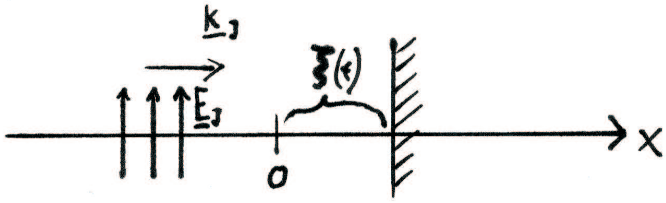
UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2004/2005

Übungsblatt 8, Ausgabe 14.12.2004, abzugeben bis 21.12.2004
Besprechung in den Übungen in der 10. Semesterwoche (22.-23. Dez.)

33. **Dopplerverschiebung bei Reflexion am bewegten Spiegel; (5 Punkte)**
Eine ebene monochromatische (Frequenz ω) elektromagnetische Welle mit Amplitude E_I falle im Vakuum senkrecht auf einen als idealisiertes Metall ($\mathbf{E} \equiv 0$) beschriebenen ebenen



Spiegel. Der Spiegel bewege sich gleichförmig mit $\xi(t) = vt$ senkrecht gegen seine Oberfläche.

a) Begründen Sie, dass die reflektierte Welle durch $\mathbf{E}_R \cos(\omega t + kx + \phi(t + x/c))$ gegeben ist, und stellen Sie die implizite Gleichung zur Bestimmung der Funktion $\phi(\tau)$ auf.

(2 Punkte)

b) Lösen Sie die Gleichung für den gegebenen Fall der gleichförmigen Spiegelbewegung.

(1 Punkt)

c) Alternative Betrachtung: Was ergibt sich für die reflektierte Welle, wenn man vom Laborsystem ausgehend eine Lorentztransformation ins mit dem Spiegel sich bewegende System durchführt, sich in diesem die Reflexion überlegt, und dann das ganze zurück transformiert? (2 Punkte)

34. **Ein wenig Relativitätstheorie; (6 Punkte)**

a) Skizzieren Sie sich die Korrektur des klassischen Impulssatzes für den relativistischen Fall, wenn sich eine Masse M nahezu mit Lichtgeschwindigkeit c bewegt. Welchen Impuls hat die Masse M. Bleibt der Impuls erhalten, wenn die Masse M eine andere Masse m elastisch stößt? Was ergibt sich für die Massenkorrektur, die auch relativistische Masse genannt wird? (1 Punkt)

b) Mit welcher Geschwindigkeit muss sich eine Masse bewegen, damit die relativistische Masse m_r doppelt so groß ist wie die Ruhemasse m_0. Wie groß ist der Geschwindigkeitsunterschied zwischen den folgenden beiden Fällen 1.) $m_r = 2m_0$ und 2.) $m_r = 1000m_0$
Zeichnen Sie einen Graphen des rel. Impulses p eines Teilchens als Funktion seiner Geschwindigkeit v. (1 Punkt)

c) Mit einem einfachen Gedankenexperiment zeigte Einstein, dass mit elektromagnetischer Strahlung eine Masse verbunden ist. Betrachten wir einen Kasten der Länge L und Masse M, der auf einer reibungslosen Oberfläche ruht. Am linken Ende des Kastens befinde sich eine Lichtquelle, die Strahlung einer Energie E emittiert, die auf der rechten Seite des Kastens wieder absorbiert wird. Nach der klassischen Theorie des Elektromagnetismus trägt die Strahlung einen Impuls $p = E/c$.
1.) Berechnen Sie die Rückstossgeschwindigkeit des Kastens bei der Emission unter der Annahme, dass der Impuls erhalten bleibt.
2.) Bei der Absorption in der rechten Wand des Kastens wird dieser gestoppt, und der Gesamtimpuls ist null. Vernachlässigen wir die sehr kleine Geschwindigkeit des Kastens, so ist die Laufzeit der Strahlung durch den Kasten gleich $\Delta t = L/c$. Berechnen Sie die vom Kasten in dieser Zeit zurückgelegte Entfernung.
3.) Zeigen Sie, dass die elektromagnetische Strahlung die Masse $m = E/c^2$ tragen muss, wenn der Schwerpunkt des Systems in Ruhe bleiben soll. (2 Punkte)

d) Wie ist die relativistische Gesamtenergie E eines bewegten Teilchens definiert?
(1 Punkt)

e) Wie viel Ruhemasse müsste in Energie umgewandelt werden um eine 100 Watt Glühbirne zehn Jahre lang leuchten zu lassen? (1 Punkt)

35. **Kürzester Weg auf Zylinder- und Kegeloberfläche; (8 Punkte)**
Ein Variationsproblem von der Form

$$\int \mathrm{d}x\, F(y, y', x) = \text{Extr!} \quad \Leftrightarrow \quad \delta \int \mathrm{d}x\, F(y, y', x) = 0 \quad \text{mit} \quad y = y(x)$$

wird gelöst durch die entsprechende Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0\,.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist also die Funktion $y(x)$, für die obiges Funktional extremal (d.h., minimal oder maximal) wird.

a) Gesucht ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf der Oberfläche eines Zylinders. Schreiben Sie hierzu das Wegelement $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ in Zylinderkoordinaten ϕ und z (r = const.). Durch die Parametrisierung $z = z(\phi)$

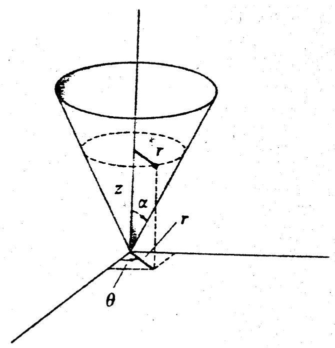
erhalten Sie ein Funktional der Form $\int \mathrm{d}s = \int \mathrm{d}\phi\, F(z'(\phi))$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung den extremalen Weg $z(\phi)$. Um was für eine Kurve handelt es sich dabei? (3 Punkte)

b) Gesucht ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf der Oberfläche eines Kegels. Drücken Sie hierzu das Wegelement $\mathrm{d}s$ in Zylinderkoordinaten r, θ und z (mit $r/z = \tan\alpha =$ konst.) aus, und wählen Sie die Parametrisierung $\theta = \theta(r)$. Bestimmen Sie das Extremum des Funktionals $\int dr\, F(\theta'(r), r)$.

Hinweis: Das Ergebnis lautet:

$$r_m = r\cos a(\theta - \theta_m)$$

Was ist a? Wie hängen die Integrationskonstanten r_m und θ_m mit den Bedingungen zusammen, dass die Kurve durch die beiden Endpunkte läuft? Die Euler-Gleichung liefert lediglich das Extremum der Weglänge. Können Sie für einfache Fälle kürzere Wege finden? Weswegen liefert obiges Ergebnis diese Kurven nicht? Was ergibt sich im Fall $\alpha \to \frac{\pi}{2}$? (5 Punkte)



36. **Fermat'sches Prinzip; (9 Punkte)**
Das Fermat'sche Prinzip besagt, dass ein Lichtstrahl stets den Weg mit der kürzesten Laufzeit wählt.

a) Snellius'sches Brechungsgesetz (2 Punkte)

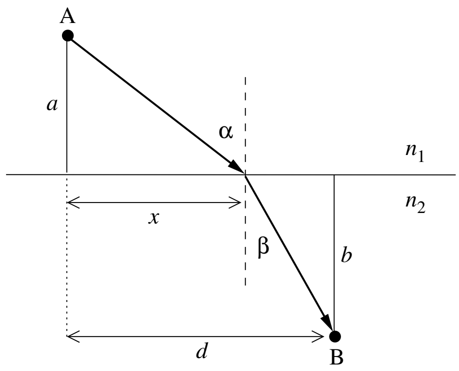
Zeigen Sie, dass das Snellius'sche Brechungsgesetz aus dem Fermat'schen Prinzip folgt. Betrachten Sie dazu die Laufzeit $t = t(x)$ des Lichts von A nach B (siehe Abbbildung). Unter welcher Bedingung ist die Laufzeit minimal?

b) Atmosphärische Lichtbrechung (7 Punkte)

Die Laufzeit eines Lichtstrahls in einem Medium mit räumlich variierendem Brechungsindex ist gegeben durch

$$t = \int \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}s\, \frac{1}{v(s)} = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}s\, n(s)\,,$$

wobei s den Laufweg parametrisiert. Nach Fermat muss dieses Funktional extremal werden.
Betrachten wir nun den Verlauf eines Lichtstrahls in der Atmosphäre eines Planeten. Vernachlässigt man die Krümmung der Planetenoberfläche, so kann der Weg des



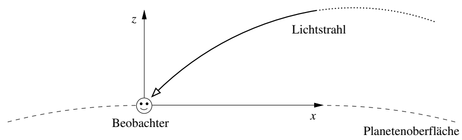
Lichts durch $z = z(x)$ parametrisiert werden. Der Brechnungsindex ist höhenabhängig, d.h., $n = n(z)$. Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung dieses Problems.
Die Abweichung des Brechungsindex' von 1 ist näherungsweise proportional zur Dichte der Atmosphäre, d.h., $n(z) - 1 \propto \rho(z)$, so dass mit Hilfe der barometrischen Höhenformel $\rho(z) \propto \mathrm{e}^{-z/H}$ gilt:

$$n(z) = 1 + (n_0 - 1)\mathrm{e}^{-z/H} \,.$$

Für flache Lichtwege in der Nähe des Bodens ($z \ll H$) kann die Exponentialfunktion in guter Näherung linearisiert werden. Eine approximative Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung erhalten Sie mit dem quadratischen Ansatz $z(x) = ax^2 + bx + c + \epsilon(x)$, wobei der Anteil $\epsilon(x) = O(x^3)$ f
ür relative flache Bahnen vernachlässigbar ist:

$$z(x) \approx ax^2 + bx + c \,.$$

Angenommen, ein Beobachter stehe im Ursprung des Koordinatensystems ($x = z = 0$) und blicke unter einem bestimmten Winkel nach oben (siehe Abbildung). Wie lauten die entsprechenden Randbedingungen für $z(0)$ und $z'(0)$? (Was ist die Bedeutung des Koeffizienten b?)



Mit obigem Ansatz erhalten Sie aus der Euler-Lagrange-Gleichung einen Ausdruck der Form $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Diese Gleichung ist nur dann für alle x erfüllt, wenn $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Aus der Beziehung $\gamma = 0$ erhalten Sie einen Zusammenhang zwischen a und b. (Warum macht die Verwendung der Ausdrücke für α und β keinen Sinn?)
Bestimmen Sie die Lage $x = x^*$ des Scheitelpunktes der Kurve $z(x)$. Wie verhält sich x^* als Funktion der „Atmosphärendicke" H (für einen festen „Blickwinkel" b des Beobachters)?
Qualitative Diskussion: Berücksichtigen Sie, dass die Annahme einer flachen Planetenoberfläche bei großen Entfernungen nicht mehr gültig ist. Was folgt daraus für Planeten mit Radius $R \gg H$ ($R \ll H$)? Wie nimmt ein Beobachter seine Umgebung im Fall $R \gg H$ (z.B. auf der Venus) wahr? Welche Annahmen in der betrachteten Näherung schränken den gültigen „Blickwinkelbereich" b ein?

Zusatzfrage: An welche Bahn aus der Mechanik erinnert Sie die Kurve $z(x)$?