Lichtstrahlen*.

Wir sehen in Abb.1.38 ein *Lichtbündel* aus Lichtstrahlen, mit folgenden Eigenschaften:

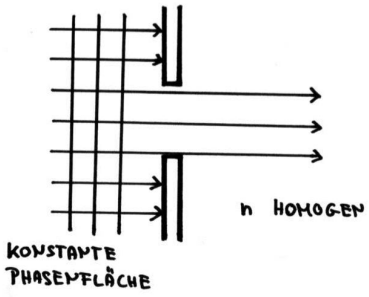


Abbildung 1.38: Lichtbündel bei homogenem Brechungsindex

- In senkrechter Richtung eine Flache konstante Phase
- Querschnitt
- Wellenlänge λ (aber keine Interferrenzen)
- Geschwindigkeit $c = \frac{c_0}{n}$
- Intensität $I = c\,\epsilon\epsilon_0\,E^2$ (Photonenfluss)
- Polarisation

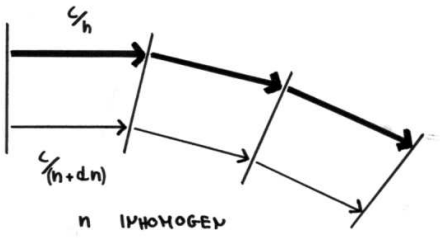


Abbildung 1.39: Gekrümmter Strahl im n-Gradienten

Fermat'sches Prinzip im inhomogenen Medium, d.h. $n = n(\underline{r})$

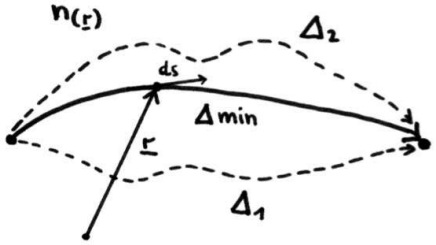


Abbildung 1.40: Kürzester optischer Weg Δ_{min} in inhomogenem Medium

Optischer Weg:

$$\Delta_s = \int_{P_1}^{P_2} n(\underline{r}) \cdot \mathrm{d}s$$

Laufzeit:

$$T_s = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t = \frac{1}{c_0} \int_{P_1}^{P_2} n(\underline{r})\, \mathrm{d}s$$

$\delta T_s = 0$ bzw. $\delta \Delta_s = 0$

Eine **kleine** Variation des Weges führt nicht zu einer Änderung von Δ_s, d.h. $\Delta_s = \Delta_{min}$. (Viele Aufgaben der geometrischen Optik lassen sich durch Anwendung eines solchen Variationsprinzips lösen!)

Beispiele:

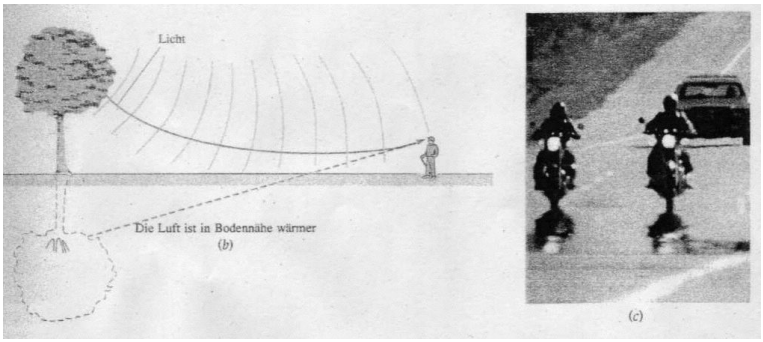


Abbildung 1.41: Spiegelbild auf heißer Straße im Sommer

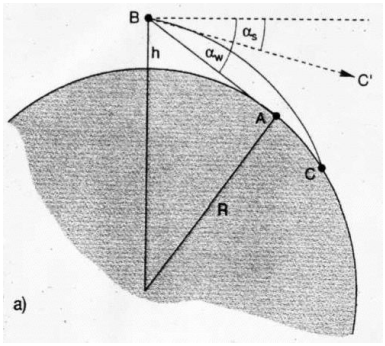


Abbildung 1.42: Größere Sichtweite

Diese natürlichen Erscheinungen hängen stark von den jeweiligen Gegebenheiten (Temperaturgradienten o.ä.) ab.

1.6.2 Optische Abbildung I

Im Folgenden behandeln wir verschiedene *optische Abbildungen.*

Was ist eine Abbildung? Ein Bild?

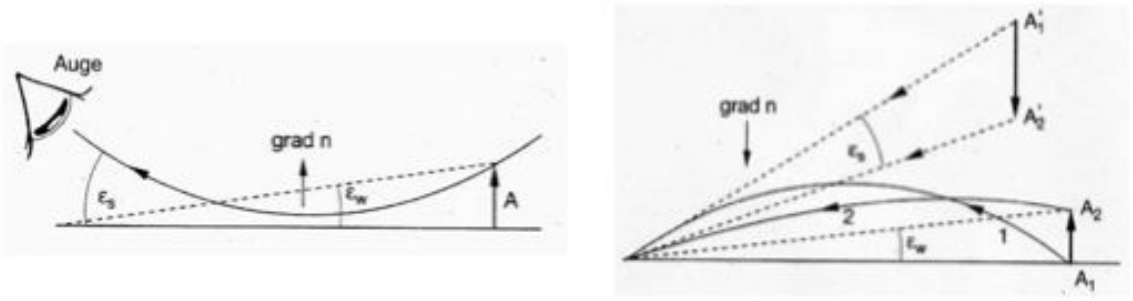


Abbildung 1.43: Fata Morgana

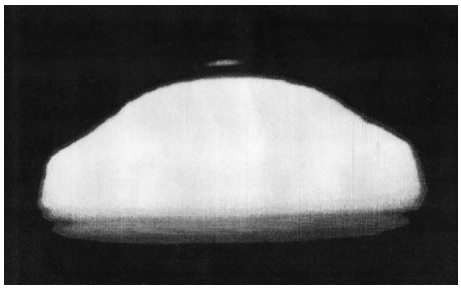


Abbildung 1.44: Green Flash

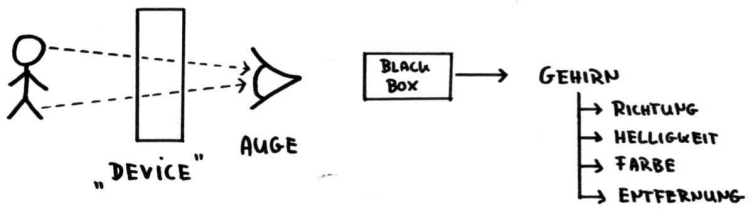


Abbildung 1.45: Gegenstand sendet Licht aus.

Zu Abb.1.45: Das Eindringen eines Spiegels, einer Linse, einer Lochblende o.ä. erzeugt einen anderen visuellen Eindruck. Das Bild erscheint größer, kleiner, Seitenverkehrt...

Spiegel:

Ein *ebener Spiegel* (Abb.1.46) erzeugt ein "Bild" von P (Gegenstand) in P'. Dem Beobachter erscheint ein zweiter Gegenstand in P', ein *"virtuelles" Bild*, da von P' im Gegensatz zu P kein Licht ausgeht. P' liegt auf der Normalen zu S, die durch P geht.

Zu Abb.1.47:
Aus dieser Konstruktionsvorschrift (Reflektionsgesetz) folgt, dass G und B gleich groß sind und B im gleichen Abstand hinter S liegt wie G davor.

$\Rightarrow$ Aus dem Rechtshändigen Koordinatensystem wird ein linkshändiges. Denn beide Komponenten parallel zum Spiegel werden nicht invertiert; wohl aber die senkrecht dazu. (Abb.1.48)

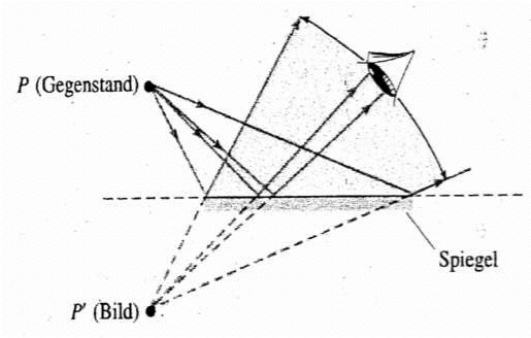


Abbildung 1.46: Virtuelles Bild durch ebenen Spiegel

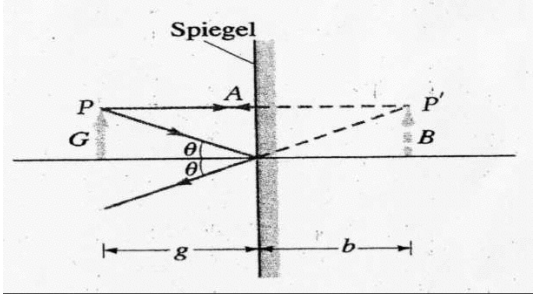


Abbildung 1.47: Konstruktionsvorschrift für das Reflektionsgesetz

→ *Spiegelsymmetrie*

Zwei Spiegel *erzeugen mehr als 2 Bilder!!* Zwei durch Einfachreflektion (trivial) und

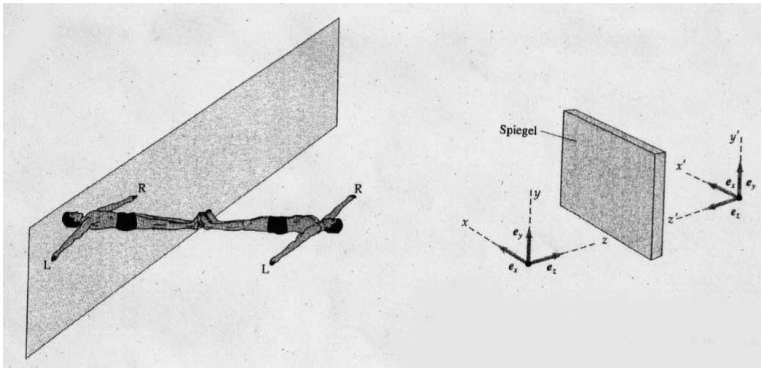


Abbildung 1.48: Spiegelung

eines durch Zweifachreflektion (Abb.1.49). Aber: je nach Orientierung der Spiegel können **beliebig viele** Bilder erzeugt werden!! (Z.B. Parallele Spiegel)

Der in Abb.1.50 dargestellte *elliptische Hohlspiegel* bildet die beiden Brennpunkte ineinander ab.

Die Unschärfe der **Lochkamera** lässt sich anhand des Strahlensatzes nachvollziehen (Abb.1.51). Sie bildet scharf ab, für Lochgröße $d \to 0$. Somit hat aber die Abbildung auch

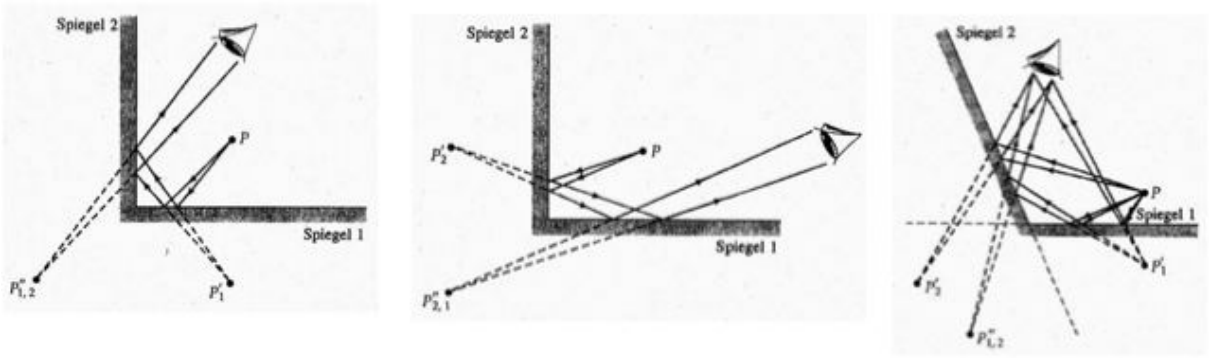


Abbildung 1.49: Mehrfache Spiegelung

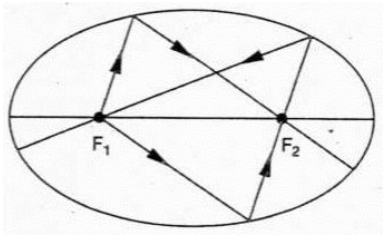


Abbildung 1.50: Elliptischer Hohlspiegel

keine *Intensität* mehr. Bei kleinen Löchern nimmt aber auch der Effekt der *Beugung* zu.

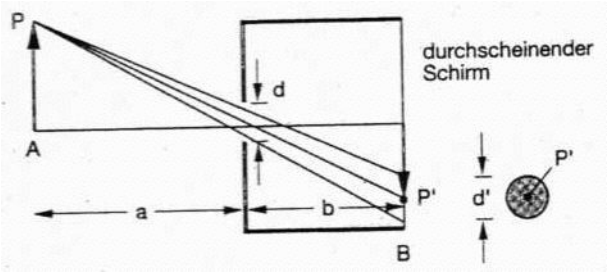


Abbildung 1.51: Schematische Darstellung einer Lochkamera

Sphärischer Hohlspiegel

Wir betrachten den Strahlenverlauf wie in Abb.1.53, wobei h klein sein soll (Achsennahe Strahlen). Es gilt:

M: Kugelmittelpunkt

S: Spiegelpunkt

F: Fokus

Abbildung 1.52: Aufnahmen mit einer Lochkamera bei verschiedenen Lochdurchmessern

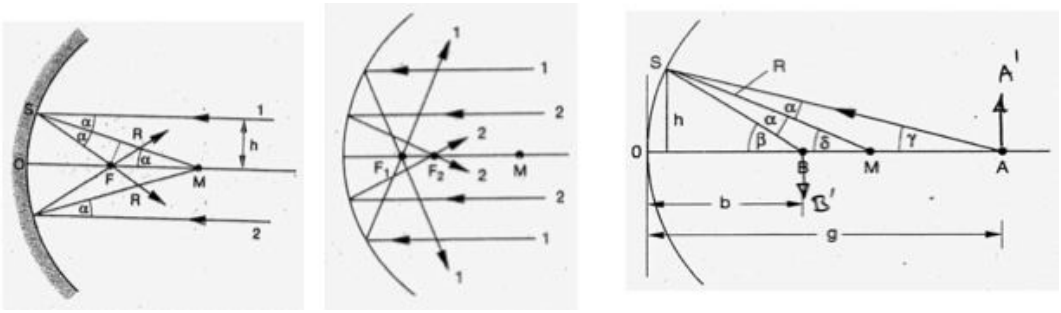


Abbildung 1.53: Sphärischer Hohlspiegel

Man liest ab:

$$\begin{aligned} \text{Dreieck}\,(SFM) &\approx \text{ gleichschenklig} \\ \rightarrow\ \overline{FM} &\approx \frac{R}{2\,\cos\alpha} \\ \rightarrow\ \overline{OF} &\approx \frac{R}{\left(1-\frac{1}{2\,\cos\alpha}\right)} \end{aligned}$$

Falls h klein, so ist $\cos\alpha \approx 1 \quad \Rightarrow \overline{FM} \approx \overline{OF} \approx \frac{R}{2}$
Die *Brennweite* des sphärischen Spiegels beträgt somit:

$$\boxed{f = \frac{R}{2}} \quad \alpha \ll 1$$

1.7 Dielektrika (Prismen, Linsen)

1.7.1 a) Prisma (gleichschenkliges)

man sieht: $\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$, **gesucht:** $\delta(\alpha_1,\gamma)$
(Wir beschränken uns auf δ_{min} = minimaler Winkel)

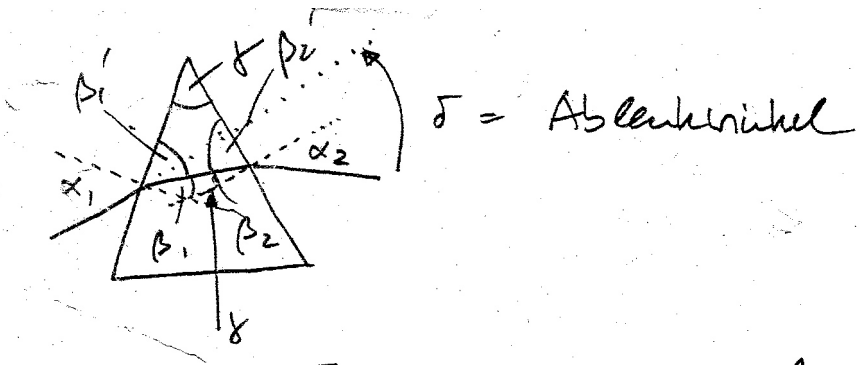


Abbildung 1.54: Prisma

man sieht (einfache Geometrie): $\gamma = \beta_1 + \beta_2$ (Herleitung: $\beta_1' + \beta_1 = 90°$, $\beta_2' + \beta_2 = 90°$, $\beta_1' + \beta_1 + \beta_2' + \beta_2 = 180°$)

$$\rightarrow \delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma$$

Minimale Ablenkung bei festem Prismenwinkel γ erfolgt, wenn

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\alpha_1} = 1 + \frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}\alpha_1} = 0 \rightarrow \mathrm{d}\alpha_2 = -\,\mathrm{d}\alpha_1$$

Bildet man die Ableitung des SNELLIUSschen Brechungsgesetzes $\sin\alpha = n \sin\beta$ für die beiden brechenden Prismaflächen, so erhält man:

$$\cos\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_1 = n\cos\beta_1\,\mathrm{d}\beta_1$$
$$\cos\alpha_2\,\mathrm{d}\alpha_2 = n\cos\beta_2\,\mathrm{d}\beta_2$$

Für den Strahlengang mit minimaler Ablenkung δ ($\mathrm{d}\alpha_1 = -\,\mathrm{d}\alpha_2$) wird daraus:

$$\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} = \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_2}$$

was wegen des Brechungsgesetzes umgeformt werden kann in:

$$\frac{1-\sin^2\alpha_1}{1-\sin^2\alpha_2} = \frac{n^2-\sin^2\alpha_1}{n^2-\sin^2\alpha_2} \tag{1.112}$$

Für $n \neq 1$ kann diese Gleichung nur erfüllt werden für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.
$\rightarrow$ Bei symmetrischen Strahlengang mit $\alpha_1 = \alpha_2$ erfolgt die kleinste Ablenkung.

$$\delta_{min} = 2\alpha - \gamma$$

Mit Hilfe des Brechungsgesetzes erhält man daraus:

$$\sin\frac{\delta+\gamma}{2} = \sin\alpha = n\sin\beta$$
$$= n\sin\frac{\gamma}{2} \tag{1.113}$$

Die Abhängigkeit des Ablenkwinkels δ vom Brechungsindex ergibt sich aus (1.113) wegen $\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}n} = (\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\delta})^{-1}$ zu:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}n} &= \frac{2\sin(\frac{\gamma}{2})}{\cos(\frac{\delta+\gamma}{2})} \\ &= \frac{2\sin(\frac{\gamma}{2})}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\frac{\gamma}{2})}}\end{aligned} \tag{1.114}$$

Meist verändert man nicht den Brechungsindex direkt durch Veränderung des Materials, sondern indirekt durch Veränderung der Wellenlänge, denn $n = n(\lambda)$.

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}n} = \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}n}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{2\sin(\frac{\gamma}{2})}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\frac{\gamma}{2})}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}} \tag{1.115}$$

Abbildung 1.55: Dispersion des Prismas

Mit der Dispersionsformel 1.115 folgt, dass es sich bei dem Prisma um einen Spektrometer, einen Apparat zur Zerlegung des Lichts handelt.

1.7.2 b) Linsen

A) Sphärische Grenzfläche zwischen dielektischen Medien (wichtigstes optisches Instrument)

Abbildung 1.56: Definition der Brennweite

$\beta + \gamma + 180° - \alpha = 180°$, $\beta + \gamma = \alpha$.
Näherungen:

- achsennahe Stahlen $h \ll R$
- kleine Winkel $\rightarrow$ Snelius: $n_1\alpha = n_2\beta$

$$\begin{aligned}\Rightarrow h \approx R\alpha \approx f_2\gamma &= f_2(\alpha - \frac{n_1}{n_2}\alpha) \\ \rightarrow \boxed{f_2 &= \frac{n_2}{n_2 - n_1}R}\end{aligned} \tag{1.116}$$

Abbildung 1.57: Gegenstandsbrennpunkt

Konstruktion des Bildes: Analog zur Herleitung von f_2 gilft für F_1:

$$f_1 = \frac{n_1}{n_1 - n_2} R \tag{1.117}$$

Abbildung 1.58: Gegenstands- und Bildweite

Gegenstands und Bildweite:

$$\begin{aligned} h \approx R\alpha \approx b\gamma \approx g\epsilon \\ n_1\overline{\alpha} \approx n_2\beta \\ \overset{\text{Snellius}}{\Rightarrow} \frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{f_2} = -\frac{n_1}{f_2} \end{aligned} \tag{1.118}$$

mit obigen f_1, f_2 folgt:

$$\boxed{\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2}{f_2} = -\frac{n_1}{f_1}} \tag{1.119}$$

B) Dünne Linsen

Abbildung 1.59: Dünne Linse

zweifache Abbildung an shärischer Fläche

- an 1: $\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_1} = \frac{n-1}{R_1}$
- an 2: $g_2 = -(B_1 - d)$; $R = -R_2$

Betrachte B_1 als Gegenstand, der durch Fläche 2 auf B_2 abgebildet wird.

$$\begin{aligned} \frac{-n}{b_1 - d} + \frac{1}{b_2} = \frac{1-n}{R_2} \\ \overset{Abb1}{\Longrightarrow} \frac{1}{g} + \frac{1}{b} =: \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \\ \text{Näherung der dünnen Linse} \begin{pmatrix} g \approx g_1 + \frac{d}{2} \\ b \approx b_1 + \frac{d}{2}\partial_z \end{pmatrix} \text{mit} f = \frac{R_1 R_2}{(n-1)(R_2 - R_1)} \overset{bikonvex}{=} \frac{1}{n-1}\frac{R}{2} \end{aligned} \tag{1.120}$$

Zweifache Abbildung an sphärischer Fläche.

Abbildung 1.60: Dünne Linse

Abbildung 1.61: Flächen

- erste Fläche: ($n_1 = 1$, $n_2 = n$)

$$\frac{1}{g_1} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{R_1} \tag{1.121}$$

- zweite Fläche: Betrachte B_1 als neuen Gegenstand, der durch Fläche 2 auf B_2 abgebildet wird. Dann gilt ($n_1 = n$, $n_2 = 1$, $R = -R_2$)

$$g_2 = -(b_1 - d) \tag{1.122}$$

Abbildungsgleichung wird damit:

$$\frac{-n}{b_1 - d} + \frac{1}{b_2} = \frac{1-n}{R_2}$$

$$\overset{(1.121)}{\Longrightarrow} \frac{1}{g_1} + \frac{1}{b_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{nd}{b_1(b_1 - d)} \tag{1.123}$$

neue Abstände: $g = g_1 + \frac{d}{2}$, $b = b_2 + \frac{d}{2}$ (mit $d \ll g$, $d \ll b$)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \tag{1.124}$$

Für achsenparallele Strahlen (d.h. $g = \infty$) ist $b = f$ d.h.

$$\boxed{f = \frac{1}{n-1}\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}} \qquad \underbrace{= \frac{1}{n-1}\frac{R}{2}} \tag{1.125}$$

falls $R_1 = -R_2 \rightarrow$ bikonvex mit gleichem R

N.B. Hohlspiegel gab $f = \frac{R}{2}$
Daraus (beide Kästchen) folgt Abbildungsgleichung

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}} \tag{1.126}$$

Abbildung 1.62: Newtonsche Abbildungsgleichung

Abbildung 1.63: Vergrößerung

$$\text{Setzte man } \begin{pmatrix} g = f + x_g \\ b = f + x_b \end{pmatrix} \text{ in (1.126)}$$
$$\Rightarrow \boxed{x_g x_b = f^2} \text{ Newtonsche Abbildung} \tag{1.127}$$

Vergrößerung $M = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = -\frac{b}{g} = \frac{f}{f-g}$

C) Dicke Linsen

Definition Hauptebene: Dort wird der Strahl gebrochen wie bei einer dünnen Linse:

Abbildung 1.64: Definition der Hauptebene

dünne: $d \ll g,b,f$ man kann zeigen (Aufwand), dass - wenn alle Lösungen g,b,f von den nächsliegenden Hauptachsen gezählt werden, die Abbildungsgleichung der dünnen Linse gelten! d.h.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \text{ bzw. } x_a x_b = f^2 \text{ allerings jetzt mit}$$
$$\frac{1}{f} = (n-1)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{nR_1R_2}\right] \tag{1.128}$$

Abbildung 1.65: Dicke Linse

Für die Lagen der Hauptebene gilt:

$$h_1 = \underline{O_1 S_1} = -\frac{(n-1)fd}{nR_2}$$
$$h_2 = \underline{O_2 S_2} = -\frac{(n-1)fd}{nR_1} \tag{1.129}$$

D) Linsensysteme

(anhand von zwei Linsen diskutiert)

Abbildung 1.66: 2 Linsensystem

zwei Fälle:

- Abstand $d > f_1 + f_2$
- Abstand $d < f_1 + f_2$

$\rightarrow$ erst b)...

a) $d > f_1 + f_2$

Abbildung 1.67: Brennpunkt

Falls $\boxed{g \rightarrow \infty \Rightarrow} = b_1 = f$ (Bild im Fokus von L_1) Dieses Bild hat "Gegenstandsweite" $g_2 = d - f_1$ für L_2. Wegen $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{g_2}\frac{1}{b_2} \rightarrow b_2 = \frac{g_2 f_2}{g_2 - f_2}\frac{(d-f_1)f_2}{d-f_1-f_2}$ mit Brennweite des Gesamtsystems f, also $\frac{(g_1+d)b_2}{g_1+d+b_2}$ folgt $f = \frac{f_1 f_2}{f_1+F_2-d}$ bzw. $\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1+f_2}}$

$\rightarrow$ b)

b) $d < f_1 + f_2$

Abbildung 1.68:

Gesamtsystem: A = Gegenstand, B = Bild $\rightarrow g = f_1; b = f_2 \rightarrow$ mit Linsengleichung$\frac{1}{f} = \frac{1}{g}\frac{1}{b}$ Die Brechzahlen $(\frac{1}{f_i})$ addieren sich.

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}} \tag{1.130}$$

$\rightarrow a)$

Aus Abb. (**??**) folgt (trivialerweise) wegen Strahlensatz für den Abbildungsmaßstab das kombinierten Systems

$$M = M_1 M_2 = \frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2} \overset{umformen}{=} \frac{1}{1 + \frac{a_1}{f_1 f_2}(d - f_2) + \frac{a_1 - d}{f_2}} \tag{1.131}$$

N.B. Matrixmethode zur Berechnung opt. Syteme:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{in} \\ \gamma_{in} \end{pmatrix} = \widetilde{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} \alpha_{out} \\ \gamma_{out} \end{pmatrix} \widetilde{\mathbf{M}} = \widetilde{\mathbf{T}}\widetilde{\mathbf{R}} \tag{1.132}$$

E) Linsenfehler

a) Chromatische Aberration

da $n = n(\lambda)$folgt$f = f(\lambda)$

Korrektur durch sogenannte Achromaten = 2 Linsen verschiedener Brechungsindizes $n_i(\lambda)$ und verschiedener Radii R_1 und R_2, L_1 ist Sammellinse, L_2 ist Zerstreuungslinse.

Abbildung 1.69: Chromatische Aberration

Durch Berechung von f_1 und f_2 nach Linsengleichung (s.o.) für zwei Wellenlängen, dann (f_{rot}) und f_{blau} für System nach $\frac{1}{f_{rot}} = \frac{1}{f_{rot1}} + \frac{1}{f_{rot2}}$, f_{blau} ebenso, und $f_{rot} = f_{blau}$ folgt:

$$\frac{R_1}{R_2} = -\frac{n_{2blau} - n_{2rot}}{n_{1blau} - n_{1rot}} \tag{1.133}$$

b) Sphärische Aberration
wie bei Hohlspiegel diskutiert

Abbildung 1.70: Sphärische Aberration

c) Koma

Abbildung 1.71: Koma

Verschiedene Strahlen haben verschiedene Brennpunkte für gekippte Orientierung der Linse.

d) Astigmatismus

Abbildung 1.72: Astigmatismus

Strahlen in der horizontalen Ebene (Sagittal-Ebene) werden in B_s abgebildet (Punkt), in der senkrechten Ebene aber (wegen Durchstoßung der Linse bei größeren Abständen von der optischen Achse) an einem anderen Punkt B_M.
→ linienförmige Verzerrung in b_M und b_s

1.8 Interferenz

1.8.1 Interferenz von 2 Punktquellen

Inferferenz von Wellen bedeutet Überlagerung mehrerer Wellen, im einfachsten Fall von 2 Wellen. Sind die Wellenamplituden klein (sodass nichtlinieare Effekte vernachlässigt werden können), so gilt die Superposition der Felder. D.h. $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$. Ist die Phasenbeziehung zwischen den Wellen **fix** (d.h. nicht zeitabhängig), so entsteht ein räumliches Muster der Gesamtwelle (genannt "Interferenz").
Fixe Phasenbeziehung bedeutet:

- Wellen stammen von gleicher Quelle $S_1 = S_2$
- Beide (räumlich getrennten) Quellen (S_1, S_2) sind bei gleicher Frequenz, d.h. sind monochromatisch, d.h. phasengekoppelt.

Beispiel 1(Versuch)
Zwei Kugelwellen werden durch konzentrische Ringe auf Folie simmuliert. Man legt Folien übereinander und beobachtet die Orte, wo sich die Ringe schneiden. Die sind offenbar duch einfache geometrische Linien miteinander verbunden. Seien die Ringe Maxima von $\underline{E_1}$ bzw. $\underline{E_2}$, so ist an den Kreuzungspunkten offenbar $\underline{E_1}$ mit $\underline{E_2}$ "in Phase"

Abbildung 1.73: konstruktive Interferenz

man spricht von konstruktiver Interferenz. Orte wo Maxima von $\vec{E_1}$ auf negative Maxima von $\underline{E_2}$ stoßen, sind Orte "destruktiver Interferenz". Offenbar ist die Summer klein (bzw. $\underline{0}$, falls $E_1 = E_2$)

Abbildung 1.74: Destruktive Interferenz

Wir beobachten natürlich die Intensität der Welle $I = \frac{\epsilon_0}{2} c E^2$

$$\begin{aligned} I &= \frac{\epsilon_0}{2} c(E_1^2 + E_2^2 + \underline{E_1 E_2^*} + \underline{E_1^* E_2}) \\ &= I_1 + I_2 + I_{12} \\ I_{12} &= \frac{\epsilon_0}{2} c E_1^0 E_2^0 (e^{i\Delta\phi} + e^{-i\Delta\phi}) = c\epsilon_0 E_1^0 E_2^0 \cos(\Delta\phi) \end{aligned}$$

wobei $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ die (fixe) Phasendifferenz zwischen beiden Wellen angibt. Natürlich ist $\Delta\phi$ ortsabhängig !!
→ **konstruktive Interferenz** für Orte, wo $\Delta\phi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi ... = 2m\pi$

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (4\ I \text{ für } I_1 = I_2) \tag{1.134}$$

destruktive Interferenz für Orte, wo $\Delta\phi = \pm\pi, \pm 3\pi ... = 2(m+1)\pi$

$$I_{max} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (0 \text{ für } I_1 = I_2) \tag{1.135}$$

Für den Fall, dass $I_1 = I_2 = I_0$ gilt für I in Abhängigkeit von der Phasendifferenz:

$$\boxed{I(\Delta\phi) = 2I_0 \cdot (1 + \cos\Delta\phi) = 4I_0 \cdot \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2}} \tag{1.136}$$

Wie kommt man nun an $\Delta\phi$? Geometrische Betrachtung:

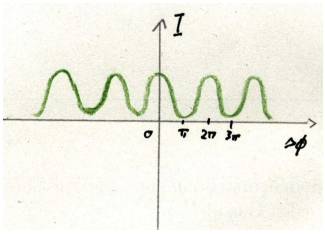
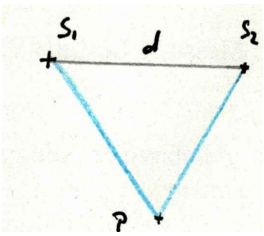
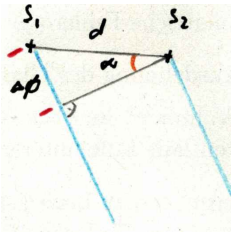


Abbildung 1.75: I in Abhängigkeit von $\Delta\phi$





$$\Delta\phi = k \cdot (\overline{S_1P} - \overline{S_2P}) \tag{1.137}$$

Ist der Punkt weit enfernt, vereinfacht sich das zu folgendem Term, weil die interferierenden Strahlen nahezu parallel einfallen (siehe Bild oben):

$$\Delta\phi = k \cdot d \cdot \sin\alpha \tag{1.138}$$

Wir suchen nun die Intensität in Abhängigkeit von α oder von y. Dazu nehmen wir die oben umrandete Formel und setzen eine einfache Beziehung für $\Delta\phi$ ein, die für kleine Winkel α gilt:

$$\Delta\phi \approx k \cdot d \cdot \alpha \approx k \cdot d \cdot \frac{y}{l} \tag{1.139}$$

Für die Abstände der Maxima auf einem Schirm bedeutet das:

$$y_m = \frac{m \cdot \lambda \cdot l}{d} \tag{1.140}$$

wobei m eine ganze Zahl darstellt.

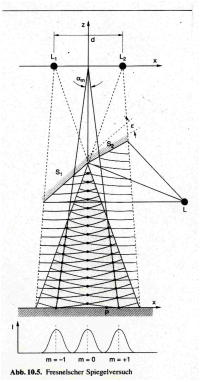
Dies kann man beispielsweise im Wasserwellen-Versuch sehen, der in der Vorlesung vorgeführt wurde, oder an dem FRESNEL-Spiegeln.

1.8.2 Michelson-Interferometer

Hierbei handelt es sich um Zwei-Strahlen-Interferometrie:

Wir suchen die Intensität in Abhängigkeit vom Gangunterschied der Wellen:

$$I = I(s_1 - s_2) = I(\Delta s) \tag{1.141}$$



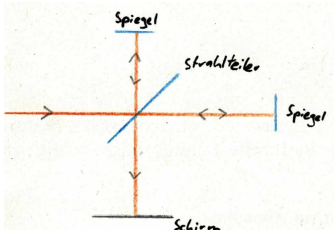


Abbildung 1.76: MICHELSON-Interferometer

Die einfallende Welle sei $E_e = A_e \cos(\omega t - kz)$. Nach einer Reflexion und einer Transmission haben wir die beiden Wellen

$$E_1 = \sqrt{r \cdot t} A_e \cos(\omega t + \phi_1) \tag{1.142}$$
$$E_2 = \sqrt{r \cdot t} A_e \cos(\omega t + \phi_2) \tag{1.143}$$

Die beiden Teilstrahlen haben also die selbe Amplitude, da sie jeweils einmal transmittiert und einmal reflektiert wurden. Für die Intensität gilt:

$$I = c\varepsilon_0 \cdot (E_1 + E_2)^2 = c\varepsilon_0 \cdot rtA_e^2 \cdot [\cos(\omega t + \phi_1) + \cos(\omega t + \phi_1)]^2 \tag{1.144}$$

Und mit $c\varepsilon_0 \cdot E_e = I_0$ folgt für die zeitlich gemittelte Intensität:

$$< I >_T = rtI_0 \cdot (1 + \cos \Delta\phi) \tag{1.145}$$

In unserem Versuch verwendeten wir Laserlicht der Wellenlänge 623 nm. Das MICHELSON-Interferometer funktioniert als Verschiebungsmessgerät für $\Delta s = 2\Delta z$: Zählt man die Nulldurchgänge N des Interferenzmusters bei einer Verschiebung der Abstände, so erhält man diese Verschiebung über die Beziehung

$$\lambda = \frac{2 \cdot \Delta z}{N} \tag{1.146}$$

Man erreicht mit dem Interferometer daher sehr hohe Genauigkeit, wenn man das Δz mit mindestens $\frac{\lambda}{2}$ wählt. Das interferenzbild mit leicht divergentem Laserlicht sieht folgendermaßen aus: Die Kreise ergeben sich aus folgendem Grund: Man betrachte zwei geringfügig zueinander gekippte Strahlen, die einen geringen Phasenunterschied entlang der Laufstrecke aufweisen und dann interferieren. Dieser Phasenunterschied ist abhängig von Winkel der Kippung, weshalb man Maxima verschiedener Ordnung sieht, wenn man vom Zentrum nach außen geht.

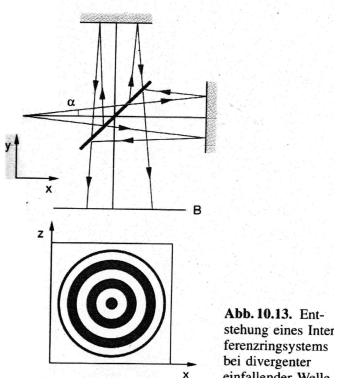


Abb. 10.13. Entstehung eines Interferenzringsystems bei divergenter einfallender Welle

1.8.3 Vielstrahlinterferenz

Hierbei werden viele Strahlen zur Deckung gebracht, ist empfindlicher als Zweistrahlinterferometrie. Wir betrachten die Interferenz an zwei planparallelen Oberflächen im Abstand d und dem Index n.

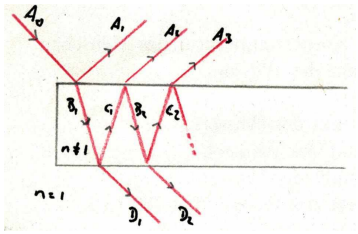


Abbildung 1.77: Vielstrahlinterferenz

Einfallende Welle sei wieder $E = A_0 e^{i(\omega t - \underline{k}\cdot\underline{r})}$ und es gelte $\sqrt{r}\cdot A_i$ für den reflektierten, sowie $\sqrt{1-r}\cdot A_i$ für den transmittierten Anteil der Welle i.

$$\begin{aligned} |A_1| &= \sqrt{r}\,|A_0| & |A_2| &= \sqrt{1-r}\,|C_1| \\ |B_1| &= \sqrt{1-r}\,|A_0| & |B_2| &= \sqrt{r}\,|C_1| \\ |C_1| &= \sqrt{r(1-r)}\,|A_0| & &\vdots \\ |D_1| &= (1-r)\,|A_0| \end{aligned}$$

Es gilt allgemein für die beiden relevanten Strahlen:

$$A_{i+1} = r\cdot A_i \quad \text{und} \quad D_{i+1} = r\cdot D_i \tag{1.147}$$

Der Weglängen- und der Phasenunterschied zwischen den beiden Strahlen ist:

$$\Delta s = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \tag{1.148}$$

welches man einsetzen kann in

$$\boxed{\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \delta\varphi \quad *} \tag{1.149}$$

Das $\delta\varphi$ rührt von eventuellen Phasensprüngen. Zusammenfassend kann man zu diesen sagen:

- Für die $E_\perp$-Ebene gilt $\delta\varphi = \pi$ bei Reflexion am optisch dichteren Medium
- Für die $E_\perp$-Ebene gilt $\delta\varphi = 0$ bei Reflexion am optisch dünneren Medium
- Für die $E_\parallel$-Ebene gilt $\delta\varphi = \pi$ bei Reflexion am optisch dichteren Medium, wenn $\alpha > \alpha_{Brewster}$
- Für die $E_\parallel$-Ebene gilt $\delta\varphi = 0$ bei Reflexion am optisch dichteren Medium, wenn $\alpha < \alpha_{Brewster}$
- Für die $E_\parallel$-Ebene gilt $\delta\varphi = \pi$ bei Reflexion am optisch dünneren Medium, wenn $\alpha < \alpha_{Brewster}$
- Für die $E_\parallel$-Ebene gilt $\delta\varphi = 0$ bei Reflexion am optisch dünneren Medium, wenn $\alpha_{total} > \alpha > \alpha_{Brewster}$

Für $i \geq 2$ ist $\delta\varphi$ immer 0. Für die Spezialfälle $i = 1$ gilt:

$$A_1^\perp = \sqrt{r} A_0 \cdot e^{i\pi} = -\sqrt{r} A_0 \tag{1.150}$$

$$A_1^\parallel = \pm\sqrt{r} A_0 \tag{1.151}$$

Wir erhalten folgende geometrische Reihe:

$$A = A - 1 + \sum_{m=2}^{p} A_m e^{i(m-1)\Delta\phi} \tag{1.152}$$

Wir erhalten damit:

$$A = \pm A_0 \sqrt{r} \left[1 - (1-r)e^{i\Delta\phi} - r(1-r)e^{2i\Delta\phi} - \ldots\right] \tag{1.153}$$

welches sich als summe schreiben lässt:

$$A = \pm A_0 \sqrt{r} \left[1 - (1-r)e^{i\Delta\phi} \cdot \sum_{m=0}^{p-2} r^m e^{im\Delta\phi}\right] \tag{1.154}$$

Für viele Reflexionen ($p \to \infty$) gilt:

$$\boxed{A = \pm A_0 \sqrt{r} \, \frac{1 - e^{i\Delta\phi}}{1 - r \cdot e^{i\Delta\phi}}} \tag{1.155}$$

Daraus folgt für die Intensität der reflektierten Wellen:

$$\begin{aligned} I_R &= c\varepsilon_0 \cdot AA* = I_0 r \cdot \frac{2 - 2\cos\Delta\phi}{1 + r^2 - 2R\cos\Delta\phi} \\ &= I_0 \cdot \frac{4r\sin^2\frac{\Delta\phi}{2}}{(1-r^2) + 4r\sin^2\frac{\Delta\phi}{2}} \end{aligned} \tag{1.156}$$

und für die transmittierten Wellen:

$$I_T = I_0 \cdot \frac{(1-r)^2}{(1-r^2) + 4r\sin^2\frac{\Delta\phi}{2}} \tag{1.157}$$

setzt man noch $F = \frac{4r}{(1-r)^2}$, erhält man die sogenannten Airy-Formeln:

$$\boxed{I_R = I_0 + \frac{F \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2}}{1 + F \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2}}} \tag{1.158}$$

und

$$\boxed{I_T = I_0 + \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2}}} \tag{1.159}$$

Airy-Formeln:

$$\boxed{I_R = I_0 \, \frac{F \, \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}{I + F \, \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}}$$

$$\boxed{I_R = I_0 \, \frac{1}{I + F \, \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}}$$

Die Durchlasscharakteristik der Platte wird immer schärfer gepeakt um die Werte $\Delta\phi = 2m\pi$, $(2m+1)\pi$... je höher die Reflektivität R. Die Halbwertsbreite der Durchlasskurven ist

$$\epsilon = \frac{4}{\sqrt{F}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

Für hohes R ($\rightarrow$ 1) kann nun die Wellenlängenänderung, die benötigt wird um von Hell auf Dunkel zu kommen sehr viel kleiner sein als beim Zweistrahlinterferometer (Michelson)!

Versuch: Interferenz an planparalleler Platte (Abb.1.78)

$\Rightarrow$ Zu jedem λ gehört ein Satz konzentrischer Ringe. Die Ringe nicht 0-ter Ordnung (Zentrum) erscheinen bunt.

Versuch: Interferenz an dünnen Seifenfilmen (Abb.1.79)

Die Seife reduziert die Oberflächenspannung σ zwischen H_2O und Luft, sodass es wenig Energie kostet, eine große Oberfläche zu erzeugen. Ein großer Ring wird in eine Seifenlauge gelegt. Es spannt sich ein Film auf: (Abb.1.80)

Der Film schillert in verschiedenen Farben, da seine Dicke d nicht ganz konstant ist. Ansonsten haben wir Vielstrahlinterferenz wie am Glimmer.
$d = d(t)$:

Im Laufe der Zeit verdunstet Wasser, oder läuft aus dem Film ("Drainage") $\Rightarrow$ d nimmt ab $\Rightarrow$ Farbänderung. Für ganz dünnen Film ($d \leq \frac{\lambda}{2n}$) wird der Film farblos, dann sogar schwarz, kurz bevor er reißt. So kann man vorhersagen wann eine Seifenblase platzt!

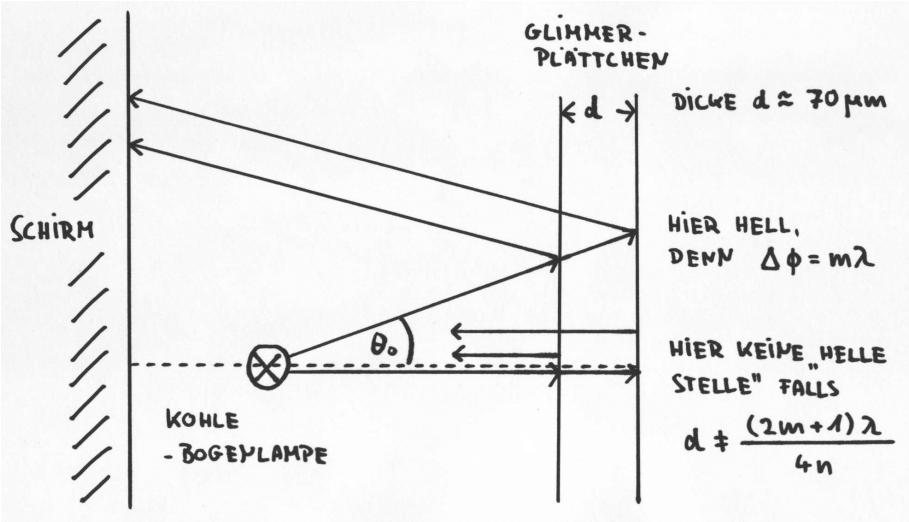


Abbildung 1.78: Schema zur Interferenz am Glimmerplättchen

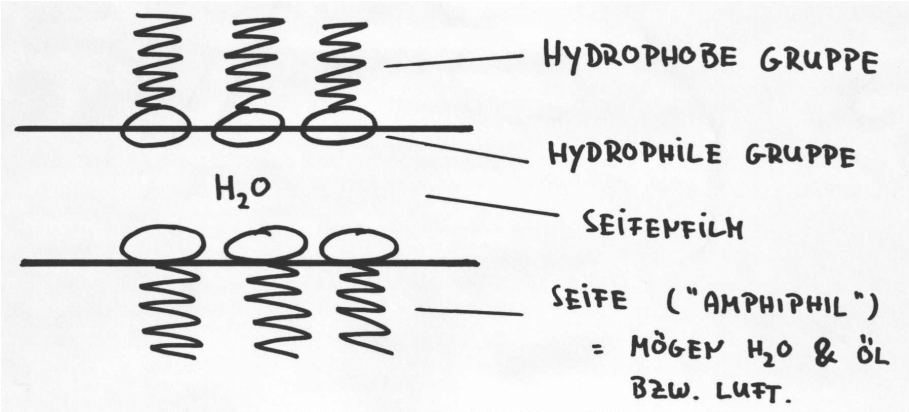


Abbildung 1.79: Interferenz an Seifenfilm

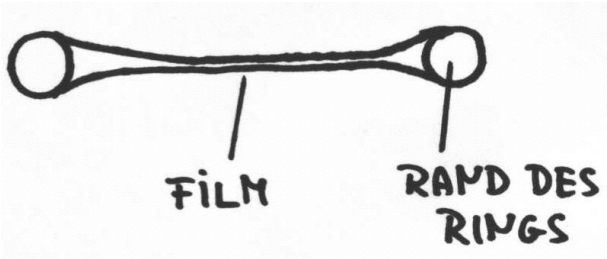


Abbildung 1.80: Dünner Seifenfilm

1.8.4 Fabry-Perot Interferometer

2 Typen: (Abb.1.81)
Das parallele Licht zum durchgang durch das Fabry-Perot-Interferometer wird durch eine Linse L_1 erzeugt (Abb.1.82) und durch Linse L_2 auf den Detektor fokussiert.

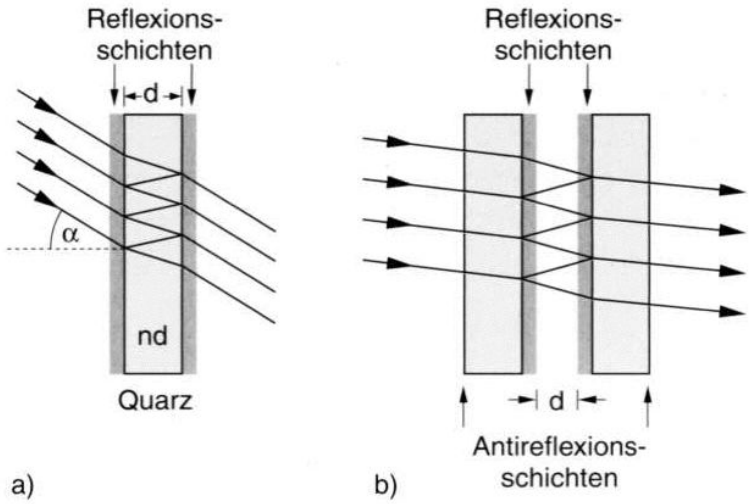


Abbildung 1.81: FABRY-PEROT-Interferometer: a) "Etalon"; b) "Luft-FP"

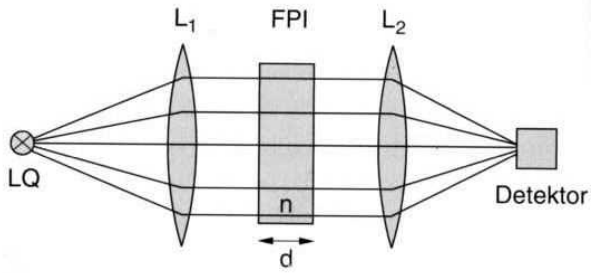


Abbildung 1.82: FABRY-PEROT-Interferometer: a) "Etalon"; b) "Luft-FP"

- Betrachte senkrechten Einfall ($\alpha = 0$) für Fall a) "Etalon":
  $\Rightarrow$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta s \overset{Etalon}{=} \frac{4\pi}{\lambda}\,n\,d$$

  $\Rightarrow$ Maximale Transmission für Wellenlängen λ_m mit

$$\Delta s = m\,\lambda_m \hat{=} \lambda_m = \frac{2\,n\,d}{m}$$

  $\Rightarrow$ (Abb.1.83) $\Rightarrow$

$$\delta\lambda = \lambda_m - \lambda_{m+1} = \frac{2nd}{m} - \frac{2nd}{m+1} = \frac{2nd}{m(m+1)}$$

  $\Leftrightarrow$ "Freier Spektralbereich" $\boxed{\delta\lambda = \frac{\lambda_m}{m+1}}$

  $\Rightarrow$ $\boxed{\delta\mu = \mu_{m+1} - \mu_m = \frac{c}{2nd}}$

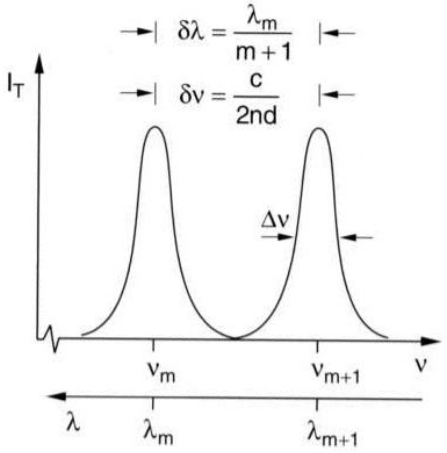


Abbildung 1.83: Transmittierte Intensität

Halbwertsbreite $\Delta\mu$ (Abb.1.83) der Linie $I_T(\mu_m)$?

$$I_T(\mu_1) = I_T(\mu_2) = \frac{1}{2}\, I_T(\mu_m)$$

Mit $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2$ ergibt sich:

$$\Rightarrow \qquad \Delta\mu = \frac{2}{\pi}\,\frac{\delta r}{\sqrt{F}} = \frac{c}{2\,n\,d}\,\frac{1-R}{\pi\,\sqrt{R}}$$

Man definiert die **"Finesse"** des FABRY-PEROT-Interferometers als:

$$\boxed{F^* = \frac{\delta\mu}{\Delta\mu} = \frac{\pi\,\sqrt{R}}{1-R}}$$

Bem:

- Finesse ist ein Maß für die spektrale Auflösung des FABRY-PEROT-Interferometers
- Für $R \to 1$ wird F^* sehr groß, da immer mehr Reflektionen höherer Ordnung beitragen.

- Im Luft-FP gilt

$$\lambda_m = \frac{2d}{m}$$
$$\delta\mu = \frac{c}{2\,d}$$

Für die fixe Wellenlänge λ_0 kommt es zu maximaler Transmission, wenn $\lambda_0 = \frac{2d}{m}$. Dies erreicht man durch Änderung von d, denn in jeder Ordnung ist $\lambda \propto d$. Im realen FP wird ein Spiegel durch (????????) parallel (??????). Um bei gegebener Finesse eine noch bessere Auflösung zu erhalten, kann das Licht mehrfach durch das FP geleitet werden (Multi-Path-FP), durch zwei parallel (??????) FPs (Tandem-FP) oder beides (Multi-Path-Tandem-FP). Beim Durchgang von nicht zur Hauptachse parallelen Strahlen ergibt sich wie beim MICHELSON ein System von konzentrischen

Interferenzringen.

Bem:

Andere viel benutzte Spektrometer sind das Mach-Zehnder-Interferometer und das Sagnac-Interferometer. Beides sind Zweistrahl-Interferometer wie bei MICHELSON.

1.8.5 Kohärenz & Wellengruppen

Es gibt keine ebenen, monochromatischen Wellen
Sie sind Idealisierungen für Wellengruppen, die nach FOURIER aus der Superposition ebener monochromatischer Wellen bestehen.

- **(A) Zeitlich begrenzter Wellenzug**

$$\underline{E}(\underline{r},t)|_{\underline{r}=\underline{r}_0} = \begin{cases} E_0 \cos\omega_0 t & \text{für} \quad -T \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

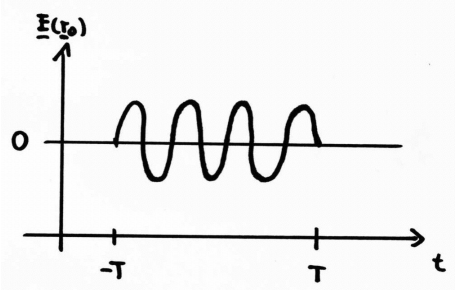


Abbildung 1.84: Zeitlich begrenzter Wellenzug

Bem: $T \neq \frac{2\pi}{\omega_0}$

Er enthält die Frequenzen

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{E}}(\omega) &= \int_{T}^{T} \mathrm{d}t\; e^{-i\omega t}\; E_0 \cos\omega_0 t \\ &\overset{(*)}{=} E_0 \int_{-T}^{T} \mathrm{d}t\; \cos\omega t \cos\omega_0 t \\ &= \frac{1}{2} E_0 \int_{-T}^{T} \mathrm{d}t\; \cos(\omega+\omega_0)t + \cos(\omega-\omega_0)t \end{aligned}$$

(*) $E(t)$ symmetrisch; $\quad e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\underline{\tilde{E}}(\omega) = T\,E_0 \left\{ \frac{\sin(\omega+\omega_0)\,T}{(\omega+\omega_0)\,T} + \frac{\sin(\omega-\omega_0)\,T}{(\omega-\omega_0)\,T} \right\}}$$

wobei:

$$\frac{\sin x}{x} \to \begin{cases} 0 & |x| \to \infty \\ 1 & x \to 0 \end{cases}$$

Also ein endlicher Wellenzug der "nominalen" Frequenz ω_0 ist zusammengesetzt aus Wellen der Frequenzen ω.

$$E(\underline{r_0},t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\, e^{i\omega t}\, \tilde{E}(\omega)$$

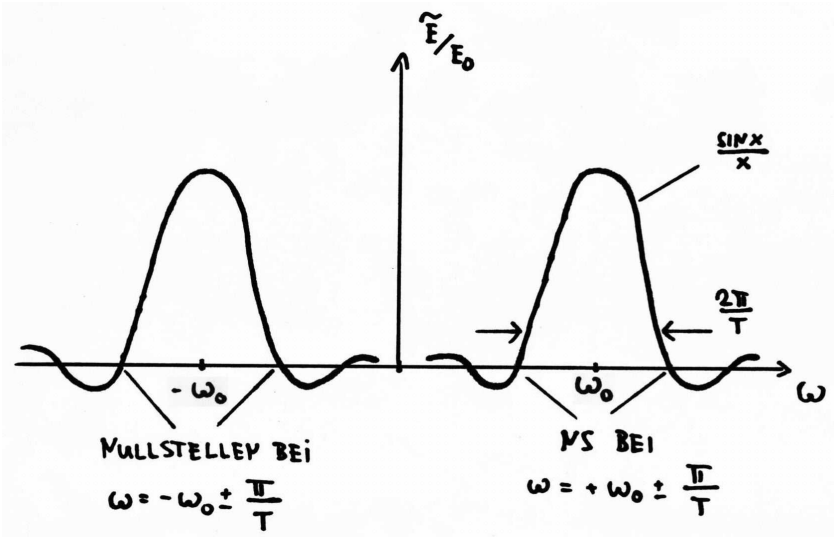


Abbildung 1.85: Schaubild $\tilde{E}/E_0$ gegen ω

$\Rightarrow$ Frequenzbandbreite $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$

Vor allem im Bereich $|\omega \pm \omega_0| \leq \frac{\Delta\omega}{2}$ gibt es Beiträge.

Der Wellenzug kann nur als monochromatisch betrachtet werden für Zeiten $\Delta t \ll T$. Dann kann der Unterschied $|\omega - \omega_0| \leq \Delta\omega$ nicht mehr aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} e^{i\omega\Delta t} &\approx e^{i\omega_0\Delta t + i\Delta\omega\Delta t} \\ &\approx e^{i\omega_0\Delta t} \end{aligned}$$

da $\Delta t\Delta\omega \ll \frac{2\pi}{T}\, T = 2\pi$

Welche ω gemessen werden hängt vom Messprozess ab!

Bsp:
$T \to 0 \quad \Rightarrow \Delta\omega \to \infty$ "Hammerschlag auf eine Pianoseite" $\Rightarrow$ Seite schwingt mit allen Frequenzen (Obertönen)

Alle Lichtquellen besitzen eine natürliche Linienbreite.

(Angeregtes e^- im isolierten Atom $T \approx 10^{-8}$ typisch; Moleküle in Lampe bei hoher Temp haben kleine T; auch LASER)

$\Rightarrow$ Es gibt Bandbreite $\Delta\mu = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$
$\Rightarrow$ " Kohärenzzeit $\Delta t_c = \frac{1}{\Delta\mu}$
$\Rightarrow$ " Kohärenzlänge $\Delta x_c = c\,\Delta t_c$

Wegen der Dispersionsrelation von Licht im Vakuum gilt:

Δx_c entspricht der Länge im Raum über die die Welle monochromatisch mit festen Phasenbeziehungen läuft.

- **(B) Räumlich begrenzter Wellenzug**

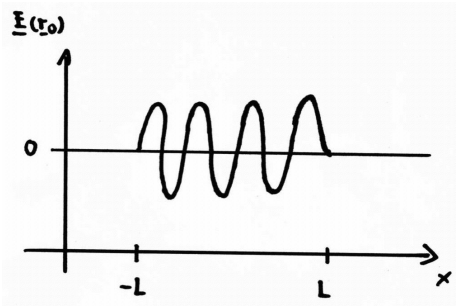


Abbildung 1.86: Räumlich begrenzter Wellenzug

$$\underline{E}(x,t=t_0) = \begin{cases} E_0 \cos k_0 x & \text{für} \quad -L \le x \le L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\underline{E}}(k) = E_0\, L \left\{ \frac{\sin(k+k_0)\,L}{(k+k_0)\,L} + \frac{\sin(k-k_0)\,L}{(k-k_0)\,L} \right\}$$

- **C) allgemeine Wellengruppe (-paket, Signal):**
In der Vorlesung wurde als Beispiel ein skalares E-Feld behandelt:

$$E(\underline{r},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \cdot \tilde{E}(\underline{k},t) \cdot e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

Wobei aus den Lösungen der MAXWELL-Gleichungen und den Material Gleichungen die Dispersionsrelation folgt. Somit ist:

$$\tilde{E}(\underline{k},t) = \tilde{E}(\underline{k}) \cdot e^{i\omega(\underline{k})t}$$

Wie bereits beschrieben, ist $\underline{E}(\underline{r},t)$ eine Überlagerung/Superposition ebener monochromatischer Wellen, d.h proportional zu $e^{i(\omega t - \underline{k}\cdot\underline{r})}$ mit der ***Phasengeschwindigkeit***:

$$\boxed{\underline{v}_p = \frac{\omega}{k}\hat{\underline{k}}} \tag{1.160}$$

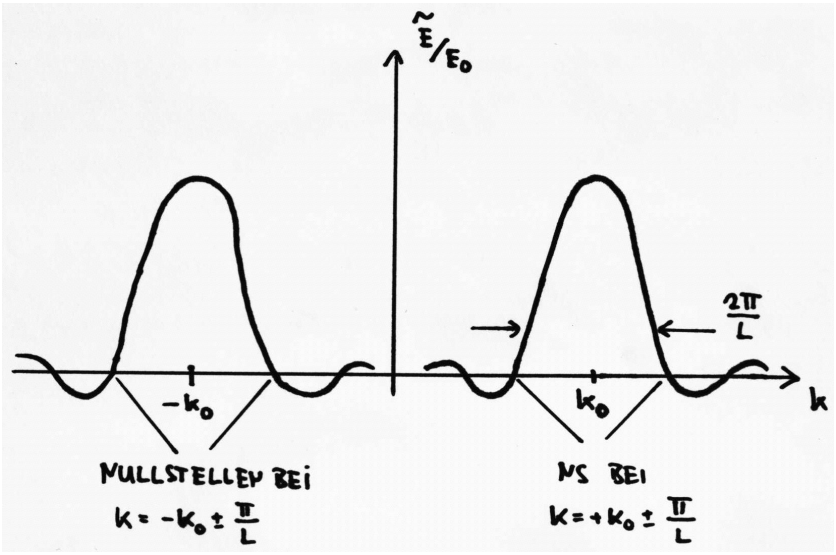


Abbildung 1.87: Schaubild $\tilde{E}/E_0$ gegen k

welche die MAXWELL-Gleichungen lösen. (Im Vakuum ist die Phasengeschwindigkeit $\underline{v}_p = c \cdot \hat{\underline{k}}$).

$$\tilde{E}(\underline{k}) = \int \mathrm{d}^3 r e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} E(\underline{r},t=0)$$

ist die Gewichtungsfunktion (d.h. Amplitude)

Damit ist das gesamte Wellenpaket beschrieben, es muss im Folgenden nur noch verstanden werden.
Zunächst führt man eine Normierung durch. Dies bedeutet, dass der Energiegehalt der Welle normiert ist:

$$\int \mathrm{d}^3 r \left|E(\underline{r},t)\right|^2 = \frac{U_{el}}{c\frac{\varepsilon_0}{2}}$$

$$\text{mit PARSEVAL:} \quad = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \underbrace{\left|\tilde{E}(\underline{k})\right|^2}_{\text{zeitunabhängig}} \doteq 1$$

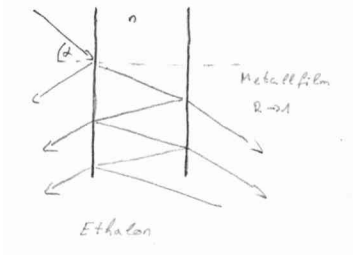


Abbildung 1.88:

Im Weiteren gehen wir zur Vereinfachung davon aus, dass $\left|\tilde{E}(\underline{k})\right|^2$ bei $\underline{k}_0$ scharf gepeakt sei. (s. Abbildung 1.88)
Dann kann man nämlich die Dispersionsrelation Taylor-entwickeln und erhält:

$$\begin{aligned}\omega(\underline{k}) &= \omega(\underline{k}_0) + (\underline{k}-\underline{k}_0)\cdot\frac{\partial}{\partial k}\omega(\underline{k})\mid_{\underline{k}_0} + \cdots \\ &=: \omega_0 + (\underline{k}-\underline{k}_0)\cdot\underline{v}_G(\underline{k}_0)\end{aligned} \tag{1.161}$$

mit der ***Gruppengeschwindigkeit:***

$$\boxed{\underline{v}_G^0 = \frac{\partial}{\partial k}\omega(\underline{k})|_{\underline{k}_0}} \tag{1.162}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow E(\underline{r},t) \quad &\doteq \quad \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\tilde{E}(\underline{k})\cdot e^{i(\omega t-\underline{k}_0\cdot\underline{r})}e^{i(\underline{v}_G^0 t-\underline{r})(\underline{k}-\underline{k}_0)} \\ &\overset{\underline{q}=\underline{k}-\underline{k}_0}{=} \quad e^{i(\omega_0 t-\underline{k}_0\cdot\underline{r})}\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\tilde{E}(\underline{k}_0+\underline{q})e^{i\underline{q}\cdot(\underline{v}_G^0 t-\underline{r})}}_{*} \\ &= \quad \underbrace{e^{i(\omega_0 t-\underline{k}_0\cdot\underline{r})}}_{**}\cdot E^{\mathrm{mod}}(\underline{v}_G^0 t-\underline{r})\end{aligned} \tag{1.163}$$

* ist die FOURIERrücktransformation $\mathrm{FT}^{-1}[\ldots](\underline{v}_G^0 t-\underline{r})$, d.h. die Modulationsfunktion, die sich mit der Gruppengeschwindigkeit bewegt. (Der Schwerpunkt der Welle wandert mit der Gruppengeschwindigkeit)
** beschreibt eine ebene monochromatische Welle

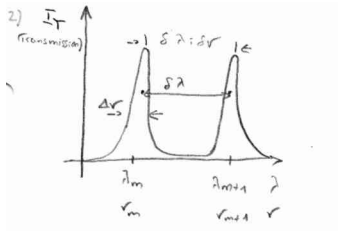


Abbildung 1.89: zur Gruppengeschwindigkeit

Bemerkungen:

- Im eindimensionalen Fall ($\underline{k} = k\underline{\hat{x}}$), ohne Dispersion ist $\omega = c|k|$ und

$$\tilde{E}(k) = \int \mathrm{d}x e^{ikx}(\Psi_0 \mp \frac{i}{ck}v_0)$$

  führt zurück zu d'Alembert aus §1.1.2 (A)
- Inkohärentes Licht besteht aus einer Superposition von Wellengruppen, die keine Phasenbeziehung zueinander haben.

Definitionen:

- *phasenstarre Kopplung*: ($\Delta\phi$ =const.) bedeutet, dass das Interferenzmuster das zeitliche Mittel überlebt
- *phasennichtstarre Kopplung*: ($\Delta\phi = \Delta\phi(t)$) bedeutet, dass das Interferenzmuster das zeitliche Mittel nicht überlebt.

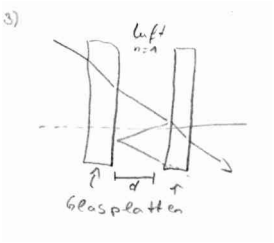


Abbildung 1.90: Interferenz ensteht dort, wo Teilzüge der Wellen übereinander liegen

Typischer Weise liegt die Kohärenzdauer bei $t_c \approx 10^{-8}s - 10^{-9}s$. Die Kohärenzlänge entspricht in etwa 10^6 Wellenlängen.
Im Langzeitmittel verschwinden die Interferenzmuster:

$$< I >_T = \left\langle (E_1 + E_2)^2 \right\rangle_T = \left\langle E_1^2 \right\rangle_T + \left\langle E_2^2 \right\rangle_T + \langle E_1^* E_2 + E_2 E_1^* \rangle_T$$
$$\Rightarrow = \langle I_1 \rangle_T + \langle I_2 \rangle_T + \langle E_1 E_2 \cos\Delta\phi \rangle_T$$

Man definiert den **Kontrast** ν als:

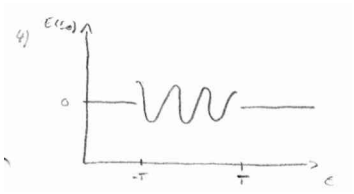


Abbildung 1.91: Kohärenz

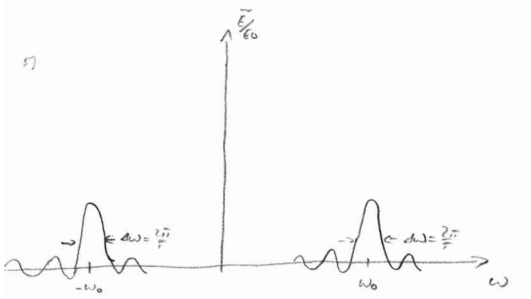


Abbildung 1.92: Experiment

$$\boxed{\nu = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} - I_{min}}}$$

Abbildung 1.93: Yong'scher Doppelspalt

1.9 Mathematischer Einschub: Green'sche Funktionen

1.9.0 Motivation

Die GREEN'sche Funktion wird dazu dienen das HUYGENS'sche Prinzip und daraus die Beugungsphänomene abzuleiten. Außerdem soll die Dipolstrahlung wiederholt werden, als Vorbereitung für Streuung.
Hierzu benötigen wir nun Lösungen der inhomogenen Wellengleicheung (d.h. mit Quellen).
Für gegebenes ϱ und $\underline{j}$ soll das Ursache-Wirkungsprinzip untersucht werden:
Wir suchen also $\underline{E}$ & $\underline{B}$ wobei
$\underline{E}$ & $\underline{B}$ für t_0 gemäß der ***Kausaliätätsforderung*** durch:

$$\varrho(t < t_0) \quad \& \quad \underline{j}(t < t_0)$$

bestimmt seinen.

1.9.1 Die inhomogenen Wellengleichungen

Im Vakuum seien monochromatische ϱ und $\underline{j}$ gegeben:

$$\varrho = \Re\{\tilde{\varrho}(\underline{r})e^{i\omega t}\}$$
$$\underline{j} = \Re\{\tilde{\underline{j}}(\underline{r})e^{i\omega t}\}$$

Gesucht sind (wie immer wird $\Re$ unterdrückt):

$$\underline{E} = \tilde{\underline{E}}(\underline{r})e^{i\omega t}$$
$$\underline{B} = \tilde{\underline{B}}(\underline{r})e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned}
\text{MG 4} \quad \nabla \times \tilde{\underline{B}} &= \mu_0 \tilde{\underline{j}} + \frac{i\omega}{c^2}\tilde{\underline{E}}c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \\
\text{MG 2} \quad \nabla \times \tilde{\underline{E}} &= -i\omega \tilde{\underline{B}} \\
\nabla \times (\text{MG 4}) = \nabla \times \nabla \times \tilde{\underline{B}} &= -\nabla^2 \tilde{\underline{B}} \\
&= \mu_0 \nabla \times \tilde{\underline{j}} + \frac{i\omega}{c^2} \nabla \times \tilde{\underline{E}} \\
&\overset{\text{MG 2}}{=} \mu_0 \nabla \times \tilde{\underline{j}} + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\underline{B}}
\end{aligned} \tag{1.164}$$

$$\Rightarrow \left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right] \tilde{\underline{B}}(\underline{r},\omega) = -\mu_0 \nabla \times \tilde{\underline{j}} \tag{1.165}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times (\text{MG } 2) = \nabla \times \left(\nabla \times \underline{\tilde{E}}\right) &= \nabla\left(\nabla \cdot \underline{\tilde{E}}\right) - \nabla^2 \cdot \underline{\tilde{E}} \\ &= -i\omega \nabla \times \underline{\tilde{B}} \\ &\overset{\text{MG } 4}{=} -i\omega\left(\mu_0 \underline{\tilde{j}} + \frac{i\omega}{c^2}\underline{\tilde{E}}\right) \\ \nabla \cdot (\text{MG } 4) = \nabla \cdot \underline{\tilde{E}} &= \frac{ic^2}{\omega}\mu_0 \nabla \cdot \underline{\tilde{j}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right] \underline{\tilde{E}}(\underline{r},\omega) = i\omega\mu_0 \left[\underline{\tilde{j}}(\underline{r},\omega) + \frac{c^2}{\omega^2}\nabla\left(\nabla \cdot \underline{\tilde{j}}(\underline{r},\omega)\right)\right] \tag{1.166}$$

Die erzeugten (ausgestrahlten) Felder genügen den (FOURIERtransformierten) inhomogenen Wellengleichungen ("***Helmholtz-Gleichungen***") mit Quellen, die durch $\underline{\tilde{j}}(\underline{r},\omega)$ gegeben sind.

1.9.2 Die Green'sche Funktion der Helmholtzgleichung

Gesucht ist die spezielle Lösung der inhomogenen skalaren Helmholtzgleichung:

$$\boxed{\left[\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right] \tilde{\Psi}(\underline{r}) = \tilde{F}(\underline{r})} \tag{1.167}$$

(dabei ist $\tilde{F}$ die gegebene Inhomogenität [Quelle])
welche die geeigneten Randbedingungen erfüllt (s. später) und durch:

$$\boxed{\tilde{\Psi}(\underline{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' G(\underline{r},\underline{r}')\tilde{F}(\underline{r}')} \tag{1.168}$$

gegeben ist (für "alle" $\tilde{F}$).
$\underline{G}(\underline{r},\underline{r}')$ heißt **Green*'sche Funktion***.
Lösung durch FOURIERtransformation von Gleichung (1.167):

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3 r e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}}(1.167) \quad &\Rightarrow \left(k_0^2 - k^2\right)\tilde{\tilde{\Psi}}(\underline{k}) = \tilde{\tilde{F}}(\underline{k}) = \int \mathrm{d}^3 r e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}}\tilde{F}(\underline{r}) \\ \Rightarrow \tilde{\tilde{\Psi}}(\underline{k}) &= \mathrm{FT}\left[\tilde{\Psi}(\underline{r})\right](\underline{k}) = \frac{\tilde{\tilde{F}}(\underline{k})}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2}\end{aligned}$$

Damit ist die Gleichung gelöst, und wir führen eine FOURIERrücktransformation durch:

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(\underline{r}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}\tilde{\tilde{\Psi}}(\underline{k}) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2}\int \mathrm{d}^3 r' e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}'}\tilde{F}(\underline{r}')\end{aligned}$$

Für absolut integrable Funktionen darf man nun das Integral vertauschen und erhält (vergleiche Gleichung 1.168):

$$\tilde{\Psi}(\underline{r}) = \int d^3r' G(\underline{r} - \underline{r}')\tilde{F}(\underline{r})$$
$$\text{mit} \quad G(\underline{\varrho} = \underline{r} - \underline{r}') = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\underline{k}\cdot\underline{\varrho}}}{k_0^2 - k^2} \tag{1.169}$$

Bemerkungen:

- Dasselbe Ergebnis folgt als Lösung der Gleichung:

$$\left(\nabla_r^2 + k_0^2\right) G(\underline{r},\underline{r}') = \delta^3(\underline{r} - \underline{r}')$$

  weil $\mathrm{FT}\left[\delta(\underline{r} - \underline{r}')\right](\underline{k}) = \int \mathrm{d}^3r e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}}\delta^3(\underline{r} - \underline{r}') = e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$
  Diese Gleichung wird häufig als Abkürzung verwendet.

- Zur speziellen Lösung Ψ_s (1.168) kann natürlich eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung addiert werden:

$$\tilde{\Psi}(\underline{r}) = \underbrace{A' e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}}_{=*} + \Psi_s(\underline{r})$$

  * ist dabei die Lösung der homogenen Helmotzgleichung, weil für $\omega = kc$:

$$\left[\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right] e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} = 0$$

- eine andere Lösung ist:

$$\tilde{\Psi}(\underline{r}) = \Psi_s(\underline{r}) + \frac{A_+}{4\pi r} e^{i\frac{\omega}{c}r} + \frac{A_-}{4\pi r} e^{-i\frac{\omega}{c}r}$$

  also eine Superposition einer einlaufenden ($A_+ \dots$) und einer auslaufenden ($A_- \dots$) Welle.
  Beweis: (mit §1.1.2(B))

$$\left(\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \frac{1}{r} e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} = \frac{1}{r}\left(\partial_r^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} = 0$$

Die Koeffizienten A',$A_\pm$ der möglichen homogenen Lösung müssen durch Randbedingungen festgelegt werden.

SOMMERFELD'sche Ausstrahlungsbedingung:
Die spezielle Lösung $\tilde{\Psi}_s$ (und damit die GREEN*'sche Funktion $G(\underline{r},\underline{r}')$) muss im weiten Abstand von der Quelle eine Kugelwelle werden und damit Folgendes erfüllen:*

$$r\left(\frac{\partial}{\partial r} G(\underline{r},\underline{r}') + i\frac{\omega}{c} G(\underline{r},\underline{r}')\right) \overset{r\to\infty}{\to} 0 \tag{1.170}$$

Dann strahlen die Wellen nach außen (Kausalitätsprinzip ist erfüllt).
Probe:

$$r\left(\partial_r + i\frac{\omega}{c}\right)\frac{A_\pm}{r}e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} = \left(\pm i\frac{\omega}{c} + i\frac{\omega}{c} - \frac{1}{r}\right)A_\pm e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} \overset{r\to\infty}{\to} 0$$

für $A_+ = 0$ und $A_- \neq 0$

Behauptung: $\underline{G}(\underline{\varrho})$ aus Gleichung (1.169) ist eine auslaufende Kugelwelle:
Mit $\varrho = |\underline{\varrho}| = |\underline{r} - \underline{r}'|$ gilt:

$$\Rightarrow G(\underline{\varrho} = \underline{r} - \underline{r}') = -\frac{1}{4\pi\varrho}e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho} \tag{1.171}$$

Einen Beweis davon erhält man durch Kontour-Integration der Gleichung (1.169). Alternativ kann man (1.171) in (1.169) einsetzen und damit verifizieren, dass:

$$\int \mathrm{d}^3\varrho e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\varrho}}G(\underline{\varrho}) = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2}$$

Dieser Beweis wurde in der Vorlesung durchgeführt:

$$\int \mathrm{d}^3\varrho e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\varrho}}G(\underline{\varrho}) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\infty}\mathrm{d}\varrho\,\varrho^2\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu e^{-ik\varrho\mu}\frac{-1}{4\pi\varrho}e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho}$$

hier wurden Kugelkoordinaten verwendet und μ ist der Kosinus von dem Winkel zwischen $\underline{k}$ und $\underline{\varrho}$.

$$= \frac{i}{2k}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\varrho e^{-\frac{i\omega}{c}\varrho}\left(e^{ik\varrho} - e^{-ik\varrho}\right) = *$$

ACHTUNG: Dieses Integral konvergiert nicht für $\varrho \to \pm\infty$, da dann $e^{\pm ik\varrho - \frac{i\omega}{c}\varrho}$ nicht verschwindet. Wir wollen aber die Annahme treffen, dass gilt:

$$e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho \pm ik\varrho} \overset{\varrho\to\infty}{\to} 0 \tag{1.172}$$

und man naiv weiter rechnen kann:

$$\begin{aligned} * &= \frac{i}{2k}\left(\frac{1}{i\left(\frac{\omega}{c} - k\right)} - \frac{1}{i\left(\frac{\omega}{c} + k\right)}\right) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2} \end{aligned}$$

womit der Beweis beendet wäre. Es gilt also noch zu begründen, warum 1.172 erfüllt ist. Dazu gehen wir zurück zur inhomogenen Wellengleichung:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\Psi(\underline{r},t) = -\Box\Psi(\underline{r},t) = F(\underline{r},t)$$

Kausalität:

- Wir wollen, dass $\Psi \equiv 0$ bevor F eingeschaltet wurde
- Danach soll Ψ glatt anwachsen
- F muss also adiabatisch eingeschalten werden, d.h.:

$$F(\underline{r},t) \to F' = F(\underline{r},t)e^{\varepsilon} \quad \text{damit} \quad F'(t \to \infty) \to 0$$

Damit erhalten alle Frequenzen ω einen Imaginärteil:

$$\begin{aligned} F(t) &= \tilde{F}e^{i(\omega_0 - i\varepsilon')t} \\ \Rightarrow k_0 &= \frac{\omega_0}{c} - i\varepsilon' \\ \Rightarrow e^{-i\left(\frac{\omega_0}{c} - i\varepsilon \mp k\right)\varrho} &\propto e^{-\varepsilon\varrho} \overset{\varrho\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

Fazit:
Die Green*'sche Funktion, die 1.169 und 1.170 erfüllt ist durch die Gleichung:*

$$G(|\underline{\varrho}| = |\underline{r} - \underline{r}'|) = -\frac{1}{4\pi\varrho}e^{-i\frac{\omega}{c}\varrho}$$

gegeben. Und die spezielle Lösung der homogenen Helmoltzgleichung 1.167 lautet:

$$\tilde{\Psi}(\underline{r},\omega) = \frac{-1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}e^{-\frac{i\omega}{c}|\underline{r}-\underline{r}'|}\tilde{F}(\underline{r}',\omega) \tag{1.173}$$

Bemerkungen:

- Die Kausalität ist für $\omega \to \omega - i\varepsilon$ erfüllt.
- Symmetrie (Reziprozität):
$$G(\underline{r},\underline{r}') = G(\underline{r}',\underline{r})$$
- Für translationsinvariante Systeme gilt:
$$G(\underline{r},\underline{r}') = G(\underline{r} - \underline{r}')$$
- Für rotationssymmetrische (isotrope) Systeme gilt sogar:
$$G(\underline{r},\underline{r}') = G(|\underline{r} - \underline{r}'|)$$
- G hängt von den Randbedingungen ab

1.9.3 Randwertprobleme

Mit der Greenschen Fkt kann $\widetilde{\psi}$ auch ohne Quellen aus vorgegebenen Werten am Rand bestimmt werden:
Beh: Das Feld $\widetilde{\psi}$, das die homogene Helmholzgleichung

$$(\nabla^2 + k_0^2)\widetilde{\psi} = 0 \text{ für } z > 0 \tag{1.174}$$

Abbildung 1.94:

und für $z > 0$ die Ausstrahlbedingung (1.17) erfüllt und für $z = 0$ vorgegebene Werte annimmt

$$\widetilde{\psi}(x,y,z=0) = \widetilde{\psi_0}(x,y) \tag{1.175}$$

ergibt sich mit der Greenschen Funktion für $z > 0$ zu

$$\widetilde{\psi}(\underline{r}) = (-2)\int \underbrace{\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'}_{\mathrm{d}o'}\psi_0(x',y')(\partial_{z'}G(\underline{r}-\underline{r'}))|_{z'} = 0 \tag{1.176}$$

Bew: Da $(\nabla_r^2 + k_0^2)\int\cdots G(\underline{r}-\underline{r'})\cdots|_{z>0} = 0$ & $(\nabla^2 + k_0^2)\int\cdots \overset{r\to\infty}{\Longrightarrow}$ erfüllt, muss nur (1.175) gezeigt werden.

Abbildung 1.95:

Mit $\rho = |\underline{r}-\underline{r'}|$, $s = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$
$\to \rho = \sqrt{s^2+(z-z')^2}$; $\rho_0 = \sqrt{s^2+z^2}$ folgt $\partial_{z'} = \frac{\partial\rho}{\partial z'}\partial\rho = \frac{z'-z}{\rho}\partial\rho$.

$$\begin{aligned}\psi &= \int \frac{\mathrm{d}o'}{2\pi}\psi_0\frac{-z}{\rho_0}\partial_{rho}\frac{1}{\rho}e^{-i\frac{\omega}{c}\rho}|_{z'=0}\\ &= \int \frac{\mathrm{d}o'}{2\pi}\psi_0 z\frac{1+i\frac{\omega}{c}\rho_0}{\rho_0^3}e^{-i\frac{w}{c}\rho_0}\end{aligned} \tag{1.177}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}s\cdot\psi_0 e^{-i\frac{\omega}{c}\rho_0}\frac{zs(1+\overbrace{i\frac{\omega}{c}\sqrt{z^2+s^2}}^{<<1 \text{ für } z,s\to 0})}{(z^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Betrachte

$$I(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}s\underbrace{\frac{zs}{(z^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}}_{i(s)}$$

$$\text{mit Wert } I(z) \overset{u=\frac{s}{z}}{=} \int_0^\infty \mathrm{d}u\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = 1 \text{ (siehe Bronstein)} \tag{1.178}$$

Für $z \to 0$ entwicklt $i(s)$ stärkeren Peak bei $s \approx z \to 0$ im Limes $z \to 0$ trägt also nur Bereich $s \approx z \approx 0$ bei ("$i(s) \to \partial(s)$ für $z \to 0$")

$$\begin{aligned}\Rightarrow \psi(\underline{r}) \overset{z\to 0}{\Longrightarrow} \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}\psi_0(x'=x+s\cos\varphi, y'=y+s\sin\varphi)|_{s=0}\\ = \psi_0(\underline{r})|_{z=0}\end{aligned} \tag{1.179}$$

Abbildung 1.96:

Bem:(*) Verallgemeinerung auf glatte, nicht-ebene Randflächen möglich.
(*) Greensche Funktion dient zum Lösen von part Diff.Gl. mit Quellen, Rand- und Anfangswertproblemen (physikalische Übersetzung: Feld in Volumen V bestimmt durch Anfangsfeld).
(*) Fernfeldnäherung für $|\underline{r}| >> d$ Objektgröße.

Abbildung 1.97:

Wie oben $e^{-i\frac{w}{c}|r-r'|} \approx e^{-i\frac{w}{c}r+i\underline{kr'}}$ für $\partial = \frac{\mathrm{d}^2}{\lambda r} << 1$

$$\overset{(1.177)}{\Longrightarrow} \psi = i\frac{\omega}{c}\cos\theta\frac{e^{-i\frac{w}{c}r}}{r}\int_\sigma \frac{\mathrm{d}o'}{2\pi}e^{ikr'}\psi_0(r')|_{z'=0} \tag{1.180}$$

Mit σ als strahlende Fläche mit maximaler Weite d.

1.10 Beugung

1.10.1 Beugung von Wellen

Abbildung 1.98: Beugung am Loch

Welle läuft auch in geometrischem Schatten (Welle wird abgelenkt), wenn $d \gg \lambda$ verletzt ist.

Abbildung 1.99:

$\Rightarrow$ Effekt wichtiger je größer λ (rot stärker als blau gebeugt). Erklärung mit Huygenschem Prinzip $\rightarrow$ Feld als ob in Öffung viele in Phase schwingende Sender wären.

1.10.2 Kirchhoffsche Ableitung des Hygenschen Prinzips

Gesucht gebeugtes Licht, das durch beleuchtete Öffnung in Schirm erzeugt wird. ($\hat{=}$ vorgegebenes E_0 auf Fläche σ strahlt im Halbraum $z > 0$)
$\Rightarrow$ Lsg aus

$$\widetilde{E}(\underline{r},\underline{\omega}) = \frac{i}{\lambda}\int_{z'=0}\mathrm{d}o'\widetilde{E}_0(\underline{r'})\cos\theta\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r'}|}e^{-\frac{i\omega}{c}|\underline{r}-\underline{r'}|} \tag{1.181}$$

mit $\cos\theta = \frac{z}{|\underline{r}-\underline{r'}|}$& für $|\underline{r}-\underline{r'}| >> \lambda$
Kirchhoff-Näherungen:

- (i) Feld $\widetilde{E}_0$ auf Fläche σ sein einfallendes Feld (ungestört durch Schirm !)
- (ii) Feld sonst bei $z = 0$ sei $\equiv 0$
- (iii) Vektorcharakter von E vernachlässigt

(i)-(iii) sind im Widerspruch zu MG & Mat.Gl und können nur für Abstände vom Schirm $>> \lambda$ stimmen.

$$\Rightarrow d >> \lambda \text{ gefordert für Beugung}$$

$$\boxed{\widetilde{E}(\underline{r},\underline{\omega}) = \frac{i}{\lambda}\int_\sigma \mathrm{d}o' \widetilde{E}(\underline{r'})\frac{\cos\theta}{|\underline{r}-\underline{r'}|}e^{-\frac{i\omega}{c}|\underline{r}-\underline{r'}|}} \tag{1.182}$$

Prinzip von Huygens-Fresnel: Die auf Öffnung σ fallende Welle pflanzt sich fort, als ob von jedem Pkt von σ eine Kugelwelle ausginge.
Bem:

- Integral (1.182) gibt Fresnelsche Beugung
- Fernfeldnäherung (1.180) in (1.182) gibt Frauenhoferbeugung

1.10.3 Fraunhofer-Beugung

Wir verwenden 2 Näherungen:

- Einfallendes Licht sei eben, die Lichtquelle sei weit entfernt, d.h. $\tilde{E}_I = A \cdot e^{-i\frac{c}{\omega}\underline{n'}\cdot\underline{r}}$
- Die Fernfeldnäherung: $\delta = \frac{d^2}{r\lambda} \ll 1 \Leftrightarrow r \gg d$, d.h. wir haben weite Abstände und kleine Öffnungen

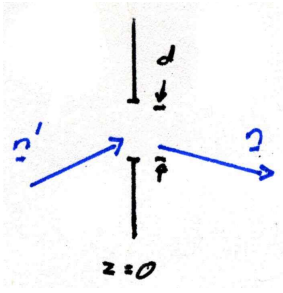


Abbildung 1.100: FRAUNHOFER-Beugung

Aus den Formeln des vorherigen Abschnittes gilt dann:

$$\boxed{\tilde{E}(\underline{r},\omega) = A \cdot \frac{i\cos\vartheta}{\lambda r} \cdot e^{-i\frac{\omega}{c}r}\int_\sigma \mathrm{d}x'\ \mathrm{d}y'\, e^{i(k_x x' + k_y y')}} \tag{1.183}$$

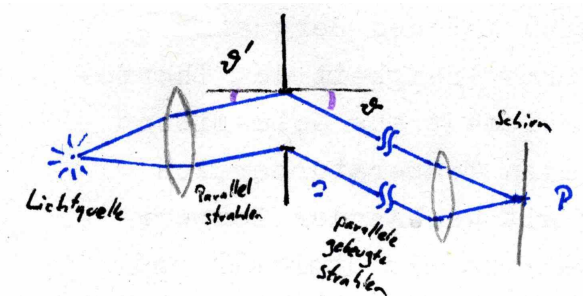


Abbildung 1.101: Strahlengang

mit dem Wellenvektor $\underline{k} = \frac{\omega}{c}(\underline{n} - \underline{n}')$, der die Gleider $k_x = \frac{\omega}{c}(n_x - n'_x)$ und $k_y = \frac{\omega}{c}(n_y - n'_y)$ enthält.

Wir beobachten das Feld bei P:

$$\boxed{\tilde{E} \propto \int_\sigma \mathrm{d}x' \; \mathrm{d}y' \, e^{i(k_x x' + k_y y')}} \tag{1.184}$$

Fazit: In FRAUNHOFER-Näherung ist das Beugungsbild die FOURIERtransformierte der Öffnung σ

1.10.3.1 Faltungen

Sei die Fläche σ eine regelmäßige Anordnung identischer Teilflächen σ_n der Breite a, der Länge b und dem Abstand d in x-Richtung.

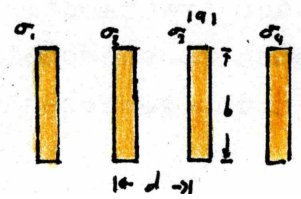


Abbildung 1.102: Gitter

$$\sigma = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n \tag{1.185}$$

Das Beugungsbild davon ist dann:

$$\tilde{E} = \int_\sigma \mathrm{d}o' \, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}'}|_{z=0} = \sum_{n=1}^{N} \int_{\sigma_n} \mathrm{d}o' \, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}'}|_{z=0} \tag{1.186}$$

Wir führen Variablen ein: $\underline{r}'_n = \underline{r}' - d(n-1)\underline{\hat{x}}$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{N} e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}\,(n-1)d}}_{Gitterbeugungsbild} \cdot \underbrace{\int_{\sigma_n} \mathrm{d}x'_n \; \mathrm{d}y'_n \, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}'_n}}_{Beugungsbild\,eines\,der\,\sigma_n} \tag{1.187}$$

Betrachten wir die Spalte σ_n einzeln, so hat jedes von n = 1 bis N das identische Beugungsbild:

$$\tilde{E}_{ES} \propto \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x'_n \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}y'_n \, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}'_n} \tag{1.188}$$

Der Term nach dem Summenzeichen ist das Beugungsbild eines Gitters von unendlich dünnen Strichen. Das gesamte Bild ist ein Produkt im k-Raum, im Ortsraum entspricht dies einer Faltung.

1.10.3.2 Einzelspalt

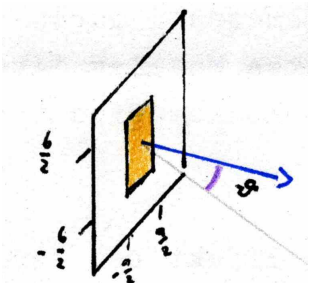


Abbildung 1.103: Einzelspalt

$$\tilde{E} \propto \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x' \, e^{ikx'} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}y' \, e^{iky'} = a \cdot b \cdot \frac{\sin\frac{k_x a}{2}}{\frac{k_x a}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{k_y b}{2}}{\frac{k_y b}{2}} \tag{1.189}$$

Im folgenden Plot haben wir die Intensität $I = |\tilde{E}|^2 \propto \frac{sin^2 u}{u^2}$ gegenüber einer Variablen u aufgetragen:

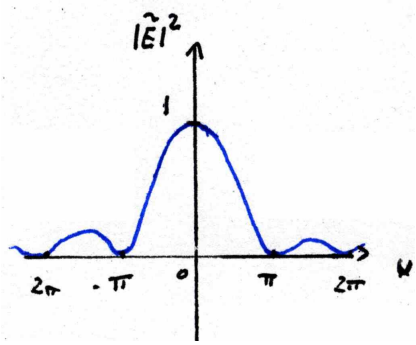


Abbildung 1.104:

Für kleine Winkel ϑ ...

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sin\vartheta \approx \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vartheta \tag{1.190}$$

... entspricht die Breite des Bildes dem Winkel des ersten Minimums:

$$\frac{k_x a}{2} = u = \pm\pi \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \pm\frac{\lambda}{a} \tag{1.191}$$

1.10.3.3 Gitter aus unendlich dünnen Strichen

$$\tilde{E}_{Gitter} \propto \sum_{n=1}^{N} e^{ik\cdot\underline{x}\,(n-1)d} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' e^{ik_x x'} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\delta(x - d(n-1))}_{Fläche} = \frac{1 - e^{ik_x dN}}{1 - e^{ik_x d}} \tag{1.192}$$

womit wir für die Intensität erhalten:

$$I \propto |\tilde{E}|^2 \propto \frac{\sin^2 \frac{k_x dN}{2}}{\sin^2 \frac{k_x d}{2}} \tag{1.193}$$

Die Hauptmaxima treten auf, wenn benachbarte Strahlen konstruktiv interferieren. Dies ist der Fall, wenn für ganzzahlige n gilt:

$$\boxed{\frac{k_x d}{2} = n\pi} \tag{1.194}$$

Ihre Intensität ist proportional zu N^2. Dazwischen gibt es mehrere Minima, die die $(N-2)$ Nebenmaxima begrenzen. Für sie gilt:

$$\frac{N k_x d}{2} = \pm\pi, \pm 2\pi, ..., \pm (N-1)\pi \tag{1.195}$$

Die Breite der Maxima ist jeweils proportional zu $\frac{2\pi}{N}$.

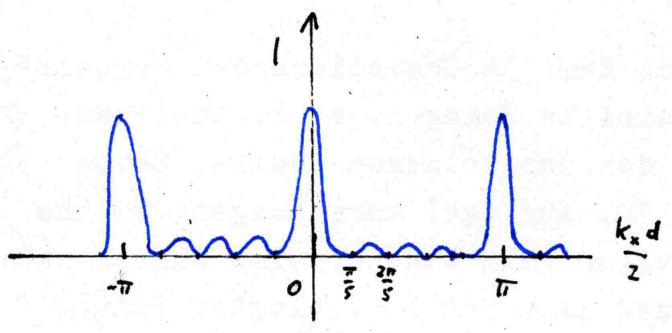


Abbildung 1.105: Beugungsbild eines Gitters aus 5 Spalten

Auf einem Schirm erscheinen diese unter dem Winkel $k_x = k \sin\vartheta \approx \frac{2\pi\vartheta}{\lambda}$. Nach folgender Gleichung

$$\frac{k_x d}{2} = \frac{\pi d \vartheta}{\lambda} \tag{1.196}$$

liegt damit jedes Hauptmaximum für $n \neq=$ unter einem anderen Winkel für verschiedene λ, wir haben damit ein Spektrometer.

1.10.4 Beugung an kreisförmiger Blende

σ sei ein Kreis mit dem Radius a. Wir gehen von ebenem Einfall aus, d.h. $\underline{n}' = \hat{\underline{z}}$ und $n'_x = n'_y = 0$.

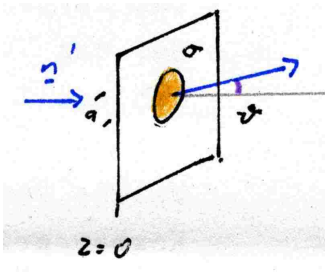


Abbildung 1.106: Kreisförmige Blende

1.10.4.1 Fraunhofer-Beugung

Hierbei vereinfachen wir weiterhin: es werden nur kleine Winkel ϑ betrachtet, daraus folgt $\cos\vartheta \approx 1$ und $k_x \approx \frac{\omega}{c} \cdot \vartheta$:

$$\tilde{E} \propto \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a \mathrm{d}r'\, r' e^{i\frac{\omega}{c}\vartheta r' \cos\varphi} \tag{1.197}$$

Daraus folgt für die Intensität mit J_1 als Besselfunktion erster Ordnung:

$$|\tilde{E}| \propto \left(\frac{J_1\left(\frac{2\pi a\vartheta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{2\pi a\vartheta}{\lambda}\right)} \right)^2 \tag{1.198}$$

Für die Besselfunktion gilt:

$$J_1(x) \to \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } x \to 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) & \text{für } |x| \to \infty \end{cases} \tag{1.199}$$

Das Beugungsmaximum liegt auf einem Airyscheibchen für die Winkel $-0{,}6\frac{\lambda}{a} \leqslant \vartheta \leqslant 0{,}6\frac{\lambda}{a}$

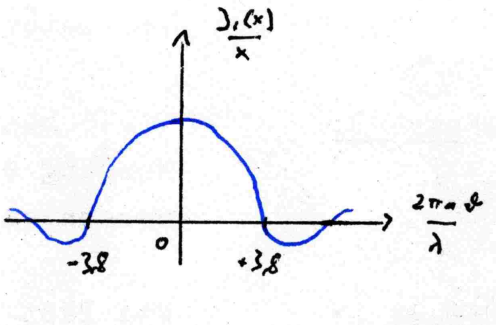


Abbildung 1.107: Besselfunktion

1.10.4.2 Fresnelbeugung und Fresnelsche Zonen

Wann immer die Fernfeldnäherung $d^2 \ll \lambda r$ nicht gilt, muss das folgende Integral verwendet werden:

$$\tilde{E}(\underline{r}) = \frac{i}{\lambda}\int_\sigma \mathrm{d}o' E_0 \underbrace{\frac{1}{\rho'}e^{-i\frac{\omega}{c}\rho'}}_{A}\cdot\underbrace{\frac{1}{\rho}e^{-i\frac{\omega}{c}\rho}}_{B} \tag{1.200}$$

wobei A die Kugelwelle vom Punkt Q am Ort r' darstellt und B die Bedeutung einer nach HUYGENS von der Fläche σ ausgehende Kugelwelle hat. Hierbei verwenden wir immer noch die Näherungen $\vartheta \ll \frac{\pi}{2}$ und damit $\cos\theta \approx 1$.

Qualitative Diskussion mit Hilfe der FRESNELschen Zonen: Es gibt verschiedene Lichtwe-

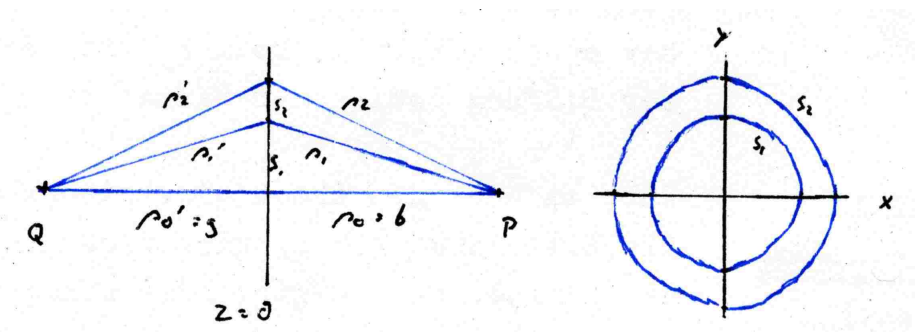


Abbildung 1.108: FRESNELbeugung

ge von Q nach P mit $\rho'_n + \rho_n = g + b + n\frac{\lambda}{2}$, wobei $n = 0{,}1{,}2....$ Die dazugehörigen Kreise haben die Radien s_n, wobei gilt:

$$s_n^2 + g^2 = \rho_n'^2 \quad \text{und} \quad s_n^2 + b^2 = \rho_n^2 \tag{1.201}$$

$$\rho'_n + \rho_n = g + b + n\,\frac{\lambda}{2}$$

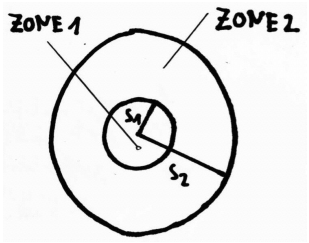


Abbildung 1.109: FRESNEL'sche Zonen

Zu Abb.1.109: Von einer Zone zur Nächsten ändert sich der Lichtweg um $\frac{\lambda}{2}$.
$\Rightarrow$ Deshalb gibt es destruktive Interferenz der nächsten-; konstruktive Interferenz der übernächsten Zone.

Zu Abb.1.110: Je nachdem ob gerade oder ungerade Anzahl von Zonen in Blendenöffnung passen gibt es also destruktive oder konstruktive Interferenzen.

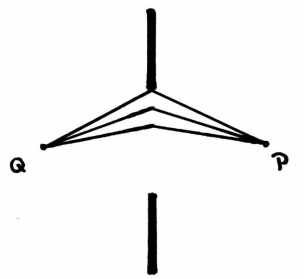


Abbildung 1.110: Zonen an Blendenöffnung

$\Rightarrow$ Maximum (n ungerade): $\rho'_n + \rho_n - g - b = n\,\frac{\lambda}{2}$
$\Rightarrow$ Minimum (n gerade):

1.11 Streuung

1.11.1 Phänomen der Streuung von Wellen

Z.B. werden Wasserwellen an Hindernis abgelenkt. Oder (Kinoprojektor-)Licht wird an Ascheteilchen in der Luft abgelenkt.

Effekt der Ablenkung wird als Streuung bezeichnet wenn Größe L des Hindernisses kleiner ist als die Wellenlänge ($L < \lambda$).
(Für $L \gg \lambda$ ist es Beugung; bei $L \approx \lambda$ spricht man von Mie-Streuung)

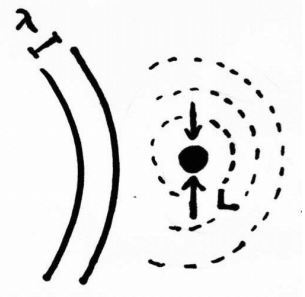


Abbildung 1.111: Schema der Streuung an Teilchen

Sehr wichtig für Strukturanalyse kleinster Objekte (Atom, -kern, etc.) und transparenter Festkörper.
Wenn Frequenz des gestreuten Feldes = Frequenz des einfallenden Feldes spricht man von "elastischer Streuung" (Rayleigh, ...), bei unterschiedlichen Frequenzen von inelastischer (Brilluin, Compton, ...).

1.11.2 Streuquerschnitte

Information über kleinste Objekte gewinnt man nur durch Messung der Energie-(≙ Frequenz-) und Impuls- (Wellenvektor-, Streuwinkel-) Abhängigkeit der gestreuten Welle bei bekannter eingestrahlter Welle.

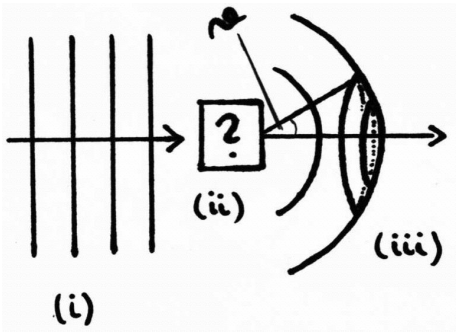


Abbildung 1.112: Streuung an unbekanntem Objekt

- **(i):** Einfallende Welle weit vor Streuer: eben, monochromatisch, $\underline{E_I} = \underline{E_o}\, e^{i(\omega t - \underline{kr})} \quad \Rightarrow$ $< \underline{S_I} >= \frac{\epsilon_0 c}{2} |\underline{E_0}|^2$
- **(ii):** Streuprozess in [?]. Wechselwirkung von Welle mit Atom(en) etc. (kompliziert)
- **(iii):** Auslaufende Kugelwelle. (Abb.1.113)

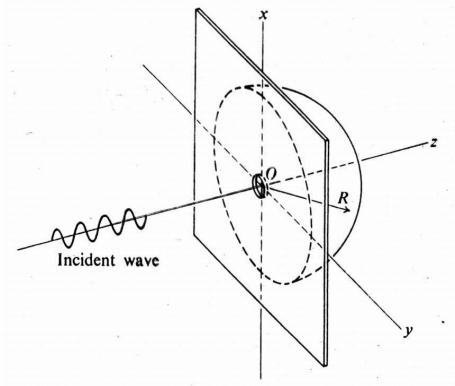


Abbildung 1.113: Auslaufende Kugelwelle

Intensität $\underline{S}$ in Oberflächenelement

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\underline{o} &= \underline{\hat{n}}\, (r\ \mathrm{d}\vartheta)\, (r\ \sin\vartheta\ \mathrm{d}\varphi) \\ &= \underline{\hat{n}}\, r^2 \sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi \\ &= \underline{\hat{n}}\, r^2\, \mathrm{d}\Omega \qquad \text{Raumwinkelelement: } \mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

mit

$$\int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \sin\vartheta = \oint \mathrm{d}\Omega = 4\pi$$

Zeitgemittelte in Winkel $\mathrm{d}\Omega = \frac{n}{r^2}\,\mathrm{d}\underline{o}$ gestreute Intensität ist messbar, und unabhängig von r (siehe unten).

$$\mathrm{d}S_s = r^2 < \underline{Sn} > \mathrm{d}\Omega$$

(A) Totaler Streuquerschnitt σ

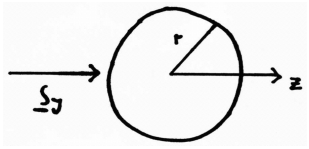


Abbildung 1.114: Einstrahlende Intensität auf Streuer

$$\sigma = \frac{\text{totale durch Kugelfl. } 4\pi r^2 \text{ gestreute zeitl. gemittelte Intensität}}{\text{totale eingestrahlte zeitl. gem. Int.}}$$

$$\sigma = \frac{\oint \mathrm{d}\Omega \, r^2 < \underline{S_s}\,\underline{n} >}{< \underline{S_I}\,\underline{\hat{z}} >}$$

Bem: $[\sigma] = m^2$;σ ist eine Fläche ($\hat{=}$ die Streuer dem eingehenden Fluss präsentiert)

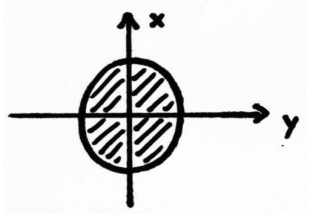


Abbildung 1.115: Totaler Streuquerschnitt

(B) Differentieller Streuquerschnitt $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\text{in Oberflächenelement } r^2\,\mathrm{d}\Omega \text{ um } \Omega(\vartheta,\varphi) \text{ gestreute zeitl. gem. Intensität}}{\text{totale eingestreute zeitl. gem. Intensität}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{r^2 < \underline{S_I}\underline{n} >}{< \underline{S_I}\,\underline{\hat{z}} >}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \oint \mathrm{d}\Omega \, \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$$

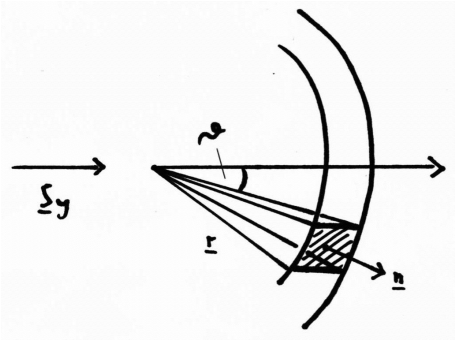


Abbildung 1.116: Differentieller Streuquerschnitt

Gibt mehr Information (Winkelabhängigkeit) über Streuprozess als σ.

Bem: Da $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\Omega,\omega)$ hier auch von ω abhängt, spricht man häufig vom doppelten differentiellen Streuquerschnitt $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\omega}$ und definiert dann $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \int \mathrm{d}\omega\, \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\omega}$.

Bsp: Streuquerschnitt der Beugung an Kreislochblende. (Abb.1.116)

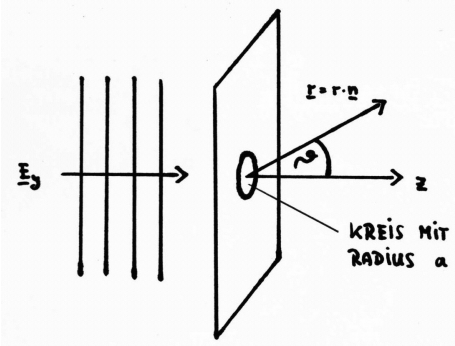


Abbildung 1.117: Streuung an Kreislochblende

$$\tilde{E} \overset{\vartheta \ll \lambda/2}{=} \tilde{E}_I \frac{i}{\lambda\, r}\, e^{-i\frac{\omega}{c}r} \int_\sigma \mathrm{d}o'\, e^{ik\underline{r'}}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\tilde{E}/\tilde{E}_I\right|^2 = \left(\frac{k\,a^2}{r}\right)^2 \left(\frac{J_1(k\,a\,\vartheta)}{k\,a\,\vartheta}\right)^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = a^2\,(k\,a)^2 \left(\frac{J_1(k\,a\,\vartheta)}{k\,a\,\vartheta}\right)^2} \tag{1.202}$$

Zu Abb.1.119: Starke Vorwärtsstreuung für $a \gg \lambda$.

Frequenzabhängigkeit: $\lambda \propto \frac{1}{\omega}$; je größer ω desto kleiner λ und desto engere Vorwärtsrichtung.

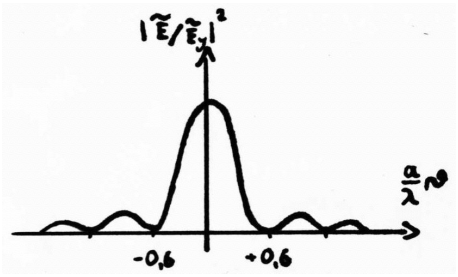


Abbildung 1.118: Beugungsdiagramm

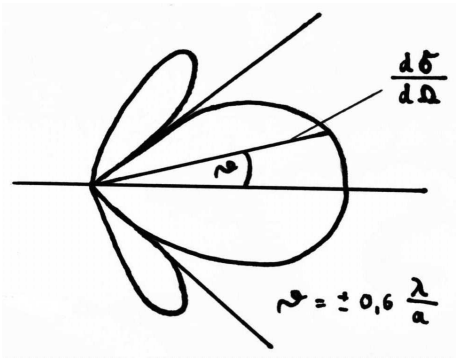


Abbildung 1.119: Streudiagramm

Geometrische Optik entspricht $\lambda \to 0 \Rightarrow$ nur Licht in exakte Vorwärtsrichtung $\vartheta = 0$.

Totaler Streuquerschnitt $\sigma = \oint \mathrm{d}\Omega \, \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$

$$\sigma = \underbrace{2\,\pi}_{(*)}\, a^2 \underbrace{\int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \, \sin\vartheta \left(\frac{J_1(k\,a\,\vartheta)}{\vartheta}\right)^2}_{(**)} \approx \pi\, a^2 \quad \text{Geom. Fläche der Blende für } \lambda \ll a$$

(*): Symmetrie um z-Achse $\int \mathrm{d}\varphi ... = 2\pi ...$

(**): $\approx \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \, \vartheta \, \frac{J_1^2(ka\vartheta)}{\vartheta^2} \approx \frac{1}{2}$ da $a \gg \lambda \Rightarrow \vartheta \ll 1$

1.11.3 Erinnerung Dipolstrahlung

Lösung der beiden inhomogenen Wellengleichungen mit nur 2 Näherungen.

(A) Lokalisierte Quelle und Fernfeldnäherung

$$\tilde{j}(|r'| > r_0, \omega) = 0 \quad \text{und} \quad |\underline{r}| \gg r_0$$

$\Rightarrow$ GREENsche Funktion der Helmholzgleichung vereinfacht zu ($\underline{k} = \hat{\underline{n}}\frac{\omega}{c}$)

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{-1}{4\,\pi\, r}\, e^{-i\frac{\omega}{c}r}\, e^{-i\,\underline{k}\,\underline{r}'}$$

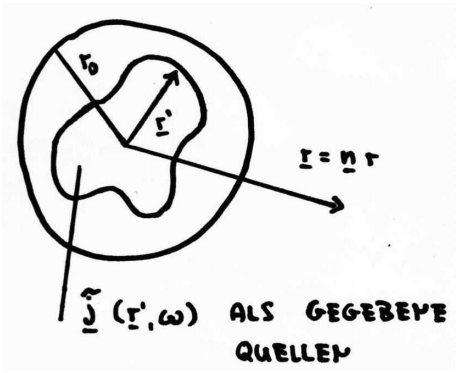


Abbildung 1.120: Gegebene Quellen

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tilde{B}(\underline{r},\omega) \overset{r\to\infty}{\to} \frac{-i\omega}{c}\left(\underline{n}\times\tilde{\underline{q}}(\underline{k},\omega)\right)\frac{1}{r}\,e^{-i\frac{\omega}{c}r}}$$

$$\boxed{\tilde{E}(\underline{r},\omega) \overset{r\to\infty}{\to} -c\left(\underline{n}\times\tilde{\underline{B}}(\underline{r},\omega)\right)}$$

$$\text{mit} \quad \boxed{\tilde{q}(\underline{k},\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\, e^{i\,\underline{k}\cdot\underline{r}'}\,\tilde{\underline{j}}(\underline{r}',\omega)}$$

FOURIER-transformierte Ströme in Quelle (z.B. Antenne) legen Fernfelder fest. Die Strahlungsfelder sind transversal ($\underline{n}\cdot\tilde{\underline{E}} = \underline{n}\cdot\tilde{\underline{B}} = \tilde{\underline{E}}\cdot\tilde{\underline{B}} = 0$ mit $\left|\tilde{\underline{B}}\right| = \frac{1}{c}\left|\tilde{\underline{E}}\right|$) und fallen für $r\to\infty$ wie $\frac{1}{r}$ ab.

$\Rightarrow$ Ausgestrahlte Energie im Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ um Richtung $\underline{n}$ (zeitl. gemittelt).
$\left(<\underline{S}>=\frac{\epsilon_0 c}{2}\,\underline{n}\left|\tilde{E}\right|^2 = \frac{\epsilon_0 c^3}{2}\,\underline{n}\left|\tilde{B}\right|^2\right)$

$$\boxed{P = \frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\omega} = \frac{\epsilon_0\,c}{2}\,\omega^2\left|\underline{n}\times\tilde{\underline{q}}(\underline{k},\omega)\right|^2} = \lim_{r\to\infty} r^2 <\underline{n}\cdot\underline{S}>$$

ist unabhängig vom Abstand r!

Bem: Ein zeitlich konstanter Strom $j \approx \tilde{j}(\omega)\,e^{i\omega t}\big|_{\omega=0}$ entspricht $\omega = 0$, also $\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\omega} = 0$. (Nur) nicht konstante Ströme $\hat{=}$ beschleunigte Ladungen strahlen.

(B) Multipolentwicklung

Für $|\underline{k}\cdot\underline{r}'| \ll 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad r_0 \ll \lambda$ kann $\tilde{q}(\underline{k},\omega)$ Taylor entwickelt werden:

$$\tilde{\underline{q}}(\underline{k},\omega) = \tilde{\underline{q}}(0,\omega) + i\underline{k}\cdot\tilde{\underline{\underline{Q}}}(0,\omega) + O(k^2)$$

Diese Entwicklung heißt Multipolentwicklung mit führendem Term

$$\boxed{\tilde{\underline{q}}(0,\omega) = \frac{i\,\omega\,\mu_0}{4\,\pi}\,\tilde{\underline{d}}(\omega)}$$

der Dipolstrahlung ($\tilde{\underline{\underline{Q}}}$: Quadrupolstrahlung, etc.).

Für Atome $\lambda \approx 10^{-7}$m , $r_0 \lesssim 10^{-9}$m gute Näherung. Wobei: $\tilde{\underline{d}}(\omega) = \int \mathrm{d}^3r'\,\underline{r}'\,\tilde{\rho}(\underline{r}',\omega)$ frequenzabh. Dipolmoment.

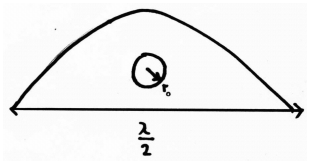


Abbildung 1.121: Diagramm zur Multipolentwicklung

1.11.4 Rayleigh-Streuung

Einfachstes Streumodell an gebundenen Ladungen.
Streuprozess modelliert, dass einfallende Welle polarisierbare Punktatome ("LORENTZ-Modell") zu Dipolstrahlung anregt.

$$\Rightarrow \quad \underline{\tilde{d}} = \alpha_0\,\epsilon_0\,\underline{E_I}(\underline{r}=0,t) = \alpha_0\,\epsilon_0\,\underline{\tilde{E}_I}\,e^{i\omega t}$$

α_0 : "atomare" Polarisierbarkeit ($\alpha_0 = \frac{e^2}{m_e\,\omega_0^2}$ laut Aufgabe 11)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\omega} = \frac{P_{eD}}{\frac{\epsilon_0 c}{2}|\underline{\tilde{E}_I}|^2} = \frac{\alpha_0^2\,\omega^4}{16\,\pi^2\,c^4}\,\sin^2\vartheta} \qquad \text{"RAYLEIGH-Streuquerschnitt"}$$

Bem:

- Also Dichtefluktuationen/Staubteilchen etc. in Luft führen zur blauen Farbe des Himmels
- Wenn Material (völlig) homogen ist, gibt es zu jedem Streuzentrum ein zweites im Abstand $\frac{\lambda}{2}$ in jede Richtung. $\Rightarrow$ Alles gestreute Licht interferiert destruktiv
  Nur in Vorwärtsrichtung interferieren gestreutes und einfallendes $\underline{E}$-Feld zum $\underline{D}$-Feld. (Siehe Erklärung zum Brechungsindex)

experimenteller Zugang
Wir behandeln ein einfachstes Streumodell:
ad(ii): Der Streuprozess modelliert, dass die einfallende Welle ein polarisierbares Punktatom (vgl. "LORENTZ-Modell" aus Aufgabe 11) zu Dipolstrahlung anregt:

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{d}}e^{i\omega t} &= \alpha_0\varepsilon_0\underline{E}_I(\underline{r}=0,t)\\ &= \alpha_0\varepsilon_0\tilde{\underline{E}}e^{i\omega t}\\ \alpha_0 &= \frac{e^2}{m_e\omega_0^2}\end{aligned} \tag{1.203}$$

$\underline{r}$ ist der Ort des Atoms, für die Frequenz ω gilt: $\omega \ll \omega_0$.
Im Allgemeinen heißt α_0 ***atomare Polarisierbarkeit.***

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\Omega} := \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{P_{\mathrm{eD}}}{\frac{\varepsilon_0 c}{2}|\underline{E}_I|^2} = \frac{\alpha_0^2\omega^4}{16\pi^2c^4}\sin^2\vartheta \tag{1.204}$$

Gleichung 1.204 stellt den Streuquerschnitt der RAYLEIGH-Strahlung dar.
Bemerkungen:

- Der Streuquerschnitt ist proportional zu ω^4, also stark abhängig von der Wellenlänge (dies ist auch ein Grund dafür, dass der Himmel blau ist)

- Aus der Winkelabhängigkeit folgt der Polarisierungseffekt.

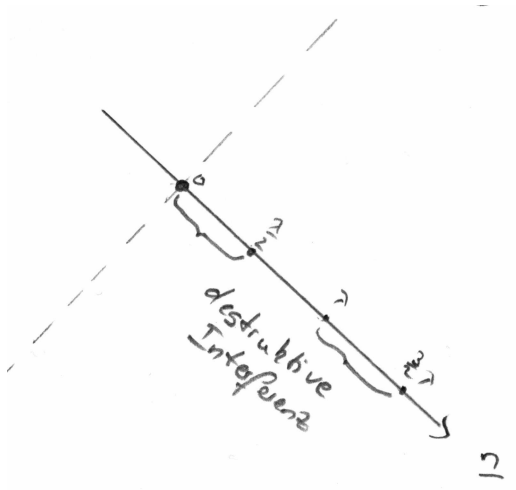


Abbildung 1.122: völlig homogenes Material

Wenn das Material (völlig) homogen ist, dann gibt es zu jedem Streuer ein zweites Streuzentrum im Abstand $\frac{\lambda}{2}$ in jede Richtung. Daraus folgt, dass alles gestreute Lich destruktiv weg interferiert. (s. Abbildung 1.122)

- Nur in Vorwärtsrichtung interferieren gestreutes und einfallendes Licht. Dies ergibt die Theorie des Brechungsindexes aus §1.3.4 $n(\omega)$.

- Damit der Himmel blau erscheint, ist also Fluktuation in den Streustärken notwendig (z.B. durch Dichtefluktuation oder durch Staubteilchen etc.).

1.11.5 Dipolstrahlung (Zusatzblatt)

Lösung der inhomogenen elektromagnetischen Wellengleichung mit 2 Näherungen.

(A) Fernfeld für $r \gg r_0$

(B) Multipolentwicklung für $r_0 \ll \lambda$
für lokalisierte Quellen (z.B. Atom $r_0 \lesssim 10^{-9}$m)

Für monochromatische Felder $\sim e^{i\omega t}$ gilt:

$$\left[\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}^2\right)\right] \underline{\tilde{B}}(\underline{r},\omega) = -\mu_0 \nabla \times \underline{\tilde{j}}(\underline{r},\omega)$$

$$\left[\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}^2\right)\right] \underline{\tilde{E}}(\underline{r},\omega) = i\,\omega\,\mu_0 \left[\underline{\tilde{j}} + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \nabla\left(\nabla \cdot \underline{\tilde{j}}\right)\right]$$

Lösung mit GREENscher Funktion der Helmholtzgleichung in Fernfeldnäherung.

$$G(\underline{r},\underline{r}') \to \frac{-1}{4\,\pi\,r}\; e^{-i\frac{\omega}{c}r}\; e^{i\,\underline{k}\,\underline{r}'}$$

Da

$$\int \mathrm{d}^3r'\; e^{i\,\underline{k}\,\underline{r}'}\;\nabla_{r'}\times\tilde{\underline{j}}(\underline{r}',\omega) = -i\frac{\omega}{c}\;\underline{n}\times\int \mathrm{d}^3r'\; e^{i\,\underline{k}\,\underline{r}}\;\tilde{\underline{j}}(\underline{r}',\omega)$$

$$\Rightarrow\quad \underline{\tilde{B}} \to \frac{-i\,\omega\,\mu_0}{4\,\pi\,c}\;\frac{1}{r}\;e^{-i\frac{\omega}{c}\,r}\;\underline{n}\times\int \mathrm{d}^3r'\; e^{i\,\underline{k}\,\underline{r}'}\;\tilde{\underline{j}}(\underline{r}',\omega)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{\underline{\tilde{B}} \to \frac{-i\,\omega}{c}\;\frac{1}{r}\;e^{-i\,\frac{\omega}{c}\,\underline{r}}\;\underline{n}\times\underline{\tilde{q}}(\underline{k},\omega)}$$

$$\text{mit}\quad \boxed{\underline{\tilde{q}}(\underline{k},\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\; e^{i\,\underline{k}\,\underline{r}'}\;\tilde{\underline{j}}(\underline{r}',\omega)}$$

Analog gilt wegen

$$\int \mathrm{d}^3r'\; e^{i\,\underline{k}\,\underline{r}'}\;\left[\tilde{\underline{j}} + \left(\frac{\omega^2}{c}\right)\;\nabla\;\left(\nabla\cdot\tilde{\underline{j}}\right)\right] = \int \mathrm{d}^3r'\; e^{i\,\underline{k}\,\underline{r}}\;\left[\tilde{\underline{j}} - \underline{n}\,\left(\underline{n}\cdot\tilde{\underline{j}}\right)\right]$$

$$= -\underline{n}\times\left(\underline{n}\times\int \mathrm{d}^3r'\; e^{i\,\underline{k}\,\underline{r}'}\;\tilde{\underline{j}}(\underline{r}',\omega)\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\tilde{E}} \to \frac{i\,\omega\,\mu_0}{4\,\pi}\;\frac{1}{r}\;e^{-i\,\frac{\omega}{c}\,r}\;n\times\left(\underline{n}\times\oint \mathrm{d}^3r'\; e^{i\,\underline{k}\,\underline{r}'}\;\tilde{\underline{j}}(\underline{r}',\omega)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\tilde{E}} \to -c\left(\underline{n}\times\underline{\tilde{B}}(\underline{r},\omega)\right)} \qquad \text{Transversalwellen!}$$

Die Multipolentwicklung einer (neutralen!) Quelle folgt aus MG3 und 4.

$$\left.\begin{array}{c} \frac{i}{\mu_0}\,\nabla\times\underline{\tilde{B}} = \tilde{\underline{j}} + i\,\omega\,\epsilon_0\,\underline{\tilde{E}} \\ \nabla\cdot\underline{\tilde{E}} = \frac{\tilde{\rho}}{\epsilon_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \nabla\cdot\tilde{\underline{j}} = -i\,\omega\,\tilde{\rho} \qquad \text{(Ladungserhaltung)}$$

$$\Rightarrow \quad \int \mathrm{d}^3r'\; e^{i\,\underline{k}\,\underline{r}'}\;\nabla\cdot\tilde{\underline{j}}(\underline{r}',\omega) = -i\,\underline{k}\cdot\int \mathrm{d}^3r'\; e^{i\,\underline{k}\,\underline{r}'}\;\tilde{\underline{j}}(\underline{r}',\omega)$$

$$= -i\,\omega\int \mathrm{d}^3r'\; e^{i\,\underline{k}\,\underline{r}'}\;\tilde{\underline{\rho}}(\underline{r}',\omega) \qquad \text{(für lokale Quellen)}$$

$$\doteq -i\,\omega\left\{\underbrace{\int \mathrm{d}^3r'\;\tilde{\underline{\rho}}(\underline{r}',\omega)}_{=0\;(*)} + i\,\underline{k}\cdot\int \mathrm{d}^3r'\;\underline{r}'\;\tilde{\underline{\rho}}(\underline{r}',\omega) \;+\; \cdots\right\}$$

(*): Wegen Ladungsneutralität.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tilde{\underline{d}}(\omega) := \int \mathrm{d}^3 r'\; r'\; \tilde{\rho}(\underline{r}',\omega) = -\frac{4\,\pi\,i}{\omega\,\mu_0}\;\tilde{\underline{q}}(\underline{k}=0,\omega)}$$

$\Rightarrow$ Damit folgt das Dipol-Fern-Strahlungsfeld:

$$\boxed{\tilde{\underline{B}}(\underline{r},\omega) \to \frac{\omega^2}{4\,\pi\,\epsilon_0\,c^2}\;\left(\underline{n}\times\tilde{\underline{d}}(\omega)\right)\;\frac{1}{r}\;e^{-i\,\frac{\omega}{c}\,r}}$$

$\Rightarrow$ und die zeitlich gemittelte Strahlungsleistung

$$\boxed{P_D = \frac{\omega^4}{32\,\pi^2\,\epsilon_0\,c^3}\;\left|\underline{n}\times\tilde{\underline{d}}(\omega)\right|^2}$$

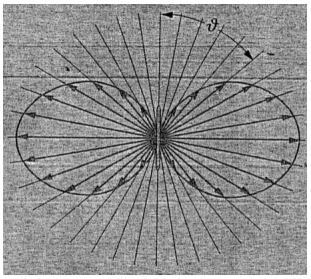


Abbildung 1.123: Strahlungsdiagramm eines Hertz-Oszillators

Für elektrischen Dipol mit $\tilde{\underline{d}} = \hat{\underline{x}}\;\tilde{d}(\omega)$

$$\Rightarrow \quad \left|\underline{n}\times\tilde{\underline{d}}\right|^2 = \sin^2\vartheta\;\left|\tilde{d}(\omega)\right|^2$$

$$\boxed{P_{eD} = \frac{\omega^4}{32\,\pi^2\,\epsilon_0\,c^3}\;\left|\tilde{d}(\omega)\right|^2\;\sin^2\vartheta} \qquad \text{Hertz'sche Dipol-Strahlung}$$

Wiederholung:

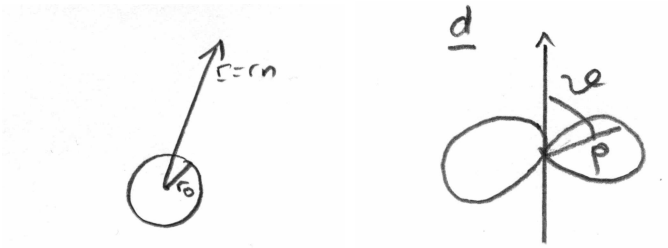


Abbildung 1.124:

– Dipolstrahlung im Fernfeld $r \gg r_0$
Über die Multipolentwicklung für $r_0 \ll \lambda$ haben wir gesehen:

$$\underline{\tilde{B}}(\underline{r},\omega) = \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi c} \cdot \frac{1}{r} e^{-i\frac{\omega}{c}r} \underline{n} \times \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r' e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}'} \underline{\tilde{j}}(\underline{r}',\omega)}_{=*}$$

$$* \overset{k\to 0}{\longrightarrow} i\omega \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r' \underline{r}' \tilde{\varrho}(\underline{r}',\omega)}_{=\text{el. Dipol } \tilde{d}(\omega)\cdot\underline{\hat{x}}}$$

$$\Rightarrow P_{\mathrm{ed}} = \frac{\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3} |\tilde{d}(\omega)|^2 \sin^2\vartheta$$

– Streuung:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\underline{o} &= \underline{n}(r\,\mathrm{d}\vartheta)(r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi) \\ &=: \underline{n} r\,\mathrm{d}\Omega \end{aligned}$$

– Streuquerschnitte:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} := \frac{r^2 \langle \underline{S}\cdot\underline{n}\rangle_T}{\langle \underline{S}_I \cdot \underline{\hat{z}}\rangle_T}$$

$$\sigma := \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega$$

$\mathrm{d}\Omega$ ist der sogenannte *Raumwinkel*

1.11.6 Rayleigh-Debye-Gans-Streuung

Diese Kapitel wird die Streuung an ausgedehnten Körpern, insbesondere einer Kugel mit $R \geq \lambda$ behandelt. Für $R \to \infty$ werden wir das zu Beginn des Kapitels 1 eingeführte Konzept der ("ungestreuten") Ausbreitung eines Lichtstrahls durch ein homogenes Medium wierderfinden... der Kreis schließt sich.

$$I_s = \frac{\mathrm{d}^2 o}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}_0^2}{16\pi^2}\frac{\omega^4}{c^4}\sin^2\theta \underbrace{=}_{\omega=ck=c\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{\alpha_0^2 k^4}{16\pi^2}\sin^2\theta = \frac{\alpha_0^2\pi^2}{\lambda^4}\sin^2\theta \tag{1.205}$$

θ^{-4}-Gesetz kann durch Versuch illustriert werden:

Abbildung 1.125: Dispersion

seitlich gestreutes Licht sieht bläulich aus, da bei kürzerer Wellenlänge die Streuung stärker ist. Demgegenüber ist der Strahl in Transmission rötlich verfärbt, denn das vermehrt gestreute blaue Licht fehlt in Transmission. All dies ist richtig für sehr kleine Teilchen mit Radius $\ll \lambda$, denn dann ist I_s quasi isotrop. Genauer:

I_s ist ein fetter Torus (Donut). Für unpolarisiertes Licht → Überlagerung verschiedener Tori.

Abbildung 1.126: Torus

Abbildung 1.127:

Abbildung 1.128: Hundeknochenverteilung

Insgesamt entsteht eine "Hundeknochenberteilung":
Dies ist zwar keine Kugel, aber wir tun (der Einfachheit halber) so, als sei die Intensität I_s isotrop.
Aber: Beobachtung aus dem Alltag: Größere Teilchen wie z.B. Dreck auf der Windschutzscheibe streuen viel mehr nach vorn ab, als nach hinten.
Dies misst man mit professionellenÄpperaturen wie der in Abb. (**??**)gezeigten natürlich genauer: Man misst $I_s(\Theta)$ mit Streuwinkel Θ: Wir führen ein: Streuvektor $\underline{q}$.

$$\underline{q} = \underline{k}_{out} - \underline{k}_{in} \tag{1.206}$$

Abbildung 1.129: Streuvektor

Bei elastischer Streuung ändert sich nur die Richtung von $\underline{k}$, nicht aber der Betrag (Erinnerung $h\underline{k}_{in}$, $h\underline{k}_{out}$ sind die Impulse des einlaufenden , bzw. gestreuten Photons, die sich beim elastischen Stoß natürlich nicht ändern), also:

$$|\underline{k}_{in}| = |\underline{k}_{out}| = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow |\underline{q}| = 2\frac{2\pi}{\lambda}\sin\frac{\Theta}{2} \tag{1.207}$$

Abbildung 1.130: Light scattering setup

Abbildung 1.131: 2 Punktstreuer

Betrachte 2 Punktstreuer bei Orten $\underline{r_1}$ und $\underline{r_2}$, die jeweils die einfallende Welle in Richtung $\underline{k}_{out}$ streuen. Es entsteht ein Phasenunterschied zwischen den beiden getreuten Wellen, der gegeben ist durch:

$$\underline{k}_{in}(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) - \underline{k}_{out}(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) = \underline{q}(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \tag{1.208}$$

Die gestreuten Felder E_1 und E_2 sind

$$E_{1/2} \approx q_{1/2} e^{i(\underline{k}_{out}\underline{r} + \varphi_{1/2})} \tag{1.209}$$

- $\underline{r}$: Detektorposition, weit weg
- $p_{1/2}$: Streuamplituden, die wir nicht weiter beachten. D.h. $q_1 = q_2 = 1$ (identischer Streuer).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 &= q(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \\ \Rightarrow I_s \approx |E_1 + E_2|^2 &= 1 + 2e^{iq(\underline{r}_2 - \underline{r}_1)} + 1 \end{aligned} \tag{1.210}$$

NB: Hätten wir inkohärentes Licht behandelt, bzw. falls $|\underline{r}_2 - \underline{r}_1| \gg$ Kohärenzlänge, wäre die getreute Intensität $I_s = 2$ (inkohärenter Mittelwert).

Abbildung 1.132: inkohärenter Mittelwert

Die Verallgemeinerung auf N Teilchen ist trivial:

Abbildung 1.133: Viele Teilchen

$$\begin{aligned} I_s &= E_s E_s^* \\ I_s &= \left(\sum_{i=1}^{N} E_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N} E_j^*\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} E_i E_i^* + \sum_{i}^{N}\sum_{j\neq i}^{N} E_i E_j^* \\ &= N + \sum_{i\neq j}^{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\underline{q}(\underline{r}_i - \underline{r}_j)} \end{aligned} \tag{1.211}$$

Betrachte Streuung an einer homogenen Kugel als Steuung von einem dichten Ensemble von Punktstreuern:
Aus $\sum$ wird $\int$. Wir legen o.B.d.A den Ursprung in den Kugelmittelpunkt (d.h. $\underline{r}_i = \underline{r}$, $\underline{r}_j = 0$)

Abbildung 1.134:

Abbildung 1.135:

$$\Rightarrow I_s = I_s(q) \approx \left| \int_{Kugelvolumen} e^{i\underline{qr}} \, \mathrm{d}^3 r \right|^2 \tag{1.212}$$

Trick zur Berechnung von I_s: ($\underline{q} \parallel$ z - Achse)
Für alle Punkte $\underline{s}$ innerhalb der Scheibe ist der Wert $\underline{qs} = \underline{q}(\underline{r}_i - \underline{r}_j)$ der gleiche:

$$\Rightarrow I_s(q) = \left| \int f_s \cdot e^{i\underline{qs}} d\underline{s} \right|^2 \tag{1.213}$$

mit $f_s ds$ = Volumen der Schreibe

$$f_s = \pi R^2 (1 - z^2)$$

Mit den Substitutionen $z = \frac{S}{R_0}$, $u = qR_0, \mathrm{d}s = R_0 \, \mathrm{d}z$ folgt:

$$\begin{aligned} I_s(q) &= \left[\int_{-1}^{1} \mathrm{d}z e^{iuz} \pi R_0^2 (1 - z^2) \right]^2 \\ &= \left[\frac{3(\sin qR_0 - qR_0 \cos qR_0)}{(qR_0)^3} \right]^2 \end{aligned} \tag{1.214}$$

Abbildung 1.136:

$\Rightarrow$ für $R \gg \lambda$ wird der Winkelbereich innerhalb des zentralen Teils (schraffiert) der Streufigut bei sehr kleinen Winkeln liegen, für
$R_0 \to \infty$ tritt Streuung nur in Vorwärtsrichtung d.h. Strahlrichtung von k_{in} auf.

Beispiel Fig. (1.137): Kleine Polystyrol-plastikkugeln in Wasser streuen ziemlich nach vorn.

Abbildung 1.137: Streuung von Polystyrolkugeln

Kuriosität:
Die Streuung an Teilchen mit Brechungsindex deutlich größer 1 (die man Mie - Streuung

nennt) ist komlexer und erzeugt z.B. wunderbare Farbeffekte in Rückstreuung. Der Heiligenschein (Glory) Abb. (?? + ??) ist ein Beispiel welches man in Beobachtung seines Schattens auf einer Wolke (Flugzeug, Berg) sehen kann. Zu jedem in Rückwärtsrichtung gebrochenen Strahl gibt es einen reziprokenSStrahl, der mit dem ersten konstruktiv interferiert. All dies kommt offensichtlich dadurch zustande, dass die Strahlen im innern des Tropfens reflektiert werden (Brechungsindexsprung am Rand !! Fresnel(Snellius)). Dies wurde bei jetziger Ableitung (Rayleigh-Debye-Gans Näherung) vernachlässigt!

1.12 Optische Instrumente

1.12.1 Strichgitter

Erinnerung: Beugungsfigur an N Spalten:

$$I(\Theta) = I_0 \frac{\sin^2\left[\pi \frac{b}{\lambda}\sin(\Theta)\right]}{\pi\left(\frac{b}{\lambda}\sin\Theta\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left[N\pi\frac{d}{\lambda}\sin\Theta\right]}{\sin^2\left[N\pi\frac{d}{\lambda}\sin\Theta\right]} \tag{1.215}$$

Abbildung 1.138: Interferenz und Beugung

Abbildung 1.139: Interferenz und Beugung

- Ordnungen $m = 0{,}1{,}2$ wegen

$$\boxed{d\sin\Theta = m\lambda} \tag{1.216}$$

- Einhüllende wegen Beugung am Spalt der Breite b.

$\Rightarrow$ Das funktioniert als Gerät zur spektralen Zerlegung in jeder Ordnung ($m \neq 0$) ist nach (1.216) $\Theta = \Theta(\lambda)$
$\Rightarrow$ Aber: $I(\Theta)$ wird klein mit zunehmendem m, will man dei Einhüllende breiter machen, muss b klein werden. $\Rightarrow$ wenig Intensität.
$\Rightarrow$ Daher **Reflexionsgitter:** Fabrikdachstruktur

Abbildung 1.140: Spektrometer

Versuch: Gitter Vorteil: Alles wird reflektiert, die Oberfläche verspiegelt !!
Gangunterschied nach Zeichnung:

$$\Delta_1 = d \sin\alpha$$
$$\Delta_2 = d \sin\beta$$
$$\Delta s = \Delta_1 - \Delta_2 = d(\sin\alpha + \sin\beta)(mboxN.B)\beta < 0\text{in Zeichnung} \tag{1.217}$$

Gitterbedingung

$$d\,(sin\alpha + \sin\beta) = m\lambda \tag{1.218}$$

Rolle der ßchiefen Ebene"Blazewinkel Θ:
Winkel zwischen Einfall/Furchennormale: i
Winkel zwischen Ausfall/Furchennormale: r

$$\boxed{\Theta_{Blaze} = \frac{\alpha+\beta}{2}} \Leftarrow \begin{cases} \text{Reflexionsgesetz:} & i = r \\ \text{man sieht} & i = \alpha - \Theta \\ & \Theta - \beta \end{cases}$$

α fix (Gitterkonstruktion)

β für Ordnung m nach (1.218)

$$\Rightarrow \Theta = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left[\frac{m\lambda}{d} - \sin\Theta\right] = \theta(\lambda) \tag{1.219}$$

Optimaler Blazerwinkel wird so gewählt, dass reflektierter Strahl un din Ordnung m gebeugter Strahl nahezu kointerferrieren.

Abbildung 1.141: Spektrale Auflösung des Gitters

$$\Theta\frac{2\pi}{\lambda} s \sin\Theta$$
$$\mathrm{d}\Theta = \frac{2\pi}{\lambda} d\cos\Theta\,\mathrm{d}\Theta$$
$$\mathrm{d}\Theta = \frac{\lambda\,\mathrm{d}\Theta}{(s\pi d\cos\Theta)}$$
$$\text{mit d}\frac{2\pi}{N}\text{folgt d}\Theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\Theta} = \text{Winkelbreite des Beugungspeaks}$$
$$\text{Dispersion:}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\lambda}$$
$$d\sin\Theta_\lambda = m\lambda$$
$$d\cos\,\mathrm{d}\Theta_\lambda = m\,\mathrm{d}\lambda$$
$$\mathrm{d}\Theta_\lambda = \frac{m\,\mathrm{d}\lambda}{d\cos\Theta_\lambda}$$

$$\mathrm{d}\Theta_\lambda = \mathrm{d}\Theta_p \rightarrow m\,\mathrm{d}\lambda = \frac{\lambda}{N}$$

$$\boxed{\frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda} = m \cdot N} \leftarrow \text{Auflösung des Gitters} \tag{1.220}$$