

Vorlesungsskript
Integrierter Kurs III - analytische Mechanik

Marcel Indlekofer, Thomas Lauermann, Vincent Peikert und Raphael Straub

9. Februar 2005

Inhaltsverzeichnis

3	Analytische Mechanik	5
3.0	Prinzip der Variationsrechnung	5
3.0.1	Grundzüge der Variationsrechnung	6
3.1	Die EULER'schen Gleichungen	7
3.1.1	Klassisches Beispiel: Die Brachystochrone	11
3.2	Lagrange Mechanik	14
3.2.1	Prinzip von Hamilton	14
3.2.2	Elementare Beispiele	20
3.2.3	Axiome und Grundbegriffe der LAGRANGE-Mechanik	23
3.2.4	HAMILTON'sche Funktionen	24
3.2.4.1	HAMILTON'sche Gleichungen	24
3.2.4.2	Energieerhaltung	26
3.2.5	Zwangsbedingungen	26
3.3	Mathematischer Einschub	31
3.3.0	Motivation	31
3.3.1	Karten und Koordinaten	32
3.3.2	Koordinatentransformationen	35
3.3.3	Koordinatentransformation zur Eliminierung von Zwangsbedingungen	36
3.3.4	Differenzierbare Mannigfaltigkeit	37
3.4	Symmetrien & Erhaltungssätze	38
3.4.1	Bahndeterminismus	38
3.4.2	Kovarianz	39
3.4.3	Kovarianz unter holonomen Zwangsbedingungen	41
3.4.4	Eichinvarianz	42
3.4.5	Das NOETHER-Theorem	42
3.5	Hamilton'sche Mechanik II	49
3.5.0	Motivation	49
3.5.1	Phasenraum	49
3.5.2	Satz von Liouville	50
3.5.3	Poisson-Klammern	52
3.5.4	Symmetrietransformation	54
3.5.5	Kanonische Transformation	55
3.6	Näherungsverfahren & Störungstheorie	57
3.6.1	Asymptotische Entwicklungen & O- Symbol	57
3.6.2	Anwendung auf fast kreisförmige Bahn im Zentralfeld	59

Kapitel 3

Analytische Mechanik

Wir erinnern uns an die NEWTON'sche Formulierung der Mechanik. Die NEWTON'schen Grundgleichungen für N Massenpunkte lauten:

$$\underbrace{m_i \ddot{\underline{r}}_i}_* = \underbrace{\underline{F}_i^{ext}}_{**} + \underbrace{\sum_{j=1, j \neq i}^N \underline{F}_{ij}^{int}}_{***} \quad \text{für } i = 1, \dots, N \quad (3.1)$$

*: Impulsänderung

**: wirkende externe Kraft

***: von Teilchen auf Teilchen ausgeübte interne Kräfte

Dies sind also $f = 3N$ inhomogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die zusammen mit den Anfangsbedingungen die Bahnen $\underline{r}_i(t)$ beschreiben.

Das Neue an der Formulierung der Mechanik nach LAGRANGE, HAMILTON usw. (wird analytische Mechanik genannt) leistet dasselbe: Allerdings ist sie häufig leichter lösbar. Das Prinzip der Analytischen Mechanik wird in der sogenannten "Technische Mechanik" vor allem von Ingenieuren verwendet.

3.0 Prinzip der Variationsrechnung

- Liegt der analytischen Mechanik zugrunde, wurde dort weiterentwickelt (siehe Fermatsches Prinzip und andere Anwendungen) und wird in fast allen Gebieten der modernen Physik (Feldtheorie etc.) verwendet.
- Konzepte der analytischen Mechanik werden verallgemeinert zur Quantenmechanik und allgemeinen Relativitätstheorie
- Das erste mal taucht in analytischer Mechanik die Beziehung zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen auf

Literaturtips:

- Jelitto TheoPhys 2
- Skript IK 3 WS 03/04 (Homepage von Prof. Scheer)
- Landau-Lifschitz Vol 2
- Arnold Mechanics

3.0.1 Grundzüge der Variationsrechnung

Motivation und klass. Beispiel:

Abbildung 3.1: Kürzeste Verbindung

Gesucht ist die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Punkten $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$!

Definition einer Bahn:

Eine Abbildung $C : I \rightarrow \mathbb{R}^f$ mit $I : [t_A, t_B]$, die durch f stetige und stetig differenzierbare Funktionen $q_i(t)$ mit $i = 1 \dots f$ gegeben ist (Abkürzung $\underline{q}(t) \in \mathbb{R}^f$) heißt **Bahn** (t wird später häufig die Zeit sein).

Hier bedeutet dies also, dass $x(t)$ und $y(t)$ durch zweimal stetig differenzierbare Funktionen gegeben sind, mit $x(t_a) = x_a$, $y(t_a) = y_a$, $x(t_b) = x_b$ und $y(t_b) = y_b$. Die Länge der Bahn ist $L(C) = \int_1^2 ds$ mit dem Inkrement der Bogenlänge ds .

Wir betrachten die Tangente $\underline{\dot{q}}(t)$. Mit dieser folgt:

$$\begin{aligned} \Delta s &= |\underline{\dot{q}}(t)| \Delta t \\ \Rightarrow L(C) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\underline{\dot{q}}(t)^2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Untersucht werden soll, wann dieses Integral minimal wird. Dazu parametrisieren wir zur

Abbildung 3.2: Uparametrisieren

Vereinfachung die Bahn nach x um(ohne Diskussion), wie in Abbildung (3.2) dargestellt. Voraussetzung ist, dass $x(t)$ umkehrbar (injektiv) zu $t(x)$ ist.

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dt}{dx} dx = \left(\frac{dx}{dt} \right)^{-1} dx \\ \Rightarrow dt &= \frac{dx}{\dot{x}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{dy}{dx} = xy' \\ \Rightarrow L(C) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Gesucht ist diejenige Funktion, welche $y(x)$ minimiert.

L ist ein sogenanntes **Funktional** $L[y(x)]$

Definition eines Funktionals:

Ist eine Abbildung vom Raum der Bahnkurven $\mathcal{C}$ in $\mathbb{R}$ gegeben durch die Auswertung der

Aufsummierung einer sogenannten *Dichtefunktion* $L = \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entlang der Bahn $\mathcal{C}$:

$$S[\underline{q}(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt L(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t), t)$$

Falls die Bahn C durch $\underline{q}(t)$ gegeben ist, ist also $L = \tilde{L}(t)$ und es ergibt sich S durch Integration:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt \tilde{L}(t) \quad (3.5)$$

Die Variationsrechnung bestimmt somit eine Bahn C (oder $\underline{q}(t)$), so dass S minimal oder maximal wird. (allgemein: stationär). die Abhängigkeit von $t_b - t_a$ interessiert nicht.

3.1 Die Euler'schen Gleichungen

Gegeben ist ein eindimensionales Bahnfunktional:

$$S[q(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

für eine eindimensionale Bahn, die durch q_- bei t_- und q_+ bei t_+ geht.

D.h. $C : t \mid q = q(t)$ für $t_- \leq t \leq t_+$ mit $q(t_-) = q_-$ und $q(t_+) = q_+$. $q(t)$ sei zweimal stetig differenzierbar und L stetig differenzierbar nach seinen Argumenten. Wir vergleichen die Bahnen $q(t) = q_0(t) + \varepsilon h(t)$, wobei $h(t_-) = h(t_+) = 0$ gelten muss, damit alle Bahnen $q(t)$ durch die Endpunkte gehen. Ansonsten ist $h(t)$ eine (in einer kleinen ε -Umgebung beliebige) Funktion.

Welches $q_0(t)$ führt auf die Entwicklung von S :

$$S[q_0(t) + \varepsilon h(t)] = S_0 + \varepsilon S' + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

für beliebiges $h(t)$ mit $S' = 0$?

Bemerkung:

Dieses Problem lässt sich behandeln, in dem man das Minimum von $S(\varepsilon)$ ermittelt.

$$\begin{aligned} S[q_0(t) + \varepsilon h(t)] &= \int_{t_-}^{t_+} dt L(q_0(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}_0(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t) \\ &\doteq \int_{t_-}^{t_+} dt \left\{ L(q_0(t), \dot{q}_0(t), t) + \frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{q=q_0, \dot{q}=\dot{q}_0} \varepsilon h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{q=q_0, \dot{q}=\dot{q}_0} \varepsilon \dot{h}(t) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Bei Variation von $h(t)$ ist $\dot{h}(t)$ auch fest, aber erst wenn wir alle Terme $\sim h(t)$ zusammenfassen, können wir $S' = 0$ für beliebiges $h(t)$ folgern. Dies geschieht mit partieller

Integration:

$$= S[q_0] + \varepsilon \left(\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right]_{q=q_0, \dot{q}=\dot{q}_0}}_{=0, \text{ da Randterm}} \Big|_{t_-}^{t_+} \varepsilon h(t) + \int_{t_-}^{t_+} dt h(t) \left(\frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{q=q_0, \dot{q}=\dot{q}_0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{q=q_0, \dot{q}=\dot{q}_0} \right) \right)$$

damit der Term linear für alle $h(t)$ verschwindet, muss letzte Klammer entlang der gesamten Bahn 0 sein.

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} \Big|_{q=q_0, \dot{q}=\dot{q}_0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{q=q_0, \dot{q}=\dot{q}_0} = 0} \quad (3.6)$$

dies nennt man die EULER - Gleichung Beispiel: Kürzeste Bahn in der Ebene.

Weil $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'^2}$ ist, gilt:

$$L = \int_{x_A}^{x_B} dx L(y(x), y'(x), x) \quad \text{mit} \quad y' = \frac{dy}{dx} \quad (3.7)$$

In unserem Beispiel ist

$$L(y(x), y'(x), x) = L(y') = \sqrt{1 + y'^2} \quad (3.8)$$

Die EULERGleichung bedeutet hier:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \quad (3.9)$$

Und da die erste Ableitung $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ ergibt, haben wir:

$$0 - \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{konst.} = c \quad (3.10)$$

Es folgt also für die erste Ableitung:

$$y'(x)^2 = c^2 \cdot (1 + y'(x)^2) \quad \Rightarrow \quad y'(x)^2 = \frac{c^2}{1 - c^2} = \text{konst.} = c_1^2 \quad (3.11)$$

Damit erhalten wir, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Gerade ist:

$$\boxed{y(x) = y_0 + c_1 x} \quad (3.12)$$

Setzen wir nun die Randwerte ein, so erhalten wir:

$$\boxed{y(x) = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A)} \quad (3.13)$$

Bemerkungen:

- Die kürzeste Bahn wird auch als **Geodäte** bezeichnet. Auf diesem Prinzip basiert die Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie, bei der $g_{\mu\nu}$ eine Funktion des Ortes ist.

- Eine Variable q_i (wie hier y), die in $L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$ mit $\underline{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \end{pmatrix}$ nicht explizit auftaucht, d.h. $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ (hier: $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$) heißt **zyklische Variable** und die zugehörige Größe, der sogenannte **verallgemeinerte (kanonische) Impuls**, $p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{konst.}$ ist eine Erhaltungsgröße (in unserem Beispiel: $\frac{\partial L}{\partial y'} = \text{konst.}$).

Verallgemeinerung auf eine Bahn im $\mathbb{R}^f$:

Theorem:

Die Bahnkurve C im $\mathbb{R}^f$, gegeben durch $(\underline{q}, t) : \underline{q} = \underline{q}(t)$, d.h. $q_i = q_i(t)$ für $i = 1, \dots, f$, sei zweimal stetig differenzierbar für $t_- \leq t \leq t_+$, sie ist Extremalkurve des Funktional

$$S = \int_{t_-}^{t_+} dt L(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t), t) \quad (3.14)$$

Bemerkung:

Das heißt, $S[\underline{q}]$ ist stationär bei festen Randpunkten $\underline{q}(t_-) = \underline{q}_-$ und $\underline{q}(t_+) = \underline{q}_+$ mit der Dichte:

$$L : \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.15)$$

mit gewissen Glattheitsbedingungen an L . Das Funktional ist genau extremal dann, wenn:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, f \quad (3.16)$$

Dies sind die EULERGleichungen.

Beweis:

Die f Vergleichsbahnen $\underline{q}(t, \varepsilon)$ erfüllen $\underline{q}(t, \varepsilon = 0) = \underline{q}(t)$. Wobei $\underline{q}(t)$ die extremale Bahn ist. Ebenfalls gilt, dass alle Vergleichsbahnen durch die Randpunkte gehen:

$$\underline{q}(t_{\pm}, \varepsilon) = \underline{q}(t_{\pm}) = \underline{q}_{\pm}$$

Desweiteren soll $\underline{q}(t, \varepsilon)$ entwickelbar sein:

$$\underline{q}(t, \varepsilon) = \underline{q}(t) + \varepsilon \frac{\partial \underline{q}}{\partial \varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.17)$$

Dann ist ...

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} S[\underline{q}(t, \varepsilon)] \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (3.18)$$

... S also extremal.

$$\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_-}^{t_+} dt \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \left. \frac{\partial q_i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \left. \frac{\partial \dot{q}_i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right) = 0$$

Wegen $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \dot{q}_i(t, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} q_i(t, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} q_i(t, \varepsilon)$ lässt sich die Zeitableitung partiell integrieren:

$$\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_-}^{t_+} dt \sum_{i=1}^f \frac{\partial q_i(t,0)}{\partial \varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} \right) + \left[\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial q_i(t,0)}{\partial \varepsilon} \right]_{t_-}^{t_+} = 0$$

da $q_i(t, \varepsilon)|_{t_{\pm}} = q_{\pm}$ folgt $\frac{\partial q_i(t_{\pm}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0$. Die große Klammer muss also für jeden Index i einzeln 0 ergeben.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial q_i} + \sum_{j=1}^t \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \underline{q}_j} \dot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^t \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j(t)$$

$\Rightarrow$ Die Euler-Gleichungen sind gekoppelte implizite Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Beispiel: Kürzeste Bahn

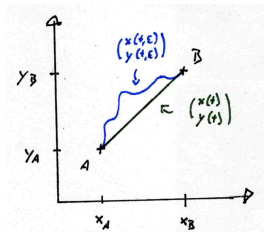


Abbildung 3.3: Kürzeste Bahn

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = dv dt \\ \Rightarrow L[C] &= \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

also haben wir:

$$L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L\left(\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}, t\right) = L\left(\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (3.20)$$

Die EULER-Gleichungen hierfür lauten:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = 0 = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \text{konst.} \quad (3.21)$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = 0 = \frac{\partial L}{\partial y} \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \text{konst.} \quad (3.22)$$

Damit erhalten wir also die Beziehung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{c_2}{c_1} = \text{konst.} \quad (3.23)$$

Wir erhalten wieder eine Gerade: $y' = \text{konst.}$

Die selbe Bahn/Kurve ergibt sich aus der Variationsrechnung für beliebige Parametrisierung.

Beispiel: Kürzeste Bahn in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x(t) = r(t) \cos \varphi(t) &\Rightarrow \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ y(t) = r(t) \sin \varphi(t) &\Rightarrow \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned}$$

also ist die Geschwindigkeit in ebenen Polarkoordinaten nichts anderes als:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (3.24)$$

Es folgt für L:

$$L[\mathcal{C}] = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} \quad (3.25)$$

Umparametrisieren ergibt:

$$L[\mathcal{C}] = \int_{r_A}^{r_B} dr \sqrt{1 + r^2 \varphi'^2} \quad \text{mit} \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dr} \quad (3.26)$$

Die kürzeste Bahn folgt nun aus der EULERGleichung mit

$$L(\varphi(r), \varphi'(r), r) = \sqrt{1 + r^2 \varphi'^2} \quad (3.27)$$

Eingesetzt ergibt dies:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dr} \frac{\partial L}{\partial \varphi'} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 = \frac{d}{dr} \frac{r^2 \varphi'}{\sqrt{1 + r^2 \varphi'^2}} = c = \text{konst.} \quad (3.28)$$

Um $\varphi(r)$ oder $\varphi'(r)$ zu finden, ist ein größerer Rechenaufwand als zuvor notwendig. Das liegt an der ungeschickten Wahl unserer Koordinaten. Das Ergebnis bleibt natürlich eine Gerade.

3.1.1 Klassisches Beispiel: Die Brachystochrone

Historisches Problem: Gesucht ist die Kurve, auf der ein Teilchen unter Einwirkung der Schwerkraft am schnellsten von A nach B kommt.

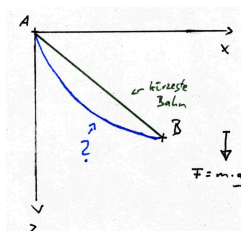


Abbildung 3.4: Welche Bahn ist die schnellste?

Eine Bahn, auf der das Teilchen zuerst stark beschleunigt und dann mit größerer Geschwindigkeit entlangläuft ist womöglich schneller als die kürzeste Bahn. Wir ermitteln die Zeit zum Durchlaufen der Bahn mit dem Bogenlängenelement ds und der Geschwindigkeit $\underline{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$:

$$t[\mathcal{C}] = \int_A^B \frac{ds}{v} \quad (3.29)$$

weil $ds = |\underline{v}| \cdot dt$, wobei v aus der Energieerhaltung bestimmt werden kann:

$$E = \text{konst.} = \frac{m}{2}v^2 - mgz = 0 \quad (3.30)$$

wenn wir am Punkt A $v = 0$ und $z = 0$ festsetzen. Damit können wir $v = \sqrt{2gz}$ ersetzen:

$$t[\mathcal{C}] = \int_A^B \frac{ds}{\sqrt{2gz}} = \int_A^B dt \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}}{\sqrt{2gz}} \quad (3.31)$$

Durch Umparametrisieren mit $t = t(x)$ folgt:

$$L[\mathcal{C}] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{\frac{1 + z'^2}{z}} \quad (3.32)$$

wobei wir die folgende Dichtefunktion haben:

$$L(z(x), z'(x), x) = \sqrt{\frac{1 + z'^2}{z}} \quad (3.33)$$

$$\overset{\text{Extremum}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial z'} = 0 \quad \text{wobei } z' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1 + z'^2} \left(\frac{-1}{2 z^{3/2}} \right) - \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{z(1 + z'^2)}} = 0$$

weiteres Differenzieren führt zur Differentialgleichung für z ,

$$z'' = \frac{d^2 z}{dx^2}$$

welche sehr kompliziert zu lösen ist. **Wichtige "Message":** *Verwende nicht die Euler-Gleichung wenn es auch einfacher geht!*

Wichtiger Trick: *Energieerhaltung*

Multiplikation der Euler-Gleichung mit z' , und danach anwenden der Produktregel liefert:

$$\begin{aligned} & z' \frac{\partial L}{\partial z} - z' \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial z'} = 0 \\ \Leftrightarrow & z' \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx} z' \frac{\partial L}{\partial z'} + \frac{\partial L}{\partial z'} z'' = 0 \\ \Leftrightarrow & \underbrace{\frac{\partial L}{\partial z} \frac{dz}{dx} + \frac{\partial L}{\partial z'} \frac{dz'}{dx}}_{(*)} - \frac{d}{dx} z' \frac{\partial L}{\partial z'} = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Die Klammer * entspricht: $= \frac{d}{dx} L(z(x), z'(x), x)$ genau dann, wenn $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, weil gilt:

$$\frac{d}{dx} L(z(x), z'(x), x) = \frac{\partial L}{\partial z} \frac{dz}{dx} + \frac{\partial L}{\partial z'} \frac{dz'}{dx} + \frac{\partial L}{\partial x}$$

wenn also $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ ist, dann folgt aus (3.34):

$$0 = \frac{d}{dx} \left(L - z' \frac{\partial L}{\partial z'} \right)$$

Somit ergibt sich aus der Euler-Gleichung:

Genau dann, wenn $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, d.h. wenn L nicht explizit vom Bahnparameter (hier x , später t) abhängt, gilt:

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(L - z' \frac{\partial L}{\partial z'} \right) = 0$$

also:

$$E = L - z' \frac{\partial L}{\partial z'} = \text{konst.}$$

was ein großer Vorteil ist, weil in $E = f(z, z')$ nur erste Ableitungen (hier z, z' , in der Mechanik nur $r, \dot{r} = v$ nicht $\ddot{r} = a$) auftauchen.

In unserem Beispiel ist:

$$\begin{aligned} z' \frac{z'}{\sqrt{z(1+z'^2)}} - \sqrt{\frac{1+z'^2}{z}} &= \frac{-1}{\sqrt{2a}} = \text{konst.} \quad \text{mit einer Länge } a \\ &= \frac{-1}{\sqrt{z(1+z'^2)}} \quad \Leftrightarrow \quad z(1+z'^2) = 2a \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = z' = \pm \sqrt{\frac{2a}{z} - 1}$$

Trennung der Variablen:

$$\int dx = \int dz \sqrt{\frac{z}{2a - z}}$$

Variablensubstitution: $z = a(1 - \cos \vartheta) \quad \Leftrightarrow \quad dz = a \sin \vartheta d\vartheta$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad x - x_0 &= \int d\vartheta a \sin \vartheta \sqrt{\frac{a(1 - \cos \vartheta)}{a(1 + \cos \vartheta)}} \\ &= a \int d\vartheta \sin \vartheta \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}}} = 2a \int d\vartheta \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \\ &= a(\vartheta - \sin \vartheta) \end{aligned}$$

D.h. mit der Parametrisierung der Bahn durch ϑ ist die Brachystochrone gegeben durch:

$$z = a(1 - \cos \vartheta) \tag{3.35}$$

$$x = a(\vartheta - \sin \vartheta) + x_0 \tag{3.36}$$

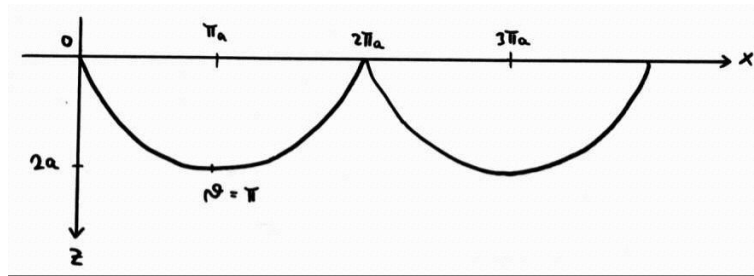


Abbildung 3.5: Schaubild einer Zykloide

Sie ist ein Stück einer Zykloide, die man durch Abrollen eines Rades mit Radius a erhält: (Abb.3.5)

x_0 und a sind zwei unbekannte Integrationskonstanten, die aus den Bedingungen bei A und B folgen. $x(\vartheta_1) = x_1$; $x(\vartheta_2) = x_2$; $z(\vartheta_1) = z_1$; $z(\vartheta_2) = z_2$

3.2 Lagrange Mechanik

3.2.1 Prinzip von Hamilton

(A) Newton'sche Bewegung eines Massepunktes im Potential

Nach NEWTON ist die Bahn des Massepunktes verknüpft mit

$$\text{Bahn: } t \mapsto \underline{r}(t) \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{Geschwindigkeit: } \underline{v}(t) = \frac{d}{dt} \underline{r}(t) = \dot{\underline{r}}(t)$$

$$\text{kinetischer Impuls: } \underline{p}(t) = m \underline{v}(t) \quad \text{mit der Masse } m$$

$$\underline{p} = m \underline{v} = \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \frac{m}{2} v^2 = \frac{\partial}{\partial \underline{v}} T \quad T := \text{kinetische Energie} \quad \frac{m}{2} v^2 = T$$

$$\text{Kraft aus Potential: } \underline{F} = -\frac{\partial}{\partial \underline{r}} U(\underline{r}(t), t)$$

$$\Rightarrow \quad \text{gegebene NEWTON'schen-Gleichung: } \frac{d}{dt} \underline{P} = \underline{F}$$

ist äquivalent zu:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\underline{r}}} \left[T - \underbrace{U(\underline{r}(t), t)}_{(*)} \right] = \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \left[\underbrace{T}_{(**)} - U(\underline{r}(t), t) \right]$$

(*) = 0 weil U nicht von $v = \dot{\underline{r}}$ abhängt

(**) = 0 weil T nicht von $\underline{r}$ abhängt

Im Vergleich erkennt man, dass die NEWTON-Gleichung der EULER-gleichung zur (LAGRANGE)-Dichte

$$L = L(\underline{r}(t), \underline{v}(t), t)$$

$$\boxed{L = \frac{m}{2} \underline{v}^2 - U(\underline{r}, t)}$$

entspricht.

Das HAMILTON'sche Prinzip besagt, dass die Bewegungsbahnen des Massepunktes (Parameter m) die "Extremalen" der "Wirkung" $S = \int_{t_-}^{t_+} dt L(\underline{r}(t), \underline{v}(t), t)$ sind.

Bemerkungen:

- Das Prinzip heißt auch "*Prinzip der kleinsten Wirkung*"
- In der Mechanik heißen die EULER-Gleichungen $\Rightarrow$ EULER-LAGRANGE-Gleichungen

(B) Die Einstein'sche Bewegung eines Massepunktes im Potential

Alles identisch zu (A). Nur dass der Impuls $\underline{p}$ die träge Masse enthält.

$$\underline{p} = \frac{m \underline{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \left(-m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \underline{p} \stackrel{Einst.}{=} \underline{F} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \left(-m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \underbrace{U(\underline{r})}_{=0} \right)$$

$$= \underline{F} = \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \left(\underbrace{-m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{=0} - U(\underline{r}) \right)$$

Die Bahnen eines Massenpunktes der EINSTEIN'schen Mechanik im Potential U sind Extremalen der Wirkung

$$S = \int_{t_-}^{t_+} L(\underline{r}(t), \underline{v}(t), t) dt = \int_{t_-}^{t_+} dt \left(-m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U(\underline{r}) \right)$$

Wiederholung:

- Wir haben gesehen, dass die folgenden beiden Gleichungen äquivalent sind:

$$\frac{\partial L(z(x), z'(x))}{\partial x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(z'(x) \frac{\partial L(z(x), z'(x))}{\partial z'} - L(z(x), z'(x)) \right) = 0$$

- Das NEWTON'sche Kraftgesetz für ein Teilchen der Masse m :

$$\frac{d}{dt}\underline{p} = \underline{F}$$

ist äquivalent zum Variationsproblem zur Wirkung:

$$S = \int_{t_-}^{t_+} dt L(\underline{r}(t), \underline{v}(t), t)$$

die extremal wird, für die physikalische Bahn, und mit $L = \frac{m}{2}v^2 - U(\underline{r}, t)$ folgen die EULER-LAGRANGE-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \underline{v}} = \frac{\partial L}{\partial \underline{r}}$$

- Die EINSTEIN'sche Formulierung lautet:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U(\underline{r})$$

(C) Newton'scher Massenpunkt in elektromagnetischen Feldern

Wir untersuchen nun ein Teilchen der Ladung q in einem elektromagnetischen Feld ($\underline{E}$ und $\underline{B}$ -Feld). Dazu betrachten wir die LORENTZ-Kraft:

$$\underline{F}(\underline{r}(t), \underline{v}(t), t) = q [\underline{E}(\underline{r}(t), t) + \underline{v}(t) \times \underline{B}(\underline{r}(t), t)]$$

wobei die Felder aus Potentialen bestimmbar sind:

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r}, t) &= -\nabla \Phi(\underline{r}, t) - \partial_t \underline{A}(\underline{r}, t) \\ \text{und } \underline{B}(\underline{r}, t) &= \nabla \times \underline{A}(\underline{r}, t) \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Φ ist ein skalares Potential, $\underline{A}$ ein Vektorpotential.
- Die Potentiale sind jedoch nicht eindeutig. Dieselben $\underline{E}$ - und $\underline{B}$ -Felder, die sich aus Φ und $\underline{A}$ ergeben, folgen auch aus $\hat{\Phi}$ und $\hat{\underline{A}}$ wenn $\hat{\underline{A}} = \underline{A} + \nabla \chi$ und $\hat{\Phi} = \Phi - \partial_t \chi$.

Die LORENTZ-Kraft lautet also komponentenweise (man verifiziere dies durch Einsetzen

der Felder):

$$\begin{aligned}
F_x &= \frac{d}{dt} m v_x = q \left[-\partial_x \Phi - \partial_t A_x + v_y \underbrace{(\partial_x A_y - \partial_y A_x)}_{=B_z} - v_z \underbrace{(\partial_z A_x - \partial_x A_z)}_{=B_y} \right] \\
&= q \left[\partial_x (-\Phi + v_y A_y + v_z A_z) + \partial_x v_x A_x - \underbrace{\partial_x v_x A_x - \partial_t A_x - \partial_y A_x v_y - \partial_z A_x v_z}_{=\frac{d}{dt} A(r,t)} \right] \\
\underline{F} &= q \cdot (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} m \underline{v} &= \left[-\partial_x (\phi - v_x A_x - v_y A_y - v_z A_z) - \partial_t A_x - \frac{\partial A_x}{\partial x} v_x - \frac{\partial A_x}{\partial y} v_y - \frac{\partial A_x}{\partial z} v_z \right] \\
&= -q \cdot \left[\partial_x (\phi - \underline{v} \cdot \underline{A}) + \frac{d}{dt} A_x \right] \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Damit kann man nun das Impuls-Kraftgesetz $\frac{d}{dt} \underline{p} = \underline{F}$ in die Form einer EULER-LAGRANGE-Gleichung bringen, indem man analoge Betrachtungen für p_y und p_z anstellt.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} (m \underline{v} + q \underline{A}) = \frac{\partial}{\partial \underline{r}} q \cdot (-\phi + \underline{v} \cdot \underline{A}) \\
\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \left(\frac{m}{2} \underline{v}^2 + q \underline{A} \cdot \underline{v} - \underbrace{q \phi(r(t), t)}_{=0} \right) &= \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \left(-q \phi(r(t), t) + q \underline{v}(t) \cdot \underline{A}(r(t), t) + \underbrace{\frac{m}{2} v^2(t)}_{=0} \right)
\end{aligned}$$

Fazit:

Die NEWTON'sche Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt mit der Ladung q im $\underline{E}$ - und $\underline{B}$ -Feld ist die Extremale zur Wirkung mit der LAGRANGEDichte:

$$L(\underline{r}, \underline{v}, t) = \frac{m}{2} v^2 + \underbrace{q \underline{v} \cdot \underline{A}(\underline{r}(t), t)}_{*} - q \phi(\underline{r}(t), t) \tag{3.38}$$

Bemerkung zum Term $*$: Dies ist ein weiteres Beispiel für das Konzept der linearen Kopplung.

Offen bleibt die Frage nach der fehlenden Eindeutigkeit der Potentiale ϕ und $\underline{A}$, welche als "*Eichkonvention*" bezeichnet wird. Der Übergang von $\phi, \underline{A}$ nach $\bar{\phi}, \bar{\underline{A}}$ heißt *Eichtransformation* und ändert L zu $\bar{L}$:

Für die Eichtransformation gilt:

$$\bar{\underline{A}} = \underline{A} - \nabla \chi \quad \& \quad \bar{\phi} = \phi + \partial_t \chi$$

Somit lässt sich die LAGRANGEDichte L schreiben als:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2} v^2 + q \underline{v} \cdot \bar{\underline{A}} + q \underline{v} \cdot \nabla \chi - q \bar{\phi} + q \partial_t \chi \\
&= \bar{L} + q (\partial_t \chi + \underline{v} \cdot \nabla \chi) \\
\Rightarrow L &= \bar{L} + q \frac{d}{dt} \chi(\underline{r}(t), t) \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Die letzte Beziehung folgt dabei über das totale Differential:

$$\frac{d}{dt}\chi(\underline{r}(t), t) = \frac{\partial}{\partial \underline{r}}\chi \cdot \underline{v} + \frac{\partial}{\partial t}\chi$$

Fazit:

Die Eichtransformation der elektromagnetischen Potentiale ist verknüpft mit der Addition eines totalen Zeitdifferentials auf die LAGRANGEDichte:

$$\begin{aligned} L &= \bar{L} + \frac{d}{dt}\chi(\underline{r}(t), t) \\ \bar{L} &= L - \frac{d}{dt}\chi(\underline{r}(t), t) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Bemerkungen:

- Später wird im Abschnitt "Symmetrieeigenschaften" von LAGRANGE-Dichten die daraus folgende Konsequenz für die Bahn behandelt. Speziell wird dort der Frage nachgegangen, ob die Bahnen eindeutig sind oder nicht.
- Die Ersetzung von $\frac{m}{2}v^2$ nach $mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ in der LAGRANGE-Dichte L beschreibt nach Einstein Teilchen in elektromagnetischen Feldern auch relativistisch.

D) konservatives N -Teilchensystem (nach Newton)

Zunächst betrachten wir die Newton'sche Beschreibung für Bahn $\underline{r}$, Bahntangente (Geschwindigkeit) $\underline{v}$ und Impuls $\underline{p}$ mit der Masse des i -ten Teilchens m_i :

$$\begin{aligned} t \rightarrow \underline{r}(t) &= \begin{pmatrix} \underline{r}_1(t) \\ \underline{r}_2(t) \\ \vdots \\ \underline{r}_N(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3N} \\ t \rightarrow \underline{v}(t) &= \begin{pmatrix} \underline{v}_1(t) \\ \underline{v}_2(t) \\ \vdots \\ \underline{v}_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\underline{r}}_1(t) \\ \dot{\underline{r}}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\underline{r}}_N(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3N} \\ t \rightarrow \underline{p}(t) &= \begin{pmatrix} \underline{p}_1(t) \\ \underline{p}_2(t) \\ \vdots \\ \underline{p}_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \underline{v}_1(t) \\ m_2 \underline{v}_2(t) \\ \vdots \\ m_N \underline{v}_N(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

konservatives Kraftfeld bedeutet:

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} \underline{F}_1(\underline{r}(t)) \\ \underline{F}_2(\underline{r}(t)) \\ \vdots \\ \underline{F}_N(\underline{r}(t)) \end{pmatrix}$$

wobei:

$$\underline{F}_i = -\frac{\partial}{\partial \underline{r}_i} U(\underline{r}(t)) = -\nabla_i U$$

mit einem(!) Potential U für alle Teilchen.

Wir wollen zwei wichtige Beispiele behandeln:

- **externes Potential**

$$U(\underline{r}) = U^{\text{ext.}}(\underline{r}) = \sum_{i=1}^N U^{\text{ext.}}(\underline{r}_i) \quad (3.41)$$

wobei $U^{\text{ext.}}$ gegeben ist, z.B. als Gravitationspotential.

- **internes Potential**

$$U = U^{\text{int.}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} U^{\text{int.}}(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \quad (3.42)$$

Damit das zweite Newton'sche Axiom (actio=reactio) erfüllt ist, muss $U^{\text{int.}}(\Delta \underline{r}) = U^{\text{int.}}(-\Delta \underline{r})$ sein.

Damit folgt für die Kraft auf ein Teilchen α , die von allen $N - 1$ anderen Teilchen ausgeht:

$$\begin{aligned} \underline{F}_\alpha^{\text{int.}} &= -\frac{\partial}{\partial \underline{r}_\alpha} U^{\text{int.}} = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial}{\partial \underline{r}_\alpha} U^{\text{int.}}(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \\ &= -\underbrace{\sum_{j=1}^{\alpha-1} \frac{\partial U^{\text{int.}}}{\partial \underline{r}_\alpha}(\underline{r}_\alpha - \underline{r}_j)}_{*} + \underbrace{\sum_{i=\alpha+1}^N \frac{\partial U^{\text{int.}}}{\partial \underline{r}_\alpha}(\underline{r}_i - \underline{r}_\alpha)}_{**} \end{aligned} \quad (3.43)$$

* ist der Beitrag für $i = \alpha$

** ist der Beitrag für $j = \alpha$

Die Newton-Gleichungen $\frac{d}{dt} \underline{p}_i = \underline{F}_i$ sind äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_i \underline{v}_i &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \underline{v}_i} \left(\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} \underline{v}_j^2 - U(\underline{r}) \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \underline{r}_i} \left(-U(\underline{r}) + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} \underline{v}_j^2 \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Fazit:

Die Bahnen des konservativen N -Teilchensystems nach NEWTON sind die Extremalen zur LAGRANGEDichte:

$$L(\underline{r}(t), \underline{v}(t), t) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} v_i^2 - U(\underline{r}(t))$$

3.2.2 Elementare Beispiele**(A) Eindimensionale konservative Systeme**

Ein Massenpunkt, dessen Position $q(t) \in \mathbb{R}$ in einem gegebenem Potential $U(q)$ variiert, sei modelliert durch

$$L = T - U = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q) \quad (3.45)$$

was zur EULER-LAGRANGE-Gleichung:

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q} \quad (3.46)$$

führt.

Beispiel:

Ein starres Pendel im Schwerfeld hat den Freiheitsgrad des Winkels q

$$T = \frac{1}{2} M l^2 \dot{q}^2 \quad \text{und} \quad U(q) = Mgz = Mgl(1 - \cos q)$$

Für ein Pendel der Länge $l = 1$ folgt:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - mg(1 - \cos q)$$

Da $U(q)$ zeitunabhängig ist ($\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0$), gilt Energieerhaltung. D.h.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \right) &= \frac{d}{dt} \left(\dot{q}^2 m - \frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q) \right) = \frac{d}{dt} (T + U) = 0 \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q) \right) = m\dot{q}\ddot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} \dot{q} = \dot{q} \left(m\ddot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} \right) = 0 \end{aligned}$$

die Gesamtenergie $E = T + U = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q)$ ist zeitlich konstant. Der Massenpunkt benötigt also $\Delta t = t_2 - t_1$ um von $q_1 = q(t_1)$ nach $q_2 = q(t_2)$ zu kommen.

$$t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int \frac{dt}{\dot{q}} = \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}} \quad (3.47)$$

da nach Energieerhaltung gilt: $\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}$

Bemerkung:

Für diese Rechnung wurde keine Kraft benötigt.

Da $\frac{m}{2} \dot{q}^2 \geq 0$ ist, erfolgt die Bewegung im Bereich gegeben durch $U(q) \leq E$

Wir wollen nun eine Diskussion verschiedener Bahntypen anschließen (vgl. Abbildung 3.6):

Abbildung 3.6: Gleichgewichtspunkte

- (i) E sei U_{min} , $\dot{q}$ sei 0, $q = q_{min}$
Da U_{min} ein lokales Minimum ist, folgt $\frac{\partial U}{\partial q} = F = 0$
Dieser Punkt ($q = q_{min}$) ist ein Gleichgewichtspunkt.
- (ii) $U_{min} < E < U_{max}$ ($q < q_{max}$)
hier ist $\dot{q}(t) \neq 0$. Im Allgemeinen jedoch gibt es zwei Umkehrpunkte q_+ und q_- an denen die Geschwindigkeit verschwindet, nämlich die Punkte, für die gilt:

$$U(q_+) = U(q_-) = E$$

→ geschlossene Bahnen: $q_1 \leq q(t) \leq q_2$, die anharmonische Oszillationen darstellen mit der Periode:

$$\frac{2\pi}{\omega} = T = 2 \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}} \quad (3.48)$$

Also ist die Bewegung periodisch: $q(t + T) = q(t)$

- (iii) $E = U_{max}$ und $\dot{q} = 0$ und $q = q_{max}$
Da U_{max} lokales Maximum ist, haben wir ein labiles Gleichgewicht
- (iv) $E > U_{max}$, es gibt nur noch einen Umkehrpunkt, an dem $E = U(q)$
Das Teilchen läuft nach $q \rightarrow +\infty$ für $t \rightarrow \infty$.

HIER FEHLEN NOCH DIE ABSCHNITTE B UND C, ich hoffe dass ich die am WE rein gestellt bekomme

(D) Bewegung im konservativen Zentralpotential $U(\underline{r}(t), t) = U(r)$.

Behauptung:

Wenn also ein Teilchen im Potential nur radiale Kräfte spürt...

$$\underline{F} = - \frac{\partial U}{\partial \underline{r}} = - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \underline{r}} = - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\underline{r}}{r} \quad (3.49)$$

... dann ist es im wesentlichen nur ein eindimensionales Problem, weil unser Modell:

$$L(\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t)) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 - U(r) \quad (3.50)$$

lautet

Es gibt eine extremale Wirkung, wenn gilt:

$$\frac{d}{dt} m \dot{\underline{r}} = - \frac{\partial U}{\partial \underline{r}} \cdot \frac{\underline{r}}{r} \quad (3.51)$$

Daraus folgt Drehimpulserhaltung.

$$\frac{d}{dt} \underline{L} = \frac{d}{dt} \underline{r} \times \underline{p} = m \cdot \dot{\underline{r}} \times \dot{\underline{r}} + \underline{r} \times \dot{\underline{p}} = - \frac{\partial U}{\partial r} (\underline{r} \times \underline{r}) \cdot \frac{1}{r^2} = 0 \quad (3.52)$$

Es liegt also eine ebene Bewegung vor:

$$\underline{r} \cdot \underline{L} = \underline{r} \cdot (\underline{r} \times \underline{p}) = 0 \quad (3.53)$$

Deshalb liegt $\underline{r}$ in der Ebene senkrecht zu $\underline{L}$ durch den Ursprung. Wir wählen $\underline{L} = l \cdot \hat{z}$. Die Bewegung erfüllt also $z(t) = 0$.

Ebene Polarkoordinaten:

Mit der Wahl der z-Achse parallel zu $\underline{L}$ folgt...

$$x(t) = r(t) \cdot \cos \varphi(t) \quad \& \quad y(t) = r(t) \cdot \sin \varphi(t) \quad (3.54)$$

und für die Geschwindigkeit:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (3.55)$$

Damit ergibt sich für die LAGRANGEDichte:

$$L = \frac{m}{2} \cdot (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (3.56)$$

weil nun φ eine zyklische Variable ist, d.h. $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ gilt, folgt:

$$l = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{konst.} \quad (3.57)$$

wobei l der Betrag des Drehimpulses ist, wie man leicht durch Einsetzen verifiziert. Die verbleibende EULERgleichung lautet:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} = \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \quad (3.58)$$

Daraus folgt:

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - \frac{\partial U}{\partial r} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(U + \frac{l^2}{2mr^2} \right) = - \frac{\partial}{\partial r} U^{eff} \quad (3.59)$$

Wir haben die Gleichungen nun auf ein radiales Problem mit dem effektiven Potential (wobei der Bruch den Zentrifugalterm darstellt)

$$U^{eff}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \quad (3.60)$$

zurückgeführt. Damit haben wir lediglich ein eindimensionales Problem zu lösen, für welches die Energieerhaltung gilt.

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + U^{eff}(r) \quad (3.61)$$

Der Beweis dafür ist:

$$\frac{d}{dt} E = m\dot{r}\ddot{r} + \frac{\partial U^{eff}}{\partial r} \dot{r} = \dot{r} \cdot \left(m\ddot{r} + \frac{\partial U^{eff}}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.62)$$

Zur Bestimmung von $r(\varphi)$ verwenden wir die Integrabilität von $E(r, \dot{r})$ und $l(l, r, \dot{\varphi})$.

3.2.3 Axiome und Grundbegriffe der Lagrange-Mechanik

Die Formulierung der Mechanik nach LAGRANGE erfolgt mit dem HAMILTONschen Extremalprinzip für Bahnkurven zur LAGRANGEDichte L .

1. Axiom:

Ein mechanisches System entspricht einer Bahn $\mathcal{C}$ im Konfigurationsraum $\mathcal{M}$.

$$\mathcal{C} : \{t, \underline{q} : \underline{q} = \underline{q}(t) \text{ für } t_- \leq t \leq t_+; \underline{q} \in \mathbb{R}^f\} \quad (3.63)$$

Bemerkungen:

- Die Begriffe werden noch sauberer definiert.
- Der Parameter t ist die Zeit
- Für N Teilchen ist der Raum $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{3N}$ und wird als Konfigurationsraum (Positionen- oder Lagersraum) bezeichnet. Die Erklärung für $f \leq 3N$ folgt in § 3.2.5
- Die Dimension f von $\mathcal{M}$ ist die Zahl der Freiheitsgrade.
- Falls f Koordinaten ausgewählt werden $(q_1, \dots, q_f)$, mit denen jeder Punkt von $\mathcal{M}$ dargestellt werden kann, heißen die $\underline{q} = (q_1, \dots, q_f)$ generalisierte Koordinaten.

2. Axiom:

Die Dynamik ist bestimmt durch die Angabe einer Dichtefunktion $L(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t), t)$ (unter gewissen Regularitätsbedingungen), so dass die Bahnen $\mathcal{C}$ des Systems Extremalen des HAMILTON'schen Wirkungsfunktionals $S = \int_{t_-}^{t_+} dt L(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t), t)$ sind.

Bemerkungen:

- Die Angabe von L heißt Modell des Systems
- S heißt Wirkung, daher kommt der Name des "Prinzips kleinster Wirkung"
- Die EULER-LAGRANGE-Gleichungen (zweiter Art) lauten hierzu:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (3.64)$$

- Die $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ heißen (generalisierte oder kanonische) Impulse
- Im Allgemeinen (zum Beispiel in magnetischen Feldern) stimmen kinetische und kanonische Impulse nicht überein:

$$\underline{p} = m\underline{v} + q\underline{A} \neq m\underline{v}$$

- q_i und p_i heißen ***zueinander konjugierte Variablen***.

Wichtige bisher schon besprochene Eigenschaften der Bewegung (= von L) sind:

- Zyklische Variablen: Eine Variable q_i ist zyklisch wenn gilt: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$. Dann ist der zugehörige kanonische Impuls zeitlich konstant: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{konst.}$
- Energieerhaltung: Hängt $L(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t), t)$ nicht explizit von der Zeit ab, d.h. $L(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t), t) = L(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t))$ und damit $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, dann ist

$$E = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (3.65)$$

eine Erhaltungsgröße und $\frac{d}{dt}E = 0$. Oft entspricht E der Gesamtenergie des mechanischen Systems.

3.2.4 Hamilton'sche Funktionen

3.2.4.1 Hamilton'sche Gleichungen

Das System der f EULERgleichungen sind f Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3.66)$$

Die zum System der Variationsrechnung gehören.

$$S = \int_{t_-}^{t_+} dt L(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t), t) \quad (3.67)$$

ist äquivalent zu den $2f$ Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\boxed{\frac{d}{dt} q_i(t) = \dot{q}_i(t) = \frac{\partial H(\underline{q}, \underline{p}, t)}{\partial p_i}} \quad (3.68)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} p_i(t) = \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H(\underline{q}, \underline{p}, t)}{\partial q_i}} \quad (3.69)$$

wobei die sogenannte HAMILTON'sche Funktion H von den zueinander konjugierten Variablen $\underline{q}$ und $\underline{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}}$ abhängt:

$$\boxed{H(\underline{q}, \underline{p}, t) = \underline{\dot{q}} \cdot \underline{p} - L} \quad (3.70)$$

Bei der Berechnung von H muss $\underline{\dot{q}} = \underline{\dot{q}}(\underline{q}, \underline{p}, t)$ gefunden werden durch Invertierung von

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \quad (3.71)$$

Beispiel:

Eindimensionale Bewegung im Potential. Laut Newton gilt:

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q} \quad (3.72)$$

Die kinetische Energie T und die potentielle Energie U sind gegeben durch:

$$T = \frac{m}{2} \dot{q}^2 \quad \text{und} \quad U = U(q) \quad (3.73)$$

Die LAGRANGE-Funktion lautet dann:

$$L = T - U = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q) \quad (3.74)$$

Der Impuls p ist nichts anderes als:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad (3.75)$$

Dessen Invertierung lautet damit also:

$$\dot{q} = \frac{1}{m} p \quad (3.76)$$

Die HAMILTON-Funktion sieht dann folgendermaßen aus:

$$H = \dot{q} \cdot p - L = \frac{p \cdot p}{m} - \frac{1}{2m} p^2 + U(q) = \frac{p^2}{2m} + U(q) = T + U \quad (3.77)$$

Mit dieser lassen sich die Newton-Gleichungen folgendermaßen ausdrücken:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} \quad (3.78)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (3.79)$$

$$(3.80)$$

Mit den selben Anfangsbedingungen legen die HAMILTON-Gleichungen und die EULER-Gleichungen die selben Bahnen fest. Zum Beweis betrachten wir das totale Differential:

$$dH(\underline{q}, \underline{p}, t) = \frac{\partial H}{\partial \underline{q}} d\underline{q} + \frac{\partial H}{\partial \underline{p}} d\underline{p} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (3.81)$$

und vergleichen es mit dem Differential

$$dX(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{p}, t) = d(\underline{p} \cdot \underline{\dot{q}} - L) = -\frac{\partial L}{\partial \underline{q}} d\underline{q} + \underline{\dot{q}} d\underline{p} - \frac{\partial L}{\partial t} dt + \left(\underline{p} - \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}} \right) d\underline{\dot{q}} \quad (3.82)$$

Behauptung:

Ist $dH = dX$, dann muss $\underline{p} = \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}}$ sein, genau so wie $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ und $\underline{\dot{q}} = \frac{\partial H}{\partial \underline{p}}$. Außerdem gilt mit diesen Beziehungen:

$$\underline{\dot{p}} = \frac{d}{dt} \underline{p} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}} = \star \quad (3.83)$$

Mit der zugehörigen EULER-Gleichung ist dies:

$$\star = \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (3.84)$$

3.2.4.2 Energieerhaltung

Aus dem totalen Differential von H folgt:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \underline{\dot{q}} + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \underline{\dot{p}} + \frac{\partial H}{\partial t} = -\underline{\dot{p}} \cdot \underline{\dot{q}} + \underline{\dot{q}} \cdot \underline{\dot{p}} + \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (3.85)$$

Wenn die HAMILTONsche Funktion (bzw. die LAGRANGE-Dichte) nicht explizit von der Zeit abhängt (also $-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$), dann ist H insgesamt eine Konstante, die man häufig einfach Gesamtenergie nennt.

Jedes Variationsproblem kann nach LAGRANGE mit L oder nach HAMILTON mit H berechnet werden.

3.2.5 Zwangsbedingungen

(A) Holonome Zwangsbedingungen [Zb]

Bsp.:

(i) Starres Pendel

Die Behauptung, der Massepunkt hängt an einer Stange der festen Länge L ist eine Zwangsbedingung. $|\underline{r}(t)| = L$ ist eine Modellierung des Festkörpers Stange.

(ii) Zwei starr(*) gekoppelte Pendel

(*) : oder auch durch eine Hooksche Feder mit Federkonstanten $\alpha \rightarrow \infty$

Dies ist ein Bsp., wo die Zwangskraft (harmonische Feder) bekannt ist und für $\alpha \rightarrow \infty$ (starre Kopplung) die Zb $\varphi_1 = \varphi_2$ produziert.

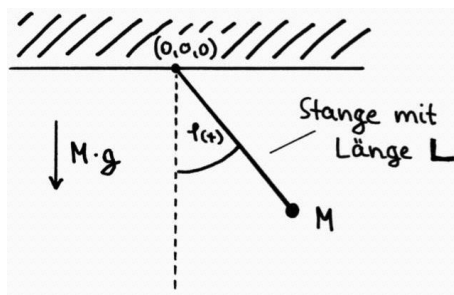


Abbildung 3.7: Starres Pendel

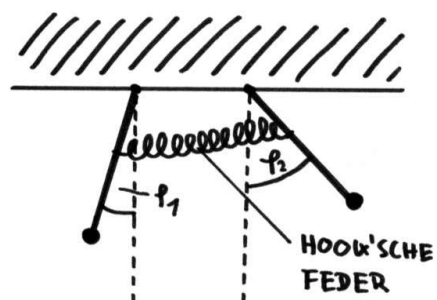


Abbildung 3.8: Gekoppelte Pendel

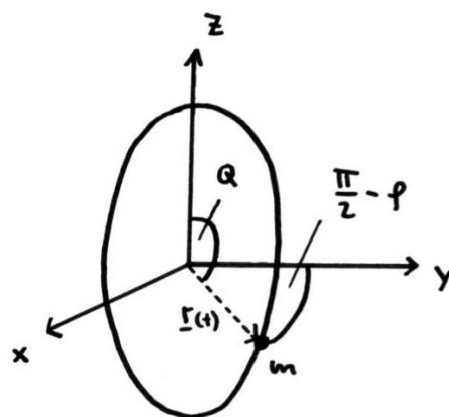


Abbildung 3.9: Perle auf rotierendem Ring

(iii) **Perle auf rotierendem Ring im Schwerfeld**

Ring, der sich um die vertikale $\hat{z}$ -Achse durch seinen Mittelpunkt mit fester Winkelgeschwindigkeit ω dreht, auf dem ein Massepunkt m reibungsfrei rutscht. Seine Polarkoordinaten lauten also:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos \varphi(t) \sin Q(t) \\ y(t) &= r(t) \sin \varphi(t) \sin Q(t) \\ z(t) &= r(t) \cos Q(t) \end{aligned}$$

Und die Zb für m lauten:

$$\begin{aligned} r(t) - R &= 0 & (\text{fester Radius des Ringes}) \\ \varphi(t) - \omega t &= 0 & (\text{konstante Rotation}) \end{aligned}$$

Bemerkung:

Nur in (ii) verstehen wir alle Kräfte. Allgemein modellieren wir jedoch technische Geräte durch Zwangsbedingungen

Definition: Sei ein mechanisches System gegeben im f -dimensionalen Konfigurationsraum durch die LAGRANGEDichte

$$L(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), t)$$

und dem System von n Gleichungen

$$\begin{aligned} F_1(q_1(t), \dots, q_f(t), t) &= 0 \\ \vdots \\ F_n(q_1(t), \dots, q_f(t), t) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow F_i(\underline{q}(t), t) = 0$ für $1 \leq i \leq n$ ($n < f$) gibt n **holonome Zwangsbedingungen**. Als Reaktion auf diese Zwangsbedingungen wirkt das System mit Zwangskräften $\underline{Z}$ nach außen, d.h. auf die mechanischen Geräte.

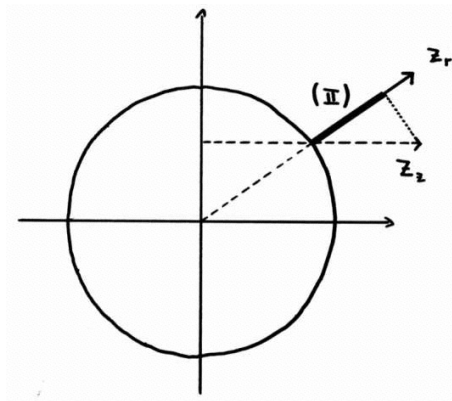


Abbildung 3.10: Auftretende Zwangskräfte zu Abb.(3.9)

Zu Bsp.(iii): Die 3 Koordinaten des Massepunktes unterliegen den Zb:

- für $\underline{r} = (x, y, z)^T$ (in Kartesischen Koordinaten)

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - m g z$$

$$\text{Zb: } F_1(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$F_2(x, y, z, t) = (x \cos \omega t + y \sin \omega t)^2 + z^2 - R^2 = 0$$

- für $\underline{r}$ in Polarkoordinaten

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{Q}^2 + r^2 \sin^2 Q \dot{\varphi}^2 \right) - m g r \cos Q$$

$$\text{Zb: } F_1(r, \varphi, Q, t) = r^2 - R^2 = 0$$

$$F_2(r, \varphi, Q, t) = \varphi - \omega t = 0$$

Bem.:

- Koordinaten sind wegen Zb nicht unabhängig voneinander.
- Zeitunabhängige Zb (d.h. alle $F_i(\underline{q}, t)$ sind $F_i(\underline{q})$, $\frac{\partial F_i}{\partial t} = 0$ heißen *skleronom*. Zeitabhängige heißen *rheonom*.
- Nicht holonome Zwangsbedingungen lassen sich nicht in Form $F_i(\underline{q}(t), t) = 0$ bringen, da sie die Geschwindigkeiten $\dot{\underline{q}}(t)$ enthalten, so dass es keine Stammfunktion gibt.

(B) Lagranges System mit Zwangsbedingungen

Satz (i): Ein System mit f Freiheitsgraden

$$L = L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$$

wird durch n funktional unabhängige holonome Zwangsbedingungen.

$$F_i(q_1, \dots, q_f, t) = 0 \quad 1 \leq i \leq n \leq f$$

auf einen $F = f - n$ - dimensionalen Konfigurationsraum $\mathcal{M}$ gezwungen, der beschrieben sei durch F lokale Koordinaten $Q_1, \dots, Q_F$.

Wenn in $\mathcal{M}$ die alten Koordinaten $\underline{q}$ durch die neuen Koordinaten $\underline{Q}$ ausgedrückt werden können, d.h. $q_i = f_i(Q_1, \dots, Q_F, t)$ für $1 \leq i \leq f$ so lautet die neue LAGRANGEDichte L , die das System in M vollständig beschreibt:

$$L(Q_1, \dots, Q_F, \dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_F, t)$$

$$= L(f_1, \dots, \underbrace{f_i(\underline{Q}(t), t)}_{(*)}, \dots, f_f, \frac{d}{dt}f_1, \dots, \underbrace{\frac{d}{dt}f_i(\underline{Q}(t), t)}_{(**}), \dots, \frac{d}{dt}f_f, t)$$

(*): i -te Komponente von $q_i = f_i(\underline{Q}(t), t)$

(**): i -te Komponente der Geschwindigkeit $\dot{q}_i = \frac{d}{dt}f_i(\underline{Q}, t) = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^F \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j$

Satz (ii): Ist das System in $\mathcal{M}$ gelöst, so erhält man die Zwangskräfte, indem man die $\underline{q}(t) = \underline{f}(\underline{Q}(t), t)$ in die ursprüngliche EULER-LAGRANGE-Gleichung einsetzen.

$$\text{d.h.} \quad \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right|_{\underline{q}(t) = \underline{f}(\underline{Q}(t), t)} = Z_i \quad 1 \leq i \leq f$$

Bew: von Satz (i) in 3.4.3

von Satz (ii) gibt die Definition

Bem: Satz gibt allgemeines Lösungsverfahren.

Zu Bsp (iii):

1. Formuliere $l = U - T$ (Zwangsbedingungen in Kart. Koord.)

$$l = \frac{m}{2} \dot{r}^2 - U(r) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 - mgz \quad (\text{Ausgangspunkt})$$

2. Berücksichtige Zwangsbedingungen durch Einführung geeigneter krummliniger Koordinaten, hier Polarkoordinaten r, φ, Q_j mit denen der neue Konfigurationsraum $\mathcal{M}$ lautet:

$$\mathcal{M} = \{Q \mid -\pi \leq Q \leq \pi\} \quad \text{Winkelvariationsbereich}$$

Die ursprünglichen Koordinaten lauten:

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos \omega t \sin Q(t) \\ y(t) &= R \sin \omega t \sin Q(t) \\ z(t) &= R \cos Q(t) \end{aligned}$$

und erfüllen die Zwangsbedingungen: Z_{b1} und Z_{b2}

3. Stelle neues L auf:

$$\begin{aligned} L(Q, \dot{Q}, t) &= l(\dots, \dot{x} = -R\omega \sin \omega t \sin Q(t) + R\dot{Q} \cos \omega t \cos Q(t), \dots) \\ &= \frac{m}{2} \left(R^2 \dot{Q}^2 + R^2 \omega^2 \sin^2 Q \right) - m g R \cos Q \end{aligned}$$

4. Löse $L(Q, \dot{Q}, t)$ durch LAGRANGE/ HAMILTON - Formalismus, um $Q(t)$ aus den Anfangsbedingungen $Q(t_0), \dot{Q}(t_0)$ zu bestimmen.
5. Falls verlangt, bestimme ursprüngliche Koordinaten (x, y, z) oder (r, φ, Q) aus $Q(t)$ um Zwangskraft zu bestimmen. Hier Z_r (radiale Zwangskraft).

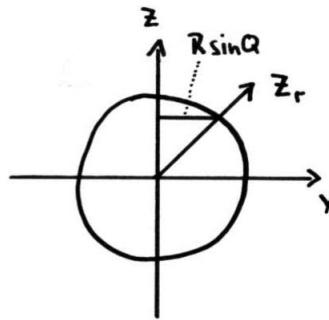


Abbildung 3.11: Radiale Zwangskraft zu Abb.(3.9)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial l}{\partial r} \quad \stackrel{\text{Polarkoord.}}{=} \quad m \left(\ddot{r} - \left(\dot{Q}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 Q \right) r + g \cos Q \right)$$

$$\text{womit} \quad Z_r = \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial l}{\partial r} \bigg|_{r=R; \varphi=\omega t; Q(t)} = mR \left(\underbrace{\dot{Q}^2}_{(I)} + \underbrace{\omega^2 \sin^2 Q}_{(II)} + \underbrace{mg \cos Q}_{(III)} \right)$$

(I): Zentrifugalkraft für Bewegung entlang des Rings.

(II): Radiale Komponente ($\sin Q$) der Zentrifugalkraft bei Rotation um die $\hat{z}$ -Achse im Abstand $R \sin Q$.

(III): Radiale Komponente der Schwerkraft

Bem:

- Genau diese Zentralkraft muss der Ring aushalten
- Alternatives Lösungsverfahren verwendet LAGRANGE-Multiplikatoren. (s. in Lehrbüchern, wir etwa NOLTIN, "Grundkurs Theoretische Physik" Band 2)

3.3 Mathematischer Einschub

In diesem Einschub werden wir etwas Geometrie behandeln. Eine Motivation dazu liefert der nächste Paragraph

3.3.0 Motivation

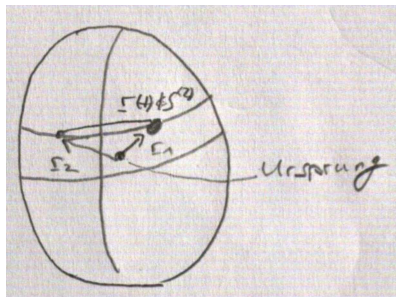


Abbildung 3.12: MP bewegt sich auf Kugel

Zunächst untersuchen wir die Bewegung eines Massenpunktes auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius $R = 1$. Für diese Bewegung gilt die Zwangsbedingung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Die Bahn des Punktes liegt in der Menge aller Punkte auf der sogenannten "Einheitskugel" oder auch "Einheitsphäre", die durch:

$$S^{(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\} \quad (3.86)$$

definiert ist.

Somit ist die Einheitsphäre der Konfigurationsraum $S^{(2)} = M$.

Es stellt sich nun die Frage, wie man in diesem Konfigurationsraum rechnet. Beispielsweise

interessiert man sich für die Geschwindigkeit (”die Ableitung der Bahnkurve”). Für zwei Orte in $S^{(2)}$:

$$\underline{r}_1 = \underline{r}(t_1) \quad \text{und} \quad \underline{r}_2 = \underline{r}(t_2)$$

liegt jedoch die Verbindungsgerade:

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_1 + \underbrace{\frac{\underline{r}_2 - \underline{r}_1}{t_2 - t_1}}_{\xrightarrow{t_2 \rightarrow t_1} \underline{v}(t)} \notin S^{(2)}$$

nicht auf der Oberfläche der Einheitskugel.

Somit muss geklärt werden, wie die Geschwindigkeit $\underline{v}(t)$ und die Beschleunigung $\underline{\dot{v}}(t)$ definiert werden muss, wenn die Bewegung ganz in $S^{(2)}$ verlaufen soll.

In der Newton’schen Mechanik benötigt man die Beschleunigung!

Lösung:

Die analytische Mechanik (nach Lagrange, Hamilton etc.) verwendet generalisierte Koordinaten.

3.3.1 Karten und Koordinaten

(A) Definition:

Für eine Menge $\mathcal{M}$ (Konfigurationsraum nach Lagrange) von Punkten im $\mathbb{R}^n$ (vgl. Ab-

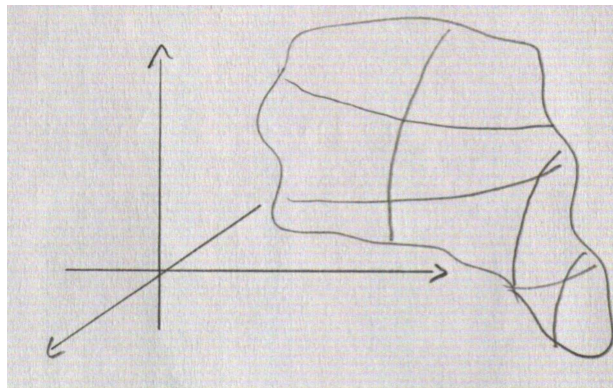


Abbildung 3.13: Zur Definition von Karten

bildung 3.13) $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ wollen wir Koordinaten einführen, um jeden Punkt aus $\mathcal{M}$ zu bezeichnen (”labeln”). Koordinaten sind Tupeln von f reellen Zahlen (mit $f \leq n$) aus einem offenen Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^f$

Bemerkungen:

- Die Zahl f der notwendigen Koordinaten heißt Dimension von M .
- kartesische Koordinaten $\underline{r} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \end{pmatrix}$ leisten das Gewünschte, häufig sind aber ”krümm-
linige” Koordinaten viel nützlicher als kartesische.

Definition:

Eine **Karte** ist eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^f$ mit den Koordinaten $(q_1, \dots, q_f) \in U$ zusammen mit eindeutig umkehrbaren Abbildungen von U in eine Untermenge $f(U) \subset \mathcal{M}$.

$$f : U \mapsto f(U) \subset \mathcal{M}; \quad r_i = f_i(q_1, \dots, q_f)$$

für $i = 1 \dots f$.

Was wir hier unter Karten verstehen, kann man vergleichen mit Landkarten die jeden Punkt einer geographischen Region genau beschreiben.

Beispiel:

Wir betrachten wieder die Einheitssphäre $\mathcal{M} = S^{(2)}$ in $\mathbb{R}^3$: $S^{(2)} = x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Damit folgt $f = 2$.

- Zunächst wollen wir dieses Problem in kartesischen Koordinaten behandeln:

$$(q_1, q_2) \subset U$$

Mit der Abbildung in die Kugel:

$$x = q_1, \quad y = q_2, \quad z = \sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2}$$

- Nun behandeln wir das selbe Problem in Polarkoordinaten. Es gilt also für die

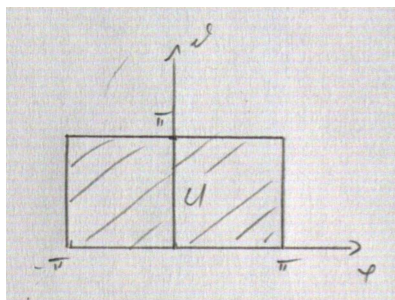


Abbildung 3.14: Einheitssphäre in Polarkoord.

Koordinaten (s. Abbildung 3.14):

$$\begin{aligned} -\pi < \varphi < \pi \quad 0 < \vartheta < \pi \\ x &= \cos \varphi \sin \vartheta \\ y &= \sin \varphi \sin \vartheta \\ z &= \cos \vartheta \end{aligned}$$

Bemerkung:

Die Lösung von LAGRANGE zum Problem das in der Motivation gestellt wurde liefert, dass wir nur in U differenzieren müssen und nicht im Konfigurationsraum $\mathcal{M}$. Für die Geschwindigkeit benötigen wir nur $\dot{\varphi}(t)$ und $\dot{\vartheta}(t)$.

Da U eine offene Menge und einfache "flache" Teilmenge des $\mathbb{R}^f$ ist, können wir das und

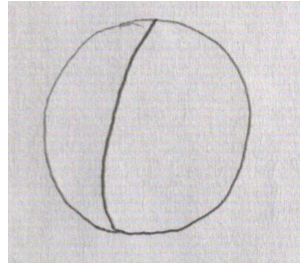


Abbildung 3.15: Datumlinie

es ist wie gewohnt. In Abbildung 3.15 betrachten wir wieder das selbe Beispiel. Hier ist $f(U)$ nicht die ganze Einheitssphäre, sondern nur:

$$f(U) = S^{(2)} - \{x = -\sin \vartheta, y = 0, z = \cos \vartheta \mid 0 \leq \vartheta \leq \pi\}$$

Es fehlt die sogenannte **Datumlinie** (bei $\varphi = \pi$)

Umkehrung:

In Abbildung 3.16 ist die Umkehrung dargestellt. Mathematisch erhält man sie mit

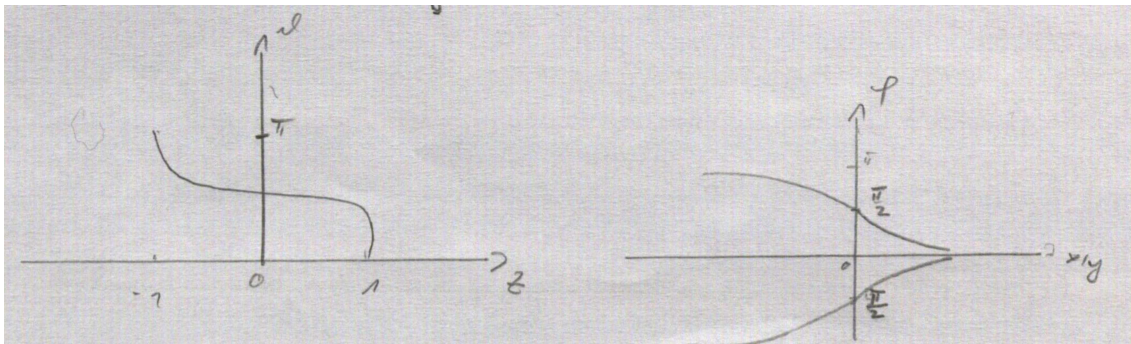


Abbildung 3.16: Umkehrung

folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \arccos z \\ \varphi &= \begin{cases} \operatorname{arccot} \frac{x}{y} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \\ -\operatorname{arccot} \frac{x}{y} & \text{für } y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Eine Karte reicht nicht aus, um die Einheitssphäre ganz darzustellen.
- U soll eine offene Menge sein, um infinitesimale Verschiebungen dq_i um jeden Punkt zuzulassen; dadurch sind Ableitungen möglich.

Definition:

- Ein **Atlas** ist eine Sammlung von "kompatiblen" Karten, so dass jeder Punkt von $\mathcal{M}$ in mindestens einer Karte dargestellt werden kann.
- Zwei Karten U und $\bar{U}$ haben einen überlappenden Bildbereich in M : $f(U) \cap \bar{f}(\bar{U}) = \bar{M} \neq \emptyset$. Beide Karten heißen **kompatibel**, wenn die Abbildungen:

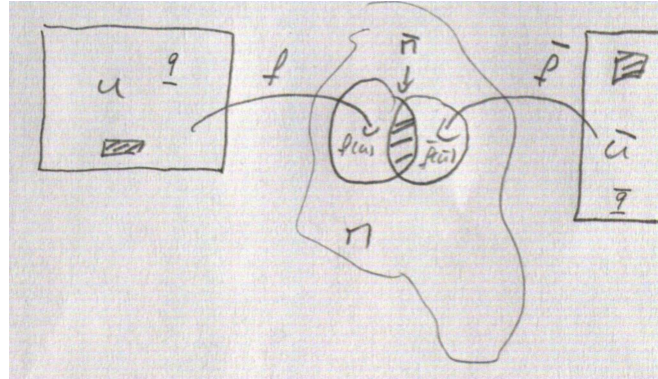


Abbildung 3.17: kompatible Karten

$$f^{-1} \circ \bar{f} : q_i = \bar{g}_i(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_f) \quad (3.87)$$

$$\bar{f}^{-1} \circ f : \bar{q}_i = g_i(q_1, \dots, q_f) \quad (3.88)$$

differenzierbar und zueinander invers sind.

Diese Formulierung ist viel komplizierter, als was man sich darunter vorstellen muss. Vergleichen wir hier wieder mit Landkarten, so sind dort zwei Landkarten genau dann kompatibel, wenn die selbe Strecke auf beiden Karten auch gleich lang ist, dazu muss man vielleicht auf der einen von inch in Centimeter umrechnen, aber es gibt diese Umrechnungsformeln und sie sind umkehrbar.

3.3.2 Koordinatentransformationen

Der Übergang $\underline{q} \rightarrow \bar{\underline{q}}$ oder $\bar{\underline{q}} \rightarrow \underline{q}$ heißt **Koordinatentransformation** oder auch Punkttransformation. Diese Definition der Koordinatentransformation ist viel allgemeiner gehalten als bei der Relativitätstheorie (vgl. Lorentztransformation).

In der analytischen Mechanik muss nur die Kompatibilität von Koordinaten bei Koordinatentransformationen gesichert sein.

Zunächst wollen wir folgenden Satz beweisen:

Eine differenzierbare Koordinatentransformation ist lokal umkehrbar.

Beweis:

Eine Koordinatentransformation $\bar{q}_i = g_i(q_1, \dots, q_f) = g_i(\underline{q})$ für $i = 1 \dots f$ ist im Punkt P differenzierbar, wenn die JACOBI-Determinante J von Null verschieden ist, d.h.:

$$\text{Det} \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial q_j} \right\} \Big|_P = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial q_f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_f}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial g_f}{\partial q_f} \end{pmatrix} \right|_P \neq 0$$

Aus dem Satz über implizite Funktionen (vgl. Mathematik) folgt dann, dass die f Gleichungen für die $\bar{q}_i$:

$$F_i(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_f, q_1, \dots, q_f) = \bar{q}_i - g_i(\underline{q}) = 0$$

für $i = 1..f$

(d.h. $F_i = 0$ für $i = 1..f$) in einer Umgebung von P eindeutig nach $q_i = \bar{g}_i(\bar{q})$ auflösbar sind.

3.3.3 Koordinatentransformation zur Eliminierung von Zwangsbedingungen

Definition:

- m holonome Zwangsbedingungen ($F_i(q_1, \dots, q_f, t) = 0$) sind **funktional unabhängig**, wenn eine differenzierbare Koordinatentransformation:

$$q_i = f_i(Q_1, \dots, Q_F, \bar{q}_{F+1}, \dots, \bar{q}_f, t) \quad i = 1..f$$

existiert, so dass die Zwangsbedingungen lauten:

$$F_i(\dots q_i(Q, \bar{q}) \dots) = \bar{F}_i(Q_1, \dots, Q_F, \bar{q}_{F+1}, \dots, \bar{q}_f, t) \quad (3.89)$$

und die Funktionaldeterminante im Punkt P mit $1 \leq i \leq m$:

$$\text{Det} \left\{ \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \bar{q}_j} \right\} \neq 0 \quad \text{erfüllt, für } F+1 \leq j \leq f \text{ wobei } F = f - m$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen können dann die m Zwangsbedingungen $F_i = 0$ in der Umgebung von P eindeutig aufgelöst werden nach

$$\bar{q}_i = g_i(Q_1, \dots, Q_F, t) \quad F+1 \leq i \leq f$$

und damit ist es gelungen auf $\mathcal{M}$ die alten Koordinaten $\underline{q}$ durch die neuen $\underline{Q}$ auszudrücken. Wir wollen dies an einem Beispiel (s. Abbildung 3.18) veranschaulichen:

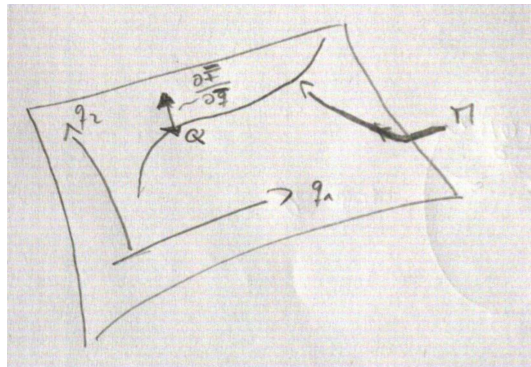


Abbildung 3.18:

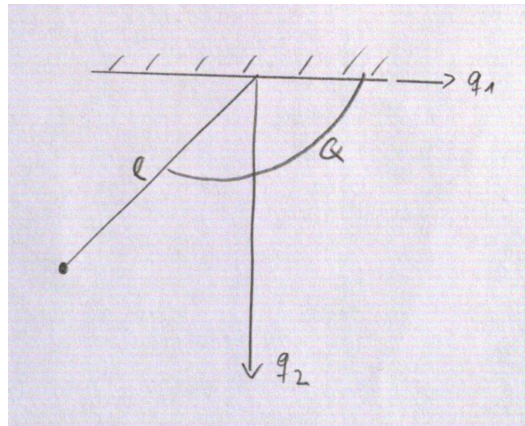


Abbildung 3.19: Pendel

$\mathcal{M}$ sei als Konfigurationsraum gegeben durch die Zwangsbedingung:

$$F(q_1, q_2) = 0$$

dann ist $f = 2$ und $F = 1$.

Wir betrachten als Beispiel ein Pendel der festen Länge $l = 1$, zunächst haben wir $f = 2$ Koordinaten (q_1 & q_2) mit der Zwangsbedingung:

$$F(q, q_2) = q_1^2 + q_2^2 - 1 = 0$$

Die Zwangsbedingung ist funktional unabhängig, also führen wir eine Koordinatentransformation in Polarkoordinaten durch:

$$\begin{aligned} q_1 &= \bar{q} \cos Q = f_1(\bar{q}, Q) & 0 < \bar{q}, 0 < Q < 2\pi \\ q_2 &= \bar{q} \sin Q = f_2(\bar{q}, Q) \end{aligned}$$

Die Zwangsbedingung lautet dann:

$$\bar{F}(\bar{q}, Q) = F(f_1, f_2) = \bar{q}^2 - 1 = 0$$

Und weil $\text{Det} \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial \bar{q}} \right\} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{q}} = 2\bar{q} \neq 0$, kann man also $\bar{F} = 0$ und man kann nach $\bar{q} = g(Q)$ auflösen. In diesem liegt ein Spezialfall vor, nämlich dass $\bar{q} = 1 = \text{const.}$, also unabhängig von Q ist.

Fazit: Die Betrachtung der Funktionaldeterminanten genügt, um die Zwangsbedingungen durch die Wahl geschickter Koordinaten zu eliminieren.

3.3.4 Differenzierbare Mannigfaltigkeit

Definition:

Eine zusammenhängende Menge ist ein f -dimensionale **differenzierbare Mannigfaltigkeit**, wenn ein Atlas aus kompatiblen Karten existiert, so dass jeder Punkt von $\mathcal{M}$ in mindestens einer Karte vorhanden ist.

Bemerkungen:

- Mannigfaltigkeiten sind Konzepte zur Verallgemeinerung des Raumes auf krummlinige Koordinaten.
- Das Problem des Differenzierens (Geschwindigkeit, Beschleunigung), welches wie wir uns erinnern das Motiv des Kapitels war, ist dadurch gelöst, dass in der Karte U differenziert wird, d.h. in der LAGRANGE-Dichte tauchen $\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t)$ auf.
- Der Konfigurationsraum $\mathcal{M}$ eines LAGRANGE-Systems ist eine f -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Die Einheitskugel $S^{(2)}$ ist beispielsweise eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit den Polarkoordinaten ϑ, φ als 'Karte'. (Um die $S^{(2)}$ vollständig zu beschreiben sind allerdings mindestens zwei Karten notwendig.) $S^{(2)}$ ist der Konfigurationsraum vom sphärischen Pendel. Es gilt:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2)$$

mit der Zwangsbedingung: $r(t) = R = \text{const.}$, d.h. die Kugel an der Pendelstange kann sich "frei" auf der Oberfläche der Kugel mit dem Radius R bewegen.

3.4 Symmetrien & Erhaltungssätze

Symmetrien und Erhaltungssätze sind Eigenschaften mechanischer Systeme, die aus der Formulierung als Variationsproblem abgeleitet werden können.
(analoge Ergebnisse gelten für alle Variationsprobleme)

3.4.1 Bahndeterminismus

Wir erinnern uns an die Beobachtung von NEWTON:

Durch Anfangsorte und Anfangsgeschwindigkeiten sind die Bahnen eindeutig mit der NEWTON'schen Bewegungsgleichung festgelegt:

$$m\dot{\underline{v}} = \underline{F}$$

natürlich stellt sich nun die Frage, ob dies auch in der Formulierung der Mechanik nach LAGRANGE gilt. Dazu betrachten wir die EULER-LAGRANGE-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 = \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (3.90)$$

Wir definieren die sogenannte **Legendre-Matrix**:

$$L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (3.91)$$

Wenn die LEGENDRE-Matrix L invertiert werden kann (gemäß den Rechenregeln aus der Linearen Algebra bedeutet dies, dass ihre Determinante von Null verschieden sein muss),

dann sind die EULER-LAGRANGE-Gleichungen äquivalent zu folgenden Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung:

$$\ddot{q}_j + L_{ji}^{-1} \left(\sum_k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.92)$$

Diese Gleichungen liefern nach den Sätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen eindeutige Lösungen zu den Anfangswerten:

$$q_i(t_0) = q_i^0 \quad \& \quad \dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_i^0$$

für $1 \leq i \leq f$

Daraus folgt, dass es sich auch bei der LAGRANGE-Formulierung der Mechanik um eine eindeutige deterministische Bewegung handelt, für den Fall, dass die Determinante der LEGENDRE-Matrix von Null verschieden ist. Dann legen also die Anfangswerte für Ort und Geschwindigkeit die Bahn eindeutig fest.

Bemerkung:

Ein Gegenbeispiel ist das Problem der kürzesten Bahn in der Ebene:

$$L = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}$$

$$L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$

$$\Rightarrow \underline{L} = \begin{pmatrix} \dot{x}^2 & -\dot{x}\dot{y} \\ -\dot{x}\dot{y} & \dot{y}^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

mit $\text{Det}(L_{ij} \equiv 0)$.

Es existiert also keine eindeutige Lösung, was wir nicht erwartet haben. Über die Geschwindigkeiten kann keine Aussage getroffen werden.

3.4.2 Kovarianz

Definition:

Kovariant also **(form-)invariant** heißen Bewegungsgleichungen, die in beliebigen Koordinatensystemen dieselbe funktionale Form annehmen.

Die Idee ist, dass die Physik unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist.

Bemerkung:

Die NEWTON'sche Mechanik mit $m\dot{\underline{v}} = \underline{F}$ ist nur kovariant unter Galilei-Transformation, ansonsten treten Trägheitskräfte auf.

Satz:

Die Eigenschaft einer Kurve, eine Extremale des Wirkungsfunktionalis zur LAGRANGEDichte zu sein, ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten.

Dieser Satz bedeutet, dass die EULER-LAGRANGE-Gleichungen kovariant unter beliebiger Koordinatentransformation (Punkttransformation) sind, wenn diese kompatibel ist.

Die Kovarianz ist der große Vorteil der Variationsrechnung.

Wir wollen im Folgenden den Satz beweisen:

Die Behauptung lautet, dass aus:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} = 0$$

$$\& \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$$

die selbe Bahn folgt, wenn die Koordinaten durch:

$$q_i = f_i(\underline{Q}, t) \quad 1 \leq i \leq f$$

verknüpft sind, und:

$$L(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, t) = l \left(f_1(\underline{Q}, t), \dots, f_f(\underline{Q}, t), \frac{d}{dt} f_1(\underline{Q}, t), \dots, \frac{d}{dt} f_f(\underline{Q}, t), t \right)$$

wobei $l = l(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$.

An dieser Stelle soll ein Beispiel eingeschoben werden, um die Bedingungen zu veranschaulichen:

Wir betrachten in der Ebene den Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten:

$$l \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, t \right) \quad \text{sei: } T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Dann liefert die Standardkoordinatentransformation:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi = f_1(r, \varphi) \\ y &= r \sin \varphi = f_2(r, \varphi) \\ \Rightarrow L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}, t) &= \frac{m}{2} \left(\frac{d}{dt} f_1(r(t), \varphi(t)), \frac{d}{dt} f_2(r(t), \varphi(t)) \right) \\ &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \end{aligned}$$

Die selbe Bahn folgt aus:

$$\frac{\partial l}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{x}} = 0 = \frac{\partial l}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{y}}$$

und:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 = \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

Nach diesem Beispiel fahren wir nun fort mit dem Beweis:

Wir stellen folgende Vorüberlegungen an:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_i &= \dot{q}_i = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} &= \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \quad \star \end{aligned}$$

da $\dot{Q}_j$ nur explizit auftaucht.

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial r \partial Q_j} + \sum_k \frac{\partial^2 f_i}{\partial Q_j \partial Q_k} \dot{Q}_k \quad \star \star$$

Damit folgt für $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial Q_j} &= \sum_i \frac{\partial l}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \sum_i \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_i \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} \stackrel{*}{=} \sum_i \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \sum_i \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right) \end{aligned}$$

Die letzten drei Formeln liefern:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \sum_i \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right)$$

und weil nun:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial Q_j \partial t} + \sum_k \frac{\partial^2 f_i}{\partial Q_j \partial Q_k} \dot{Q}_k \stackrel{**}{=} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}$$

folgt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial l}{\partial q_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$$

Somit ist bewiesen, dass die EULER-LAGRANGE-Gleichungen für die $\underline{Q}$ -Koordinaten gelten, weil sie für die $\underline{q}$ -Koordinaten gelten.

3.4.3 Kovarianz unter holonomen Zwangsbedingungen

In § 3.2.5 wurde behauptet, dass das Lagrange-System $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$ mit m Zwangsbedingungen $F_i(q_1, \dots, q_f)$ gelöst wird durch $L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}, t)$ in der $F=f-m$ dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ (Beispiel: Perle auf Ring mit dem Winkel Q). In § 3.3.3 wurden Koordinaten gefunden, so dass innerhalb von $\mathcal{M}$ gilt:

$$q_i = f_i(Q_1, \dots, Q_F, \bar{q}_{F+1}, \dots, \bar{q}_f) \quad 1 \leq i \leq f \quad (3.93)$$

und alle $\bar{q}_i$ durch die $\underline{Q}$ bestimmt sind (Beispiel Pendel: $r = 1$):

$$\boxed{\bar{q}_i = g_i(Q_1, \dots, Q_F)} \quad F+1 \leq i \leq f \quad (3.94)$$

Bei der Berechnung der Bahn in der Variationsrechnung können also nur die $Q_i, \dots, Q_F$ verwendet werden, während die $\bar{q}_{F+1}, \dots, \bar{q}_f$ aus $\underline{Q}$ folgen und ihre Werte $\bar{q} = \underline{g}(\underline{q})$ annehmen. Die Variation der Wirkung unter $Q_i(t) \rightarrow Q_i(t, \varepsilon) = Q_i(t) + \varepsilon \cdot \delta Q_i(t)$ Vergleichsbahnen lautet:

$$\frac{dS}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0 = \int_{t_-}^{t_+} dt \sum_{j=1}^F \left(\frac{\partial L}{\partial Q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \right) \delta Q_j + \sum_{j=F+1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{q}_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_j} \right) \cdot \underbrace{\delta \bar{q}_j}_{=0} \quad (3.95)$$

Der letzte Faktor ist 0, da die $\bar{q}$ durch die $\underline{Q}$ festgelegt sind. Also können die Euler-Lagrange-Gleichungen nur für die Q_j gefolgert werden. Zu beachten ist, dass die δQ_i beliebige Funktionen darstellen bis auf Anfangs- und Endpunkte, für die gilt: $\delta Q_i(t_{\pm}) = 0$

3.4.4 Eichinvarianz

Die Idee ist: Beim Variationsprinzip werden Integrale miteinander verglichen. Das heißt aber nicht, dass die Integranden auch gleich sein müssen.

Satz: Mit einer beliebigen Funktion $\chi = \chi(\underline{q}, t)$, die nicht von $\dot{\underline{q}}$ abhängt, ergeben L und $\hat{L} = L + \frac{d}{dt}\chi(\underline{q}, t)$ die selben extremalen Bahnen.

Beweis: Der Wert der Wirkung $\hat{S}$ lautet dann:

$$\hat{S} = \int_{t_-}^{t_+} dt \hat{L} = \int_{t_-}^{t_+} dt L + \int_{t_-}^{t_+} \frac{d}{dt} \chi dt = S + \underbrace{\chi(\underline{q}(t_+), t_+) - \chi(\underline{q}(t_-), t_-)}_{\text{konstant}} \quad (3.96)$$

Die hinteren Terme bilden eine Konstante, da beim Vergleich der Bahnen alle durch die Anfangs- und Endpunkte gehen. Diese Konstante beeinflusst die Bahn also nicht. Das erklärt das Verhalten von L bei Eichtransformation der elektromagnetischen Potentiale ϕ und $\underline{A}$ in § 3.2.1

3.4.5 Das Noether-Theorem

Das NOETHER-Theorem beschreibt den Zusammenhang zwischen Symmetrien der Lagrangedichte L und Erhaltungsgrößen

(A) Erinnerung: Autonome Systeme § 3.2.4

Wenn die Lagrangedichte ein autonomes System beschreibt, also wenn gilt $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, dann ist die Hamiltonfunktion konstant:

$$H = \dot{\underline{q}} \cdot \underline{p} - L = \text{konst.} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} H = \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (3.97)$$

Dies bedeutet, dass das System zeitlich homogen ist. Ob wir die Bewegung bei t_0 starten oder bei $t_0 + \Delta t$ oder erst übermorgen ist belanglos und macht keinen Unterschied.

Bemerkungen:

- Häufig ist $H = T + U = E$ die Gesamtenergie. Dann spricht man von Energieerhaltung.
- Im Falle rheonomer Zwangsbedingungen, die aber ein autonomes L liefern, ist $H = \text{konst.} \neq$ Gesamtenergie, weil die Zwangskräfte Arbeit leisten (siehe Perle auf drehendem Ring). Das ergibt sich aus dem Vergleich von $H = T + U$ und $\dot{Q} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} - L$.

(B) Erinnerung: Zyklische Variable

Zu einer zyklischen Variablen q_i (d.h. q_i taucht nicht in L auf, $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$) gehört eine Erhaltungsgröße, der zugehörige kanonische Impuls:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{konst.} \quad (3.98)$$

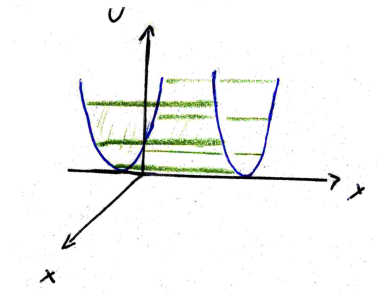


Abbildung 3.20: Potential unabhängig von y

Beispiel : $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U$, sei z.B. $U(x) = \frac{k}{2}x^2$ mit $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$:

$$\Rightarrow p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = \text{konst.} \quad (3.99)$$

Der Impuls in y-Richtung ist konstant. Das Potential U (und damit L) ist invariant (symmetrisch) unter Verschiebung entlang der y-Achse, d.h. unter der Abbildung $y \rightarrow y + \alpha$.

$$U(x)_y = U(x)_{y'=y+\alpha} \quad (3.100)$$

Die Idee stammt von EMMY NOETHER aus dem Jahr 1918: Wenn ein System invariant/symmetrisch ist unter kontinuierlicher Verschiebung/Abbildung, dann gibt es eine Erhaltungsgröße.

(C) Noether-Theorem

Wenn die Lagrangedichte $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ unter einer kontinuierlichen Abbildung h^α des Konfigurationsraumes $\mathcal{M}$ (Verschiebung)

$$h^\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} : \hat{q}_i = h_i^\alpha(\underline{q}, t) \quad (3.101)$$

die nach α stetig differenzierbar sei, für $\alpha = 0$ die identische Abbildung $h_i^\alpha(\underline{q}, t)|_{\alpha=0} = q_i$ sei und invertierbar ist, d.h. wenn $q_i = \hat{h}(\hat{\underline{q}}, t)$. Wenn also L bis auf eine Eichtransformation invariant bleibt...

$$\hat{L} = L(\hat{\underline{h}}^\alpha(\hat{\underline{q}}, t), \hat{\underline{h}}^\alpha(\hat{\underline{q}}, t), t) \quad (3.102)$$

$$\hat{L}(\hat{\underline{q}}, \hat{\underline{\dot{q}}}, \alpha, t) = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) + \frac{d}{dt} G(\hat{\underline{q}}, \alpha, t) \quad (3.103)$$

... wobei die Gleichheit die Bedingung der Symmetrie ist, dann ist folgende Funktion J konstant:

$$J(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial q_i(\hat{\underline{q}}, \alpha, t)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial G(\hat{\underline{q}}, \alpha, t)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \text{konst.} \quad (3.104)$$

J ist eine Erhaltungsgröße, ein Integral der Bewegung.

Bemerkung:

Nicht verwechseln mit Kovarianz! Bei der Koordinatentransformation durch Einsetzen von $\hat{L}(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, \alpha, t) = L(\hat{h}^\alpha(\hat{q}, t), \hat{h}^\alpha(\hat{q}, t), t)$ folgt die selbe Bahn aufgrund der Kovarianz, die Funktionen L und $\hat{L}$ sind jedoch unterschiedlich.

Beispiel: $L = T$ in der Ebene mit $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ sieht bei Koordinatentransformation zu Polarkoordinaten eindeutig anders aus:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \quad (3.105)$$

Das NOETHER-Theorem gilt nur für Fälle, in denen der Unterschied nur einem Term der Form $\frac{d}{dt}G$ entspricht.

Beweis: Nach der Annahme gilt für alle α (allerdings ist nur $\alpha = 0$ benötigt):

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\hat{L}(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, \alpha, t) - \frac{d}{dt} G(\hat{q}, t, \alpha) \right)_{\alpha=0} = 0 \quad (3.106)$$

Dies ist das Gleiche wie

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\hat{L}(\hat{q}, \hat{\dot{q}}^\alpha, t) - \frac{d}{dt} G(\hat{q}, t, \alpha) \right) = \frac{d}{d\alpha} \left(L(\hat{h}^\alpha(\hat{q}, t), \frac{d}{dt} \hat{h}^\alpha(\hat{q}, t) t) - \frac{d}{dt} G(\hat{q}, t, \alpha) \right)_{\alpha=0} = 0 \quad (3.107)$$

Mit EINSTEIN-Summenkonvention geschrieben sieht das folgendermaßen aus:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \frac{d\hat{h}_i^\alpha}{d\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{d\dot{\hat{h}}_i^\alpha}{d\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{d}{d\alpha} G(\hat{q}, t, \alpha) \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (3.108)$$

Die EULER-Gleichungen bringen uns:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.109)$$

und es gilt:

$$\frac{d\dot{\hat{h}}_i^\alpha}{d\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{d\hat{h}_i^\alpha}{d\alpha} \quad (3.110)$$

Daraus folgt:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial q_i(\hat{q}, t, \alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial G(\hat{q}, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = 0 \quad (3.111)$$

was zu beweisen war.

Wiederholung: Noether-Theorem

$$L(\underline{\hat{q}}, \dot{\underline{\hat{q}}}, t) \stackrel{(*)}{=} L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \alpha) = (**)$$

(*) : $\underline{q} = \underline{q}(\underline{\hat{q}}, t, \alpha)$ mit α : kontinuierlicher Parameter

$$(**) \stackrel{Annahme}{=} L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + \frac{d}{dt} G(\underline{q}, t, \alpha)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 0 &= \frac{d}{d\alpha} \left(\hat{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t, \alpha) - \frac{d}{dt} G(\underline{q}, t, \alpha) \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{d}{d\alpha} \left(L(\underline{\hat{q}}, \dot{\underline{\hat{q}}}, t) - \frac{d}{dt} G(\underline{q}, t, \alpha) \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \underline{\hat{q}}} \frac{d\underline{\hat{q}}}{d\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{\hat{q}}}} \frac{d\dot{\underline{\hat{q}}}}{d\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{d}{d\alpha} G(\underline{q}, t, \alpha) \Big|_{\alpha=0} \\ &\stackrel{EL-Gl}{=} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{\hat{q}}}} \frac{d\underline{\hat{q}}}{d\alpha} - \frac{d}{d\alpha} G(\underline{q}, t, \alpha) \right\} \Big|_{\alpha=0} \end{aligned}$$

Bem.:

- Dies ist ein konstruktiver Beweis!
- Er erfordert eine kontinuierliche Abbildung (Parameter α). Das Noether-Theorem liefert keine Erhaltungsgrößen bei diskrete Symmetrien (z.B. Spiegelung)
- Symmetrie $\rightarrow$ Erhaltungsgröße Umkehrung gilt nicht! (Bsp.: RUNGE-LENZ-Vektor beim Potential $\frac{1}{r}$ -Potential)($\rightarrow$ Hamilton Mech.)

(D) Homogenität des Raums**Translationsinvarianz & Impulserhaltung (beim N-Teilchen-System)**

Räumlich homogen bedeutet, dass eine Verschiebung

$$\underline{\hat{r}}_i = \underline{r}_i - \underline{a} \quad ; \quad 1 \leq i \leq N \quad \text{mit } \underline{a} : \text{beliebiger Vektor}$$

das System invariant lässt. (Das sind eigentlich 3 Verschiebungen mit Parametern a_x, a_y, a_z)
d.h.

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\underline{r}}_i^2 - U(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\underline{\hat{r}}}_i^2 - U(\underline{r}_1 + \underline{a}, \dots, \underline{r}_N + \underline{a}) \\ &\stackrel{inv.}{=} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\underline{\hat{r}}}_i^2 - U(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N) \end{aligned}$$

$$\text{d.h.} \quad \hat{L}(\underline{\hat{r}}_i) = T(\underline{\hat{r}}_i) - U(\underline{r}_i)$$

Erinnerung an Bsp.:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x)$$

ist invariant für $y \rightarrow y - a_y$

aber nicht für $x \rightarrow x - a_x$

damit U dies für beliebiges (!) a erfüllt, muss (wenn nicht $U = \text{konst.}$ gelten soll)

$$U(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N) = U(\underline{r}_1 - \underline{r}_2, \underline{r}_1 - \underline{r}_3, \dots)$$

U darf nur von dem Teilchenabstandsvektoren abhängen.

$\xrightarrow{NT}$ erhaltene Größen (Bem.: Eichfunktion $G = 0$ gilt hier)

$$\begin{aligned} J_{a_x}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial a_x} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_{i=1}^N m \dot{x}_i = P_x \end{aligned}$$

x-Komponente des Gesamtimpulses

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i$$

Der Gesamtimpuls $\underline{P}$ ist erhalten bei Homogenität des Raums.

(E) Isotropie des Raums & Drehimpulserhaltung

Räumlich isotrop bedeutet, dass eine Drehung um einen beliebigen Winkel α um eine bel. Achse das System invariant lässt.

Wähle $z - \text{Achse} \parallel \text{Drehachse}$ mit Drehmatrix R_α

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \hat{\underline{r}}_i &= R_\alpha \dot{\underline{r}}_i \\ \text{und auch} \quad \dot{\hat{\underline{r}}}_i &= R_\alpha \dot{\underline{r}}_i \quad (\text{weil } \dot{\underline{r}}_i \text{ ein Vektor ist}) \end{aligned}$$

Damit folgt für die Kinetische Energie:

$$\Rightarrow \quad \hat{T} = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\underline{r}}_i^T R_\alpha^{-1T} \underbrace{R_\alpha^{-1} \dot{\underline{r}}_i}_{\dot{\hat{\underline{r}}}_i}$$

Für die orthogonalen Matrizen R_α gilt

$$(R_\alpha^{-1})^T R_\alpha^{-1} = R_\alpha R_\alpha^T = \underline{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also folgt für die LAGRANGE-Funktion:

$$\Rightarrow \quad \hat{L} = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\underline{r}}_i^2 - U(R_\alpha^{-1}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2), R_\alpha^{-1}(\underline{r}_1 - \underline{r}_3), \dots)$$

(*) " - U

(*): Bedingung: Invarianz

U ist invariant, wenn

$$U(\underline{r}_1 - \underline{r}_2, \underline{r}_1 - \underline{r}_3, \dots) = U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|, |\underline{r}_1 - \underline{r}_3|, \dots)$$

also U nur von den Abständen zwischen den Teilchen abhängt.

$\Rightarrow$ Es gibt die Erhaltungsgröße wobei wir $\left. \frac{d\hat{r}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$ benötigen. Aus Abbildung (3.21)

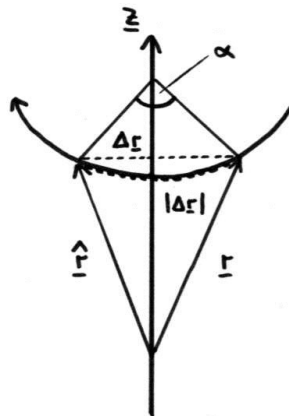


Abbildung 3.21: Schaubild

folgt:

$$\hat{\underline{r}}_i = \underline{r}_i - \alpha (\hat{\underline{z}} \times \underline{r}_i) + O(\alpha^2)$$

weil $\Delta \underline{r} \perp \underline{r}_i$ & $\hat{\underline{z}}$ für $\alpha \rightarrow 0$

und $|\Delta \underline{r}| = \underline{r}_i \sin \alpha$

also $\Delta \underline{r} = \hat{\underline{z}} \times \underline{r}_i$ (siehe Abb.3.21)

und J lautet

$$J_z = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} (\hat{\underline{z}} \times \underline{r}_i) = \hat{\underline{z}} \underbrace{\sum_{i=1}^N (\underline{r}_i \times \underline{p}_i)}_{L_z}$$

L_z ist die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses $\hat{L}$, der also bei Isotropie des Raums erhalten ist.

(F) Galileiinvarianz & Schwerpunktsatz

Wenn unter einer (speziellen) Galilei-Transformation $\hat{r}_i = \underline{r}_i - \underline{V}t$ die verschobene Lagrangedichte lautet

$$\hat{L} = \sum_i \frac{m_i}{2} (\dot{\underline{r}}_i + \underline{V})^2 - \underbrace{U(\hat{r}_1 + \underline{V}t, \hat{r}_2 + \underline{V}t)}_{(*)}$$

und das System homogen ist, d.h. $(*) = U(\underline{r}_1 - \underline{r}_2, \underline{r}_1 - \underline{r}_3, \dots)$ also

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\underline{r}}_i^2 - U + \sum_i \frac{m_i}{2} (2\underline{V} \cdot \dot{\underline{r}}_i + V^2) \\ &= L + \frac{d}{dt} \sum_i \frac{m_i}{2} (2\underline{V} \cdot \underline{r}_i + V^2 t) \end{aligned}$$

also L auf Eichtransformation symmetrisch ist, dann gibt es die 3 Erhaltungsgrößen

$$\begin{aligned} \underline{J} &= \sum_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial \underline{v}} - \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \frac{m_i}{2} (2\underline{v} \cdot \underline{r}_i + v^2 t) \right\}_{v=0} \\ &= \sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i t - m_i \underline{r}_i = \underline{R}_0 = \text{const.} \\ \Rightarrow \underbrace{\underline{R}}_{\text{Schwerpunkt}} &= \underline{R}_0 + \underline{P}t \quad (\text{bewegt sich geradlinig gleichförmig}) \end{aligned}$$

Bei Transformation auf das mit $\underline{v} = \frac{\underline{P}}{\sum_i m_i}$ bewegte Bezugssystem (Schwerpunktsystem) wird $\underline{R}$ also Erhaltungsgröße.

Wiederholung:

- Translations-Invarianz

$$\underline{r}_i \leftarrow \hat{\underline{r}}_i = \underline{r}_i - \underline{a} \quad 1 \leq i \leq f$$

und

$$\begin{aligned} L(r(\hat{r})) &= \hat{L}(\hat{r}, \dot{\hat{r}}, t) \stackrel{!}{=} L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \\ \stackrel{NT}{\Rightarrow} \underline{P} &= \sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i = \text{konst.} \end{aligned}$$

- Rotationssymmetrie

$$\hat{\underline{r}}_i = \underline{R}_\alpha \underline{r}_i$$

und L invariant

$$\Rightarrow \underline{L} = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{p}_i = \text{konst.}$$

	Newton	Euler-Lagrange-Gl.	Hamilton'sche-Gl
Forminvarianz:	$m \underline{v}^2 = \underline{F}$ Galilei-Trafo.	$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ KT $q' = f(q, t)$	$\dot{\underline{q}} = \frac{\partial H}{\partial \underline{p}} ; \dot{\underline{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \underline{q}}$ kanonische Trafos $\underline{q} \underline{p} \rightarrow \underline{q}', \underline{p}'$

3.5 Hamilton'sche Mechanik II

3.5.0 Motivation

Weg von NEWTON zu HAMILTON!

3.5.1 Phasenraum

Der Phasenraum ist eine 2f-dimensionale Mannigfaltigkeit, gebildet mit den kanonischen Koordinaten $(\underline{q}, \underline{p}) = (\text{Position}, \text{Impuls})$.

Die mechanische Bewegung entspricht einer Bahn im Phasenraum $(\underline{q}(t), \underline{p}(t))$ festgelegt durch die

$$\text{Hamilton-Gl.} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} ; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad 1 \leq i \leq f$$

und die Anfangsbedingungen: $\underline{q}(t_0) = \underline{q}_0 ; \underline{p}(t_0) = \underline{p}_0$

Sätze über Differentialgleichungen:

Zu jedem Startpunkt gehört genau eine Bahn, die keine Andere schneidet.

Bsp.: Pendel im Schwerfeld (siehe Abb.3.22)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega_0^2 (1 - \cos q) = T + U$$

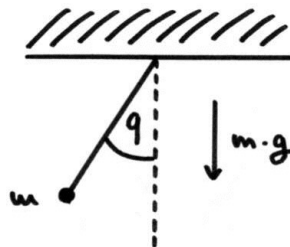


Abbildung 3.22: Pendel im Schwerfeld

Autonomes Problem $\Rightarrow H = \underline{E} = \text{konst.}$

Die Abbildung $(\underline{q}(t), \underline{p}(t))$ die jeden Anfangspunkt $(\underline{q}_0, \underline{p}_0)$ des Phasenraums zu einem $t \neq t_0$ den Punkt $(\underline{q}(t), \underline{p}(t))$ zuordnet, heißt *Phasenraumfluss*.

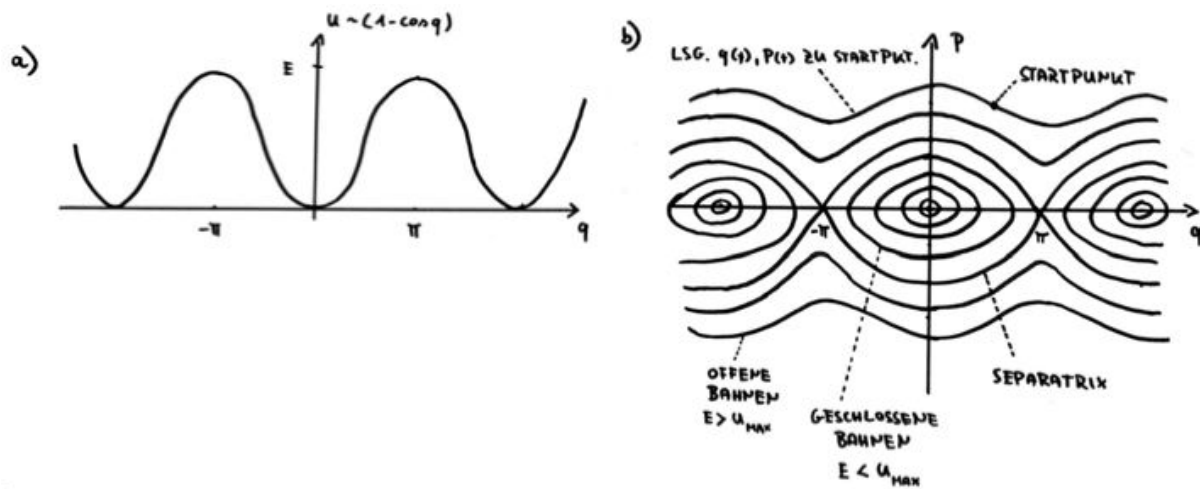
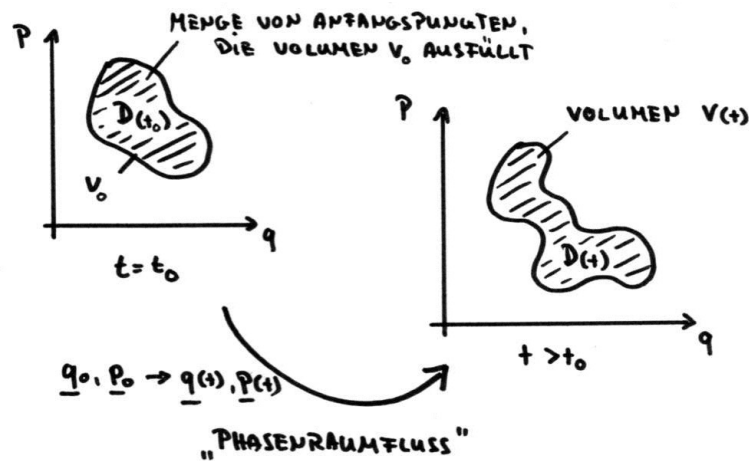
Abbildung 3.23: a) Funktion für das Potential U b) Phasenraum

Abbildung 3.24: Phasenraumfluss

3.5.2 Satz von Liouville

Siehe Abb.3.24.

Der Phasenraumfluss erhält das Volumen, d.h. füllen die Startwerte für viele Bahnkurven den Bereich $D(t_0)$ des Phasenraums mit dem Volumen V_0 aus, dann füllen die $(\underline{q}(t), \underline{p}(t))$ Punkte der Lösungen der HAMILTON-Gleichungen zu den (vielen) Startpunkten einen anderen Bereich $D(t)$ aus, der aber das selbe Volumen $V(t) = V_0$ einnimmt **Bemerkung:** Dies ist die Grundlage der statistischen Mechanik ($f \approx 10^{23}$).

Beweis:

$$V_0 = \int_{D(t_0)} \prod_{i=1}^f dq_i^0 dp_i^0$$

Volumen für $t > t_0$

$$V(t) = \int_{D(t)} \prod_{i=1}^f dq_i(t) dp_i(t)$$

mit Abkürzungen

$$\begin{aligned} \underline{X} &= (\underline{q}(t), \underline{p}(t)) \quad ; \text{ } 2f\text{-dimensionaler Vektor} \\ \underline{X}^0 &= (\underline{q}^0, \underline{p}^0) \quad \quad \quad \text{''} \end{aligned}$$

$$V(t) = \int_{D(t)} \prod_i dX_i \stackrel{(*)}{=} \int_{D(t_0)} \prod_i dX_i^0 \underbrace{\det \left\{ \frac{\partial X}{\partial X_j^0} \right\}}_{(**)}$$

(*): Trafo. der Integrationsvariablen

(**): Funktionaldeterminante der Trafo.

Betrachte nur $t \rightarrow t_0$; $t = t_0 + \delta t$ und berechne $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=t_0}$.

Dazu muss die Funktionaldeterminante:

$$\det \left\{ \frac{\partial X}{\partial X_j^0} \right\} \bigg|_{t=t_0} = ?$$

betrachtet werden. Mit einer Taylorentwicklung:

$$X_i(t) = X_i^0 + \underbrace{F_i}_{(*)} \underbrace{\delta t}_{(**)} + O(\delta^2)$$

(*): Abkürzung

(**): $\delta t = t - t_0$

$$\text{mit} \quad F_i = \dot{X}_i \big|_{t=t_0} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_i(t_0) \\ \dot{p}_i(t_0) \end{Bmatrix}$$

erhält man:

$$\Rightarrow \quad \text{Funktionalmatrix} \quad \frac{\partial X_i}{\partial X_j^0} = \delta_{ij} + \frac{\partial F}{\partial X_j^0} \delta t + O(\delta t^2)$$

Damit folgt für die Determinante:

$$\begin{aligned} \det \left\{ \frac{\partial X}{\partial X_j^0} \right\} &= \det \left\{ \delta_{ij} + \frac{\partial F}{\partial X_j^0} \delta t + O(\delta t^2) \right\} = 1 + \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F}{\partial X_i^0} \delta t \\ &= 1 + \text{Spur} \left\{ \frac{\partial F}{\partial X_j^0} \right\} \delta t + O(\delta t^2) \end{aligned}$$

(NB: Beweis der letzten Gleichung siehe Entwicklungssatz der Determinante)

$$\text{Spur} \left\{ \frac{\partial F}{\partial X_j^0} \right\} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \dot{q}_i(t_0)}{\partial q_i^0} + \frac{\partial \dot{p}_i(t_0)}{\partial p_i^0} = (*)$$

und mit den Hamilton-Gleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i(t_0) &= \left. \frac{\partial H}{\partial p_i} \right|_{t_0} \\ \dot{p}_i(t_0) &= - \left. \frac{\partial H}{\partial q_i} \right|_{t_0}\end{aligned}$$

$$(*) = \underbrace{\sum_{i=1}^f \frac{\partial}{\partial q_i^0} \frac{\partial H}{\partial p_i^0} - \frac{\partial}{\partial p_i^0} \frac{\partial H}{\partial q_i^0}}_{\text{Divergenz des Phasenraumflusses}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial}{\partial X_i^0} \dot{X}_i(t_0) = 0$$

also folgt für die zeitliche Änderung des Volumens:

$$\begin{aligned}\left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{t=t_0} &= \int \prod_i dq_i^0 dp_i^0 \det \left\{ \frac{\partial X}{\partial X_j^0} \right\} \dots \\ &= \int \prod_i dq_i^0 dp_i^0 \text{Spur} \left\{ \frac{\partial F}{\partial X_j^0} \right\} = 0\end{aligned}$$

also $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=t_0} = 0$ und da t_0 beliebig war, gilt $\frac{dV}{dt} \equiv 0$.

Bem.: Der Phasenfluss ist divergenzfrei! (Vergleichbar mit inkompressiblen Flüssigkeiten aus der Hydrodynamik)

3.5.3 Poisson-Klammern

($\Rightarrow$ Kommutator in der Quantenmechanik)

(A) Definition:

Für 2 Variablen im Phasenraum $F(\underline{q}, \underline{p}, t)$ und $G(\underline{q}, \underline{p}, t)$ ist die Poisson-Klammer definiert durch:

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

Sie ist selber eine Funktion von $\underline{q}, \underline{p}, t$.

(B) Fundamentale Eigenschaften

1. Antisymmetrie $\{F, G\} = -\{G, F\}$
2. $\Rightarrow \{F, F\} = 0$

3. Linearität mit $c_1, c_2 = \text{konst.} : \{c_1 F_1 + c_2 F_2, G\} = c_1 \{F_1, G\} + c_2 \{F_2, G\}$
4. Nullelement $\{F, \text{konst.}\} = 0$
5. Produktregel $\{F, G H\} = \{F, G\} H + G \{F, H\}$
6. Jakobiidentität $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$

(C) Elementares Beispiel:

1. $\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\} \quad ; \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
2. $\{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

(D) Hamilton'sche Bewegungsgleichungen**Satz.:**

Die totale Zeitableitung einer im Phasenraum definierten Funktion $F(\underline{q}, \underline{p}, t)$ entlang der durch die Bewegung des Systems gegebene Bahn (d.h. $\underline{q}(t)$ und $\underline{p}(t)$ aus H-Gl) ist

$$\frac{d}{dt} F(\underline{q}(t), \underline{p}(t), t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \left\{ F, \underbrace{H}_{H-Fkt.} \right\}$$

Bew.:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F &= \sum_{i=1}^f \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &\stackrel{H-Gl.}{=} \sum_{i=1}^f \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned}$$

Fundamentales Bsp.:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \hat{=} \text{Hamilton-Gleichungen}$$

weil $\frac{\partial}{\partial t} q_i = \frac{\partial}{\partial t} p_i = 0$

(E) Erhaltungssätze**Satz.:**

Eine Größe $F(\underline{q}, \underline{p})$; $\left(\frac{\partial F}{\partial t} = 0\right)$, die also nicht explizit von der Zeit abhängt, ist eine Erhaltungsgröße, wenn ihre Poissonklammer mit der HAMILTON-Funktion verschwindet:

$$\boxed{\{F, H\} = 0}$$

Bew.:

$$\frac{d}{dt} F = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{F(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) = \text{konst.}}$$

(F) Koordinatenunabhängigkeit

Satz.:

Die Poissonklammern sind invariant unter den sog. "kanonischen Transformationen".

Wiederholung:

POISSON-Klammer:

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

für zwei Variablen F, G im Phasenraum.

Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt} F(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$$

Erhaltungsgröße:

$$F(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) = \text{const.} \quad \Leftrightarrow \quad \{F, H\} = 0$$

Bemerkungen:

- Eine Größe F ist also eine Erhaltungsgröße, wenn ihr Kommutator (ihre POISSON-Klammer) mit der Hamiltonfunktion H verschwindet.

•

$$\{H, H\} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = E = \text{const.} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Die Bedingung, dass die Gesamtenergie E konstant ist, ist gleichbedeutend, damit, dass die Hamiltonfunktion nicht explizit von der Zeit abhängt.

- Wir können folgern, dass der Gesamtimpuls $\underline{P}$ eines N -Teilchensystems erhalten bleibt, wenn:

$$\{\underline{p}, H\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{p} = \text{const.}$$

3.5.4 Symmetrietransformation

(A) Definition der Erzeugenden einer Symmetrietransformation

Sei eine kontinuierliche Abbildung (d.h. wir können nach dem Parameter, der auftaucht, differenzieren) des Phasenraums in sich gegeben durch: $\underline{q}^\alpha(\underline{q}, \underline{p})$ & $\underline{p}^\alpha(\underline{q}, \underline{p})$ (mit differenzierbarer, invertierbarer Abbildung, die abhängig vom Parameter α ist, $\underline{q}^{\alpha=0} = \underline{q}$, $\underline{p}^{\alpha=0} = \underline{p}$) dann heißt $G(\underline{q}, \underline{p})$ die **Erzeugende** der Abbildung, wenn eine beliebige Variable $\bar{F}(\underline{q}, \underline{p})$ sich unter der Abbildung so transformiert, dass gilt:

$$\left. \frac{d}{d\alpha} F(\underline{q}^\alpha, \underline{p}^\alpha) \right|_{\alpha=0} = \{F, G\} \quad (3.112)$$

In der POISSON-Klammer rechts tauchen nur die Variablen $\underline{q}, \underline{p}$ auf.

Bemerkung:

Wie beim NOETHER-Theorem wird nur die Ableitung bei $\alpha = 0$ benötigt.

(B) Verallgemeinertes Noether-Theorem

Satz:

Wird die kontinuierliche Abbildung durch kanonische Transformationen gegeben und ist die Hamiltonfunktion invariant, d.h. $H(\underline{q}^\alpha, \underline{p}^\alpha) = H(\underline{q}, \underline{p})$, dann ist die dazu gehörende Erzeugende eine Erhaltungsgröße.

Umgekehrt ist jede Erhaltungsgröße eine Erzeugende einer Symmetrietransformation. In dieser Umkehrung liegt die Verallgemeinerung zum bisher bekannten NOETHER-Theorem, diesen Schluss kann man nicht aus dem bekannten erhalten.

Auch wenn dieses Konzept hier nur angesprochen wird, so wird es in der Quantenmechanik benötigt werden.

Beweis:

Wegen der Invarianz der POISSON-Klammer unter kanonischer Transformation gilt:

$$\begin{aligned} \{H(\underline{q}^\alpha, \underline{p}^\alpha), G(\underline{q}^\alpha, \underline{p}^\alpha)\} &= \{H(\underline{q}, \underline{p}), G(\underline{q}, \underline{p})\} \\ \Rightarrow 0 &\stackrel{*}{=} \frac{d}{d\alpha} H(\underline{q}^\alpha, \underline{p}^\alpha)|_{\alpha=0} = \{H(\underline{q}, \underline{p}), G(\underline{q}, \underline{p})\} \\ &\Leftrightarrow G(\underline{q}, \underline{p}) = \text{const.} \end{aligned}$$

Dabei wurde bei * die Invarianz von H wie oben beschrieben verwendet.

Im nächsten Abschnitt ist nur noch die Aussage, dass die kanonische Transformation die POISSON-Klammer erhält zu diskutieren. Der genaue Beweis ist allerdings sehr aufwändig, darum wird er im Rahmen dieser Vorlesung nicht durchgeführt.

3.5.5 Kanonische Transformation

Für das NOETHER-Theorem war eine beliebige Koordinatentransformation $\underline{q}^\alpha = \underline{q}^\alpha(\underline{q}, t)$ möglich, unter der Bedingung, dass die Transformation kompaibel ist (Bedingung aus der Mathematik). Für die Formulierung im Phasenraum sind allgemeinere Transformationen:

$$\underline{q}^\alpha = \underline{q}^\alpha(\underline{q}, \underline{p}) \quad (3.113)$$

$$\underline{p}^\alpha = \underline{p}^\alpha(\underline{q}, \underline{p}) \quad (3.114)$$

möglich, nur müssen diese gewisse Bedingungen erfüllen. Man hat nun mehr Freiheit, als beim LAGRANGE-Formalismus, weil man die Koordinaten $\underline{q}$ und $\underline{p}$ bei der Transformation miteinander verknüpfen kann. (auch die Zeit t kann in den Transformationen explizit auftreten)

Definition:

Eine zeitunabhängige Transformation im Phasenraum:

$$\begin{aligned} \underline{q}, \underline{p} &\rightarrow \underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q}, \underline{p}) \\ \& \underline{q}, \underline{p} &\rightarrow \underline{P} = \underline{P}(\underline{q}, \underline{p}) \end{aligned}$$

ist **kanonisch**, genau dann wenn die fundamentalen POISSON-Klammern invariant sind, d.h.:

$$\begin{aligned} \{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0 \quad \& \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \\ \Leftrightarrow \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad \& \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

Satz:

Kanonische Transformationen erhalten die POISSON-Klammern.

Beweis:

$$\begin{aligned} \{F(\underline{Q}, \underline{P}), G(\underline{Q}, \underline{P})\} &= \sum \frac{\partial F}{\partial Q_i} \frac{\partial G}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial G}{\partial Q_i} \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{ij} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \right) \frac{\partial G}{\partial P_i} - \dots \\ &= \sum \frac{\partial F}{\partial q_j} \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \frac{\partial G}{\partial P_i} - \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \frac{\partial G}{\partial Q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial P_j} (\dots) \\ \Rightarrow \{F(\underline{Q}, \underline{P}), G(\underline{Q}, \underline{P})\} &= \sum_j \frac{\partial F}{\partial q_j} \{q_j(\underline{Q}, \underline{P}), G(\underline{Q}, \underline{P})\} + \frac{\partial F}{\partial p_j} \{p_j(\underline{Q}, \underline{P}), G(\underline{Q}, \underline{P})\} \end{aligned}$$

Verwendet man nun die letzte Gleichung für $G(\underline{Q}, \underline{P}) = q_e(\underline{Q}, \underline{P})$ oder $G = p_e(\underline{Q}, \underline{P})$ dann werden die POISSON-Klammern zu den Fundamentalen POISSON-Klammern, wenn diese schon bekannt sind ($\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$), dann folgt:

$$\{G(\underline{Q}, \underline{P}), q_e(\underline{Q}, \underline{P})\} = -\frac{\partial G}{\partial p_e}$$

Einsetzen liefert dann mit der Ersetzung $F \rightarrow G$:

$$\{F, G\} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j}$$

Damit ist also:

$$\{F(\underline{Q}, \underline{P}), G(\underline{Q}, \underline{P})\} = \{F(\underline{q}, \underline{p}), G(\underline{q}, \underline{p})\} \quad (3.115)$$

Satz:

Die Transformation gegeben durch

$$\begin{aligned} \underline{q}^\alpha(\underline{q}, \underline{p}) &= \underline{q} + \alpha \frac{\partial G(\underline{q}, \underline{p})}{\partial \underline{p}} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ \underline{p}^\alpha(\underline{q}, \underline{p}) &= \underline{p} - \alpha \frac{\partial G(\underline{q}, \underline{p})}{\partial \underline{q}} + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

ist kanonisch (linear in α) (G wird die Erzeugende)

Beweis:

$$\begin{aligned} \{q_i^\alpha, p_j^\alpha\} &= \{q_i, p_j\} + \alpha \left[\left\{ \frac{\partial G}{\partial p_i}, p_j \right\} - \left\{ q_i, \frac{\partial G}{\partial q_j} \right\} \right] + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \delta_{ij} + \alpha \sum_l \frac{\partial^2 G}{\partial p_i \partial q_l} \delta_{jl} - \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial p_l} \delta_{il} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \delta_{ij} + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

damit folgt für eine beliebige Funktion F :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\alpha} F(\underline{q}^\alpha, \underline{p}^\alpha) \right|_{\alpha=0} &= \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i^\alpha} \frac{dq_i^\alpha}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial p_i^\alpha} \frac{dp_i^\alpha}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \\ \Rightarrow \left. \frac{d}{d\alpha} F(\underline{q}^\alpha, \underline{p}^\alpha) \right|_{\alpha=0} &= \{F, G\} \end{aligned} \quad (3.116)$$

Aus diesem Grund, wird G als *Erzeugende* der Transformation bezeichnet. Dies haben wir für die HAMILTON-Funktion schon angewendet, mit dieser Erzeugenden G können wir also $\left. \frac{d}{d\alpha} H \right|_{\alpha=0}$ berechnen.

3.6 Näherungsverfahren & Störungstheorie

Liste von exakt lösbaren Problemen der Physik:

- freies Teilchen (klassisch, Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie)
- harmonischer Oszillator
- $\frac{1}{r}$ -Potential (KEPLER, H-Atom, SCHRÖDINGER)
- 2-Niveau System (PAULI, DIRAC)
- zweidimensionaler Ising Magnet (ONSAGER)

Da diese List der idealen Probleme, welche mit Physik eindeutig gelöst werden können sehr beschränkt ist, soll hier der Versuch behandelt werden, reale Probleme durch Störungsverfahren mit solchen ideale Probleme zu nähern (zu lösen).

3.6.1 Asymptotische Entwicklungen & O- Symbol

Ein kleiner Parameter ε mit $|\varepsilon| \ll 1$ misst den Unterschied zwischen realem und idealem Problem, d.h. für $\varepsilon = 0$ ist das Problem ein ideales Problem.

Gesucht ist die Funktion $f(\varepsilon)$ oder wenigstens eine sogenannte **asymptotische Näherung** $\tilde{f}(\varepsilon)$ gegeben durch:

$$\tilde{f}(\varepsilon) = \sum_{n=0}^M \tilde{f}_n(\varepsilon) \quad (3.117)$$

mit $|\tilde{f}_i| < |\tilde{f}_j|$ für $i > j$ im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$.

Definition:

$\tilde{f}$ ist asymptotische Näherung, wenn mit dem kleinsten Element in der obigen Summe (das gerade noch mit genommen wird) $\tilde{f}_M$ gilt:

$$\frac{f(\varepsilon) - \tilde{f}(\varepsilon)}{\tilde{f}_M(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Typischerweise ist $\tilde{f}$ eine Potenzreihe in ε , d.h.:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_n &= \varepsilon^n c_n \\ \&\tilde{f}(\varepsilon) &= \sum_{n=0}^M c_n \varepsilon^n\end{aligned}$$

wir wollen:

$$\frac{f(\varepsilon) - \sum_{n=0}^M c_n \varepsilon^n}{c_M \varepsilon^{M+1}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

d.h. der Unterschied $f - \tilde{f} \leq A\varepsilon^{M+1}$ mit einer festen Konstanten A .
Schreibweise:

$$f(\varepsilon) = \tilde{f}(\varepsilon) = \sum_{n=0}^M c_n \varepsilon^n + \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1})$$

Das Lambda-O Symbol bedeutet:

$$x = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{wenn } |x| < A\varepsilon$$

Vorlesung vom 20.01. wird noch "vermisst".

$$\begin{aligned}\partial_0^2 y_2 + y_2 &= \left[\underbrace{-\frac{3}{4} B \tilde{R}^2 + \frac{5}{6} A^2 \tilde{R}^2}_{naiv} - 2\tilde{R} \partial_2 \Theta \right] \cdot \cos(\tau_0 + \Theta) + [2 \partial_2 R] \cdot \sin(\tau_0 + \Theta) \\ &\quad + \text{nicht säkulare Terme} \quad (3.118)\end{aligned}$$

aus den POINCARESchen Säkularbedingungen, dass die resonanten Kräfte auf y_2 verschwinden müssen, folgt also:

$$\partial_2 R(\tau_2) = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{R}(\tau_3, \dots) = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (3.119)$$

und

$$\partial_2 \Theta = \frac{3}{8} B - \frac{5}{12} A^2 \quad \rightarrow \quad \Theta(\tau_2) = \left(\frac{3}{8} B - \frac{5}{12} A^2 \right) \varepsilon^2 \omega_0 t \quad (3.120)$$

mit $\tau_2 = \varepsilon^2 \omega_0 t$. Es ergibt sich also eine Änderung der Frequenz des anharmonischen Oszillators relativ zum harmonischen Oszillator:

$$\boxed{\omega = \frac{\omega_0 t + \Theta}{t}} \quad (3.121)$$

Aus diesem Grund kommt man mit der Störungsrechnung auf keine vernünftige Lösung. Lösung des anharmonischen Oszillators bis einschließlich der Ordnung ε^2 ist:

$$x(t) = \varepsilon \cdot \cos \omega t + \varepsilon^2 A \cdot \left(\frac{1}{6} \cos 2\omega t - \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (3.122)$$

mit der Frequenz

$$\omega = \omega_0 \cdot \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{3}{8}B - \frac{5}{12}A^2 \right) \right) \quad (3.123)$$

Die Frequenz der Schwingung hängt also von der Amplitude ab. Nur beim Spezialfall des harmonischen Oszillators ist ω_0 unabhängig von der Auslenkung.

3.6.2 Anwendung auf fast kreisförmige Bahn im Zentralfeld

Die Bewegung eines Massepunktes im Potential $U(r)$ gegeben durch die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{m}{2} \dot{r}^2 - U(r) \quad (3.124)$$

führt gemäß §3.2.2 (C) auf ein radiales Problem:

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r}U^e(r) \quad \text{mit} \quad U^e(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \quad (3.125)$$

Zusätzlich gilt Drehimpulserhaltung: $l = mr^2\dot{\varphi} = \text{konst.}$

Was ist nun $\varphi(t)$?

Untersuchen wir die gebundenen Bahnen, eine Bewegung mit $U^e(r) \leq E$:

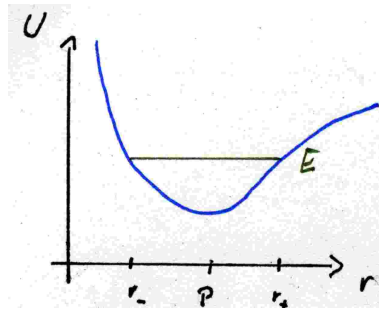


Abbildung 3.25: Potential einer gebundenen Bahn

Hierbei sind $r_{\pm}$ mit $U^e(r_{\pm}) = E$ die Umkehrpunkte und P die Minimumsposition des Potentials U^e . Fast kreisförmig heißt hier:

$$r(t) = P + \rho(t) \quad \text{mit} \quad \rho(t) \ll P \quad (3.126)$$

und führt auf den anharmonischen Oszillator. Mit Taylorentwicklung um P herum folgt:

$$U^e(r) \approx U^e(P) + \frac{\partial U^e}{\partial r}|_P \cdot \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U^e}{\partial r^2}|_P \cdot \rho^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U^e}{\partial r^3}|_P \cdot \rho^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 U^e}{\partial r^4}|_P \cdot \rho^4 \quad (3.127)$$

Dass sich bei P nun ein Minimum befindet, bedeutet, dass $\frac{\partial U^e}{\partial r}|_P = 0$ ist. Daraus folgt:

$$\frac{\partial U}{\partial r}|_P = \frac{l^2}{mP^3} \quad (3.128)$$

Die ungestörte Radialfrequenz für kleine Schwingungen beträgt dann:

$$w_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2}|_P} \quad (3.129)$$

und führt auf die anharmonische Oszillation

$$\ddot{\rho} + \rho\omega_0(1 + A\rho + B\rho^2) = 0 \quad (3.130)$$

mit $A = \frac{U^{e'''}(P)}{U^{e''}(P)}$ und $B = \frac{1}{6} \frac{U^{e''''}(P)}{U^{e''}(P)}$. Dies ist Näherungslösung für kleine maximale Auslenkung $\varepsilon = -eP$ mit der Exzentrizität e . Für diese gilt: $0 < e \leq 1$. Für die Bahn der Erde ist $e \approx 0,0167$.

Die Lösung der radialen Bewegungsgleichung ist damit:

$$r(t) = P \cdot \left[1 - e \cos \omega t + PAe^2 \left(\frac{1}{6} \cos 2\omega t - \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}(e^3) \right] \quad (3.131)$$

mit der Frequenz:

$$\omega = \omega_0 \cdot \left(1 + e^2 P^2 \left(\frac{3}{8} B - \frac{5}{12} A^2 \right) + \mathcal{O}(e^3) \right) \quad (3.132)$$

Die Bedeutung von e erschließt sich aus der Betrachtung der Umkehrpunkte:

$$r_+ - r_- = r(t = \frac{\pi}{\omega}) - r(t = 0) = 2eP + \mathcal{O}(e^3) \quad (3.133)$$

Damit kann auch die Winkelbewegung bestimmt werden:

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2} = \frac{l}{mP^2} \cdot \left[1 + e^2 \left(\frac{3}{2} + AP \right) + 2e \cos \omega t + e^2 \left(\frac{3}{2} - AP \right) \cdot \cos 2\omega t + \mathcal{O}(e^3) \right] \quad (3.134)$$

Es folgt die mittlere Winkelgeschwindigkeit, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit der radialen Bewegung ist:

$$\Omega = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt \dot{\varphi}(t) = \Omega_0 \cdot \left[1 + e^2 \left(\frac{3}{2} + AP \right) + \mathcal{O}(e^3) \right] \quad (3.135)$$

$\Omega_0 = \frac{l}{mP^2}$ ist hierbei die ungestörte mittlere Winkelgeschwindigkeit. Die Integration des Winkels $\varphi(t)$ ergibt, vom Perihel an:

$$\varphi(t) = \Omega \cdot \left[t + \frac{2e}{\omega} \sin \omega t + \frac{e^2}{2\omega} \left(\frac{3}{2} + AP \right) \sin 2\omega t + \mathcal{O}(e^3) \right] \quad (3.136)$$

Die Anwendung auf die Bewegung der Erde um die Sonne, die Keplerbahn mit $U(r) = -\gamma \frac{mM}{r}$ (siehe Aufgabe 39), dessen Minimum $\frac{l}{mP^3} = \gamma \frac{mM}{p^2}$ bei $P = \frac{l^2}{\gamma m^2 M}$ liegt, führen zu Umlaufperiode und Frequenz:

$$\omega_0 = \frac{l}{mP^2} = \Omega_0 \quad \text{sowie auf} \quad A = -\frac{3}{P}, \quad B = \frac{6}{P^2} \quad (3.137)$$

Desweiteren folgt damit:

$$\omega = \Omega = \omega_0 \left(1 - \frac{3}{2}e^2 + \mathcal{O}(e^3) \right) \quad (3.138)$$

und

$$\varphi(t) = \omega t + 2e \sin \omega t + \frac{5e^2}{4} \sin 2\omega t + \mathcal{O}(e^3) \quad (3.139)$$

Dies legt die Dauer der Jahreszeiten fest und bestimmt zusammen mit anderen Faktoren die Tageslänge über die sogenannte Zeitgleichung.