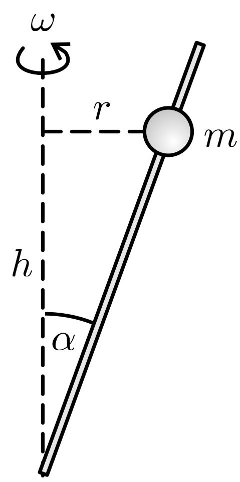
UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2004/2005

Übungsblatt 9, Ausgabe 21.12.2004, abzugeben bis 11.01.2004
Besprechung in den Übungen in der 14. Semesterwoche (12.-14. Jan.)

37. **Perle auf rotierendem Draht; (6 Punkte)**



Eine Perle gleitet reibungsfrei auf einem geraden rotierenden Drahtstück, das um den Winkel α gegenüber seiner Rotationsachse und der Richtung der Gravitationskraft geneigt ist.

a) Stellen Sie mit Hilfe des Lagrange-Formalismus die Bewegungsgleichung auf. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie ohne die Bewegungsgleichung zu lösen, die Höhe $h(\alpha, \omega)$ der Perle, in der das System stationär bleibt. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung. (2 Punkte)

38. **Gekoppelte Pendel; (7 Punkte)**
Zwei ebene Pendel mit Massen m_1, m_2 und Pendellängen l_1 und l_2 seien durch eine Feder gekoppelt (s. Figur). Die Pendelstangen und die Feder seien masselos. Dies ist eine Idealisierung des Versuchs im Anfängerpraktikum.

a) Berechnen Sie die charakteristischen Frequenzen λ der periodischen Bewegungen für kleine Winkel-Auslenkungen q_1 und q_2 um die Ruhelage. Sie erhalten diese aus den Euler-Lagrange-Gleichungen für $q_1(t)$ und $q_2(t)$, wenn Sie die kinetische Energie jedes Massenpunktes j als $T_j = \frac{1}{2} m_j l_j^2 \dot{q}_j^2$ und die potentielle Energie $U_j = \frac{g}{2} m_j l_j q_j^2$ ansetzen. Die Größe g bezeichnet die Erdbeschleunigung. Die Kopplung zwischen den Pendeln werde durch den Term $U_{12} = \frac{\alpha}{2}(q_1 - q_2)^2$ beschrieben.

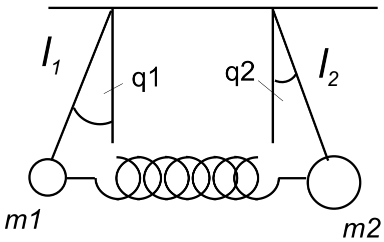
Machen Sie dazu den Lösungsansatz $\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = e^{i\lambda t} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, wie aus diesem Ansatz die beiden gekoppelten linearen Gleichungen

$$\begin{pmatrix} -\lambda^2 + \omega_1^2 + \alpha_1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & -\lambda^2 + \omega_2^2 + \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (1)$$

mit dem Frequenzeigenwert λ folgen. (Wie lauten die Abkürzungen ω_i und α_i?) Durch welche Forderung werden nun die Eigenwerte λ bestimmt und warum? Wieviele davon gibt es? Wie lautet die allgemeine Lösung $(q_1(t), q_2(t))$? (2 Punkte)

b) Wie verhalten sich die Frequenzen λ in den Grenzfällen (G1) $\alpha_{1,2} \ll \Delta\omega^2 \equiv \omega_1^2 - \omega_2^2$ und (G2) $\alpha_{1,2} \gg \Delta\omega^2$? Stellen Sie dazu die dimensionslose Frequenz λ^2/ω_1^2 als Funktion der (ebenfalls geeignet dimensionslosen) Kopplungskonstanten α graphisch dar; machen Sie hierzu die Annahme $\omega_1 < \omega_2$.
Was passiert mit der Frequenz λ, wenn beide Pendel die gleichen Massen $m_1 = m_2$ und L
ängen $l_1 = l_2$ haben? (3 Punkte)

c) Diskutieren Sie die Schwingungen für die Anfangsbedingungen $q_1 = Q$, $q_2 = 0$, $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ in den zwei Grenzfällen (G1) und (G2). Was passiert, wenn die beiden Pendel nur leicht unterschiedliche Massen bzw. Längen haben? (2 Punkte)



39. **Keplerproblem; (8 Punkte)**
Die um 1610 veröffentlichten drei Gesetze der Planetenbewegung des *Johannes Kepler* (1571-1630) waren das Ergebnis seiner bahnbrechenden Analyse der 38jährigen Beobachtungen von *Tycho Brahe* (1546-1601) und legten den Grundstein zu *Newtons* (1643-1727) Entdeckungen. Während Kepler II (Erhaltung der Flächengeschwindigkeit) für alle Zentralkraftbewegungen Gültigkeit hat, sind Kepler I (Planeten auf Ellipsenbahnen) und Kepler III (Quadrat der Perioden ist den Kuben der Halbachsen proportional) auf Potentiale des reziproken Abstands beschränkt. In der folgenden Aufgabe sollen Sie das Keplerproblem mithilfe des Lagrange-Formalismus lösen.

a) Stellen Sie die Hamilton-Funktion und die Lagrangefunktion in kartesischen Koordinaten für einen Massepunkt im Zentralpotential

$$U(r) = -\frac{\gamma}{r}$$

auf. (1/2 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ und die Energie E, sowie der Runge-Lenz-Vektor

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \alpha \mathbf{r}/r$$

mit geeigneter Wahl von α Erhaltungsgrössen der Bewegung sind. (1 Punkt)

c) Warum lässt sich das Keplerproblem auf ein effektiv zweidimensionales Problem reduzieren? Ermitteln Sie die Lagrangefunktion in ebenen Polarkoordinaten. (1 Punkt)

d) Zeigen Sie erneut, dass Drehimpuls und Energie erhalten sind, und geben Sie die Grössen in Polarkoordinaten an. (1 1/2 Punkte)
Hinweis: Um zu zeigen, dass $\frac{d}{dt}E = 0$*, benutze man die Euler-Lagrange-Gleichungen für die beiden Polarkoordinaten.*

e) Lösen Sie nach der Trajektore $r(\phi)$, und diskutieren Sie die unterschiedlichen Lösungen hinsichtlich der Energie oder anderer geeigneter Parameter. Für welche Werte von E erhalten Sie geschlossene und für welche offene Keplerbahnen?
Hinweise: Benutzen Sie zunächst die Ausdrücke für E und den Drehimpuls l in Polarkoordinaten, um zu zeigen, dass

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm\frac{mr^2}{l}\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{l^2}{m^2r^2} + \frac{2\gamma}{mr}}.$$

Führen Sie nun die Substitution $u = 1/r$ durch, und benutzen Sie

$$\int \frac{du}{\sqrt{au^2 + bu + c}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos\left(\frac{-2au - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right).$$

(2 Punkte)

f) Ein Massepunkt (Meteorit, Raumsonde) fliegt aus sehr grosser Entfernung auf ein Zentralpotential (Gravitationspotential eines Planeten) zu und passiert dieses auf einer offenen Bahn ($E > 0$). Bestimmen Sie den Winkel θ, um den sich die Flugrichtung des Massepunktes ändert. (1 Punkt)

g) In welche Richtung zeigt der Runge-Lenz-Vektor? Berechnen Sie hierzu $\mathbf{A}$ im Perihel, dem Bahnpunkt mit minimalem Abstand vom Kraftzentrum. (1 Punkt)

40. **Relativistische Hamiltonfunktion in elektromagnetischen Feldern; (7 Punkte)**
Die relativistische Lagrangefunktion mit einem Potential $U(r)$ und ohne elektromagnetische Felder lautet

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} - U(r).$$

a) Ermitteln Sie die relativistische Hamiltonfunktion H gemäss der Definition von H aus der Vorlesung, und leiten Sie daraus die Einsteinsche Energie-Impuls-Beziehung $H = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ ab. (1 Punkt)
Die nicht-relativistische Lagrangefunktion in allgemeinen zeitabhängigen Feldern lautet für ein Teilchen mit der Ladung q

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\Phi(\mathbf{r}, t) + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

b) Zeigen Sie zunächst, dass sich bei diesem Problem der verallgemeinerte Impuls $\mathbf{p}$ vom kinetischen ("normalen") Impuls unterscheidet. (1 Punkt)

c) Benutzen Sie die Definition der Hamiltonfunktion, die in der Vorlesung gegeben wurde, um die Hamiltonfunktion für ein Teilchen der Ladung q im elektromagnetischen Feld zu ermitteln. Schreiben Sie das Resultat einmal als Funktion von $\{\mathbf{p}, \Phi, \mathbf{A}\}$ und ein zweites mal als Funktion von $\{\mathbf{v}, \Phi\}$. (1 Punkt)

Nun kombinieren wir die beiden vorigen Lagrangefunktion, um jene für ein relativistisches Teilchen der Ladung q im elektromagnetischen Feld zu erhalten:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} - q\Phi(\mathbf{r},t) + q\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t).$$

d) Berechnen Sie die entsprechende Hamiltonfunktion. Schreiben Sie das Resultat einmal als Funktion von $\{\gamma, \Phi\}$ und ein zweites mal als Funktion von $\{\mathbf{p}, \Phi, \mathbf{A}\}$. (2 Punkte)
Hinweis: Im zweiten Fall lautet das Resultat $H = c\sqrt{m^2c^2 + (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2} + q\Phi$.

e) Betrachten Sie nun ein relativistisches Teilchen der Ladung q in einem konstanten Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ $(\mathbf{E} = \mathbf{0})$. Überlegen Sie sich zunächst, dass die Energie des Teilchens zeitlich konstant ist. Stellen Sie dann die Hamiltonschen Gleichungen auf, und berechnen Sie die Bahn des Teilchens. Anfangsbedingungen: $\mathbf{r}(t = 0) = (0, r_0, 0)$, $\dot{\mathbf{r}}(t = 0) = (v, 0, w)$. (2 Punkte)
Hinweis: Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind für dieses Problem 6 lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, von denen 2 trivial und 4 gekoppelt sind. Ein möglicher Lösungsweg der 4 gekoppelten Gleichungen besteht darin, zuerst p_x *und* p_y *zu eliminieren und dann eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Hilfsgröße* $\zeta(t) = x(t) + iy(t)$ *aufzustellen.*