UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs
Wintersemester 2004/2005

Übungsblatt 7, Ausgabe 07.12.2004, abzugeben bis 14.12.2004
Besprechung in den Übungen in der 9. Semesterwoche (15.-17. Dez.)

29. **Beugung am Gitter; (5 Punkte)**

a) Berechnen Sie für ein Gitter der Gitterkonstante $d = 1\,\mu$m, das unter dem Winkel $\alpha = 20°$ beleuchtet wird, die Ausfallswinkel der Beugungsordnungen $m = 1, 2, \ldots$ für monochromatisches Licht der Wellenlängen $\lambda = 400\,$nm $500\,$nm, $600\,$nm, und $700\,$nm. Stellen Sie Ihre Ergebnisse graphisch dar. (3 Punkte)

b) Welches sind die maximalen Ordnungen, die bei diesen Wellenlängen sichtbar sind? Wie gross ist der optimale Blazewinkel θ_b für diese Wellenlängen? Stellen Sie Ihre Ergebnisse graphisch dar. (2 Punkte)

30. **Diffraktive Optik; (6 Punkte)**

a) In einer Flüssigkristall-Anzeige bestehend aus 5000×5000 Twisted-Nematic-Zellen mit einer Pixelgröße von $100\,\mu$m, die mit entlang x linear polarisiertem Licht $\lambda = 500\,$nm beleuchtet werde, wird jedes 10. Pixel angeschaltet. Welche Intensitätsverteilung sehen Sie auf einem Schirm im Abstand $d = 4\,$m? Welche Intensitätsverteilung ergibt sich, wenn Sie nach hinter der Anzeige einen Polarisator in y-Richtung platzieren? (3 Punkte)

b) Wie würden Sie diese Anzeige verwenden, um auf dem Schirm ein rechteckiges Muster aus scharfen Intensitätsmaxima im Abstand $\rho = 4\,$mm zu erzeugen? Wie können diese Maxima schnell über den Schirm bewegt werden? Wodurch ist die Breite dieser Intensitätsmaxima gegeben? (3 Punkte)

31. **Lorentzinvariante Maxwellsche Elektrodynamik; (10 Punkte + 2 Spkt.)**
Die vier (komponentenweise gezählten) inhomogenen Maxwell Gleichungen,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\varepsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{E}} &= \mu_0\,\mathbf{j}\,, \end{aligned} \tag{1}$$

mit den vier Nebenbedingungen der homogenen Maxwellgleichungen,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} &= 0 \,, \end{aligned} \tag{2}$$

beschreiben, wie Strom- und Ladungsdichten $\mathbf{j}$ und ρ die elektromagnetischen Felder erzeugen.

a) Leiten Sie aus Gl.(1) das Erhaltungsgesetz der Ladungen ab, und dass es mit der Viererstromdichte $j^\mu = (c\,\rho, \mathbf{j})$ geschrieben werden kann als ($\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad, \mu = 0, 1, 2, 3$ mit $x^0 = ct$ und $x^\mu = x_i$ für $\mu = i = 1, 2, 3$):

$$\partial_\mu\, j^\mu = 0$$

(2 Punkte)

b) Wie transformiert j^μ unter einer speziellen Lorentztransformation und wie lautet j'^μ in einem mit Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$ bewegtem Inertialsystem?
Hinweis: Zerlegen Sie $\boldsymbol{j}$ in Komponenten parallel und senkrecht zu $\mathbf{v}$ (2 Punkte)

c) Die Gl.(2) werden erfüllt durch Einführung des skalaren und Vektorpotentials ϕ und $\mathbf{A}$, aus denen die Felder folgen durch

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \dot{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \tag{3}$$

i. Zeigen Sie, dass eine sogenannte Umeichung $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\,\chi$ und $\bar{\phi} = \phi - \dot{\chi}$ mit einer beliebigen Funktion $\chi(r, t)$ die Felder invariant lässt; d.h. $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ folgen weiter aus Gl. (3) wenn dort $\mathbf{A}, \phi \to \bar{\mathbf{A}}, \bar{\phi}$ ersetzt wird. (1 Punkt)

ii. Das Viererpotential wird als kovarianter Vektor definiert durch:

$$A_\mu = (\phi/c, -\mathbf{A})$$

weil dann die Umeichung $A_\mu \to \overline{A}_\mu$ eine einfache Form annimmt.
Wie lautet sie? (1 Punkt)

d) Sei ein Viererpotential $\bar{A}_\mu$ gefunden. Welche Gleichung muss χ erfüllen, damit A_μ der sogenannten Lorenzeichung

$$\partial_\mu\, A^\mu = g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\, A_\nu = 0 \tag{4}$$

genügt? Wie lautet Gl. (4) explizit in Komponenten?
Ist die Lösung χ eindeutig? (1 Punkt)

e) Zeigen Sie, dass in Lorenzeichung das Viererpotential die inhomogene Wellengleichung

$$\Box\, A^\mu = -\mu_0\, j^\mu \tag{5}$$

erfüllt, wobei

$$\Box = \partial_\mu\, \partial^\mu = g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\, \partial_\nu = \frac{1}{c^2}\, \partial_t^2 - \nabla^2$$

der d'Alembert– oder Wellenoperator ist.
Hinweis Setzen Sie Gl. (3) in Gl. (1) ein und berechnen Sie komponentenweise unter Verwendung von G. (4). (3 Punkte)

f) Verwenden Sie die Lorenzeichung um gl. (5) umzuschreiben in

$$\partial_\mu \, F^{\mu\nu} = -\mu_0 \, j^\nu \;\; \text{mit} \;\; F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \, . \tag{6}$$

Wie lauten die Komponenten von F? (Bemerkung: Aus den Eigenschaften von F unter Lorentztransformation ergeben sich die Transformationen der elektromagnetischen Felder **E** und **B**.) (2 Sonderpunkte)

32. **Relativistische Teilchen-Kollison; (8 Punkte)**
Wir betrachten die elastische Kollision von zwei Teilchen der Ruhemasse m. Nehmen Sie dabei an, dass das zweite Teilchen im Laborsystem ruht. Wir bezeichnen die Vierer-Impulse der einfallenden Partikel mit $p_1^\mu = (E_1/c, \mathbf{p_1})$ und p_2^μ.

a) Finden Sie zunächst eine geeignete Transformation um die Vier-Vektoren darzustellen, wenn Sie sie aus einem Bezugssystem mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$ betrachten. Welche Bedingung läßt sich ableiten, wenn man in ein Schwerpunktsystem transformieren möchte. (1 Punkt)
Hinweis: Überlegen Sie sich genau welches Vorzeichen β haben muss. Nutzen Sie dazu auch die Skizze.

b) Die Kollision im Schwerpunktsystem kann man schematisch folgendermassen darstellen:

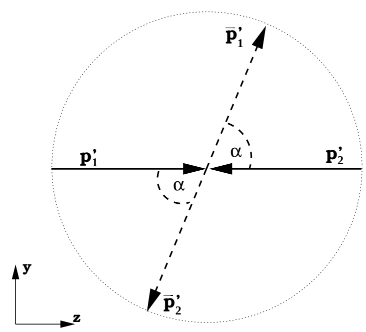

Abbildung: *Teilchen mit den Raumkomponenten $\mathbf{p_1'}$ und $\mathbf{p_2'}$ kollidieren im Schwerpunktsystem. Das Ergebnis des Stosses ist durch $\overline{\mathbf{p}}_1'$ und $\overline{\mathbf{p}}_2'$ dargestellt.*

i. Im Laborsystem sei der Winkel zwischen dem Raumvektor $\overline{\mathbf{p}}_1$ des ersten Teilchens (nach der Kollision) und der z-Achse ϑ. Welches Bild ergibt sich in diesem Bezugssystem? Finden Sie zunächst die Transformation aus dem Schwerpunktsystem zurück ins Laborsystem. Nutzen Sie diese, um den Ausdruck

$$\tan\vartheta = \frac{|\overline{\mathbf{p}}_1'| \, sin\alpha}{\gamma \, |\overline{\mathbf{p}}_1'| \, cos\alpha + \beta\gamma \overline{E}_1'/c}$$

zu beweisen. (1 Punkt)

ii. Zeigen Sie ferner, was man unter der relativistisch reduzierten Masse M versteht. Stellen Sie damit folgende Gleichungen auf: (2 Punkte)

$$|\mathbf{p}_1'| = \frac{m \, |\mathbf{p}_1|}{M}$$

$$\overline{E}_{1,2} = \frac{1}{M} \left(m^2 c^2 + E_1 m \right) .$$

iii. Beweisen Sie nun den angegebenen Ausdruck des Winkels θ als Funktion von α, m und der relativistisch reduzierten Masse M.

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{\sin\alpha}{\gamma(\cos\alpha + 1)}\right)$$

Hinweis: Nehmen Sie $|\mathbf{p_1'}| = |\overline{\mathbf{p}}_\mathbf{1}{}'|$ *als gegeben. Dabei ist* $|\mathbf{p_1'}|$ *die Raumkomponente des Vier-Vektors vor der Kollision und* $|\overline{\mathbf{p}}_\mathbf{1}{}'|$ *die Raumkomponente nach der Kollision. Das gilt nur im Schwerpunktsystem.* (1 Punkt)

c) Betrachten Sie den klassischen und ultrarelativistischen Grenzfall. Skizzieren und interpretieren Sie die Abhängigkeit des Winkels ϑ von α. (1 Punkt)

d) In einer inelastischen Kollision zweier Protonen ($M = 938\ MeV/c^2$) soll obendrein noch eine π-meson ($m = 135\ MeV/c^2$) entstehen (neben den beiden Protonen). Auf welche Geschwindigkeit muß das erste Proton im Laborsystem mindestens beschleunigt werden? (2 Punkte)